

Geschichte.

• Struik, Dirk J.: A concise history of mathematics. London: G. Bell and Sons, Ltd. 1954. XIX, 299 p. 14 s net.

Vgl. Besprechung der früheren Auflage in dies. Zbl. 32, 97.

Frajese, Attilio: La scoperta dell'incommensurabile nel dialogo „Menone“. Boll. un. mat. Ital., III. Ser. 9, 74—80 (1954).

Die Frage, wann und wie der erste Beweis für die Inkommensurabilität von Quadratseite und Diagonale (modern: für die Irrationalität von $\sqrt{2}$) geführt wurde, ist immer noch lebendig (z. B. Pihl, dies. Zbl. 43, 1). Verf. befaßt sich eingehend mit der berühmten Menon-Stelle, deren zweitem Teil an einer Figur gezeigt wird, daß $d^2 = 2a^2$, wobei in dem gewählten Zahlenbeispiel, das ja noch die allgemeine Formel ersetzen mußte, $a = 2$ genommen ist. In dem vorgehenden Teil des Dialogs wird vorgeführt, daß $d = 4$ und $d = 3$ zu keiner Lösung führen. Verf. sieht hierin einen arithmetischen Beweis, der freilich nur ganze Zahlen berücksichtigt. — Die Feststellung, daß Platon hier pythagoreisches Gedankengut wiedergibt, ist sicher richtig; eine nähere Einordnung in die große Zeitspanne von Pythagoras bis Archytas gelingt nicht.

K. Vogel.

Waerden, B. L. van der: Einfall und Überlegung in der Mathematik. II. Elemente math. 9, 1—9 (1954).

Im Anschluß an die erste Mitteilung (dies. Zbl. 51, 1), in der Verf. darlegt, wie Archimedes mit seiner Hebelmethode die Sätze vom Kugelinhalt und der Kugeloberfläche gefunden hat, werden hier dessen Gedankengänge beim Beweis dieser Sätze im einzelnen vorgeführt, wobei klar herausgearbeitet wird, wie Archimedes als durch glückliche Einfälle, teils durch bewußte Überlegung (z. B. durch Aufteilung eines schweren Problems in mehrere leichte) zum Ziel kommt. K. Vogel.

Aaboe, Asger: Al-Kāshī's iteration method for the determination of $\sin 1^\circ$. Scripta math. 20, 24—29 (1954).

Ableitung und sexagesimale Durchführung des Algorithmus zur Lösung der trigonometrischen Gleichung für $\sin 1^\circ$ mit Fehlerabschätzung und Konvergenznachweis. Der Verf. war leider offenbar nicht imstande, die wichtigste Quelle, nämlich den im Kairo befindlichen Kommentar zu dem verlorengegangenen Werk von al-Kāshī über den Gegenstand auszuwerten. Dort findet sich der Wert von $\sin 1^\circ$ auf 10 Sexagesimalstellen (17 Dezimalen) genau.

H. I. Hermelink.

Iyer, R. Venkachalam: The Hindu abacus. Scripta math. 20, 58—63 (1954)

Waerden, Bartel L. van der: Bemerkungen zu den Handlichen Tafeln des Ptolemaios. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 261—272 (1954).

Hofmann, Jos. E.: François Viète und die archimedische Spirale. Arch. der Math. 5, 138—147 (1954).

Einleitend weist Verf. unter Anführung von Beispielen darauf hin, daß François Viète (1540—1603) durch eine Reihe neuartiger Ansätze zum Wegbereiter moderner mathematischer Auffassungen geworden ist. Er behandelt sodann mit reichen Literaturangaben ausführlich einige dieser Ansätze, die sich auf die Spiralen-Abhandlung des Archimedes beziehen, aber bisher fast unbeachtet blieben, weil sie in Bruchstücken im 8. Buch der „Varia responsa“ (1593) und in der Abhandlung „Munimen adversus nova cyclometrica“ (1594) eingestreut sind. Nach kurzer Schilderung der kritischen Bearbeitung der Archimedischen Spiralenabhandlung durch Renaissance-Gelehrte wird gezeigt, welche Rolle jene Ansätze in dieser Entwicklung gespielt haben. In den „Varia responsa“ handelt es sich um die Tangentenbestimmung an der Spirale und um Quadraturprobleme im Kreis, die vermittels der Spirale gelöst werden. Im „Munimen adversus“

nova cyclometrica findet sich eine sehr genaue annäherungsweise Flächenbestimmung eines Kreissegments aus einem Spiralsegment. Die Überlegungen und Beweise Viètes werden in modernen Bezeichnungen skizziert. Abschließend wird betont, daß Viète hier ahnend entscheidende Gedankengänge von grundsätzlicher Bedeutung erfaßt und an Beispielen vorweggenommen hat. Wir haben also Anlaß, den Verlust der ersten sieben Bücher der *Varia responsa* zu bedauern.
E. Löffler.

Blaschke, Wilhelm: *Keplero e Galileo.* Giorn. Mat. Battaglini 82 (V. Ser. 2), 309—334 (1954).

Conte, Luigi: *La risoluzione delle equazioni algebriche nella produzione matematica di G. C. De'Toschi di Fagnano.* Archimede 6, 37—41 (1954).

Gillings, R. J.: *The so-called Euler-Diderot incident.* Amer. math. Monthly 61, 77—80 (1954).

Wiedergabe des „algebraischen Gottesbeweises“, mit dem Euler 1774 dem algebraisch unbewanderten Diderot mundtot machte.
J. E. Hofmann.

Hofmann, Josef Ehrenfried: *Die Mathematik an den altbayerischen Hochschulen.* Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., n. F. 62, 28 S. (1954).

Verf. gibt einen zuverlässigen Überblick über Lehre und Lehrer der Mathematik an den altbayerischen Hochschulen (Universität Ingolstadt-Landshut-München und Technische Hochschule München) mit ausführlichen bibliographischen und biographischen Angaben.
K. Vogel.

Blaschke, Wilhelm: *Luigi Bianchi e la geometria differenziale.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 8, 43—52 (1954).

Magnus, Wilhelm und Ruth Moufang: *Max Dehn zum Gedächtnis.* Math. Ann. 127, 215—227 (1954).

Mit Schriftenverzeichnis.

Rozet, O.: *In memoriam: Augustin Delgleize.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 248—250 (1954).

Dehalu, M., L. J. Pauwen, G. Gueben et L. Bruwier: *In memoriam: R. H. Germay.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 23, 251—266 (1954).

Rootselaar, B. van: *In memoriam Dr. G. F. C. Griss.* Euclides, Groningen 29, 42—45 (1954) [Holländisch].

Tietze, Heinrich: *Aus Gesprächen mit Gustav Herglotz.* S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 163—167 (1954).

Drobot, S.: *L'oeuvre scientifique de M. T. Huber (4. 1. 1872—9. 12. 1950).* Colloquium math. 3, 63—72 (1954).

Kostovskij, A. N.: *Aleksandr Sergeevič Kovanko. (Zum sechzigsten Geburtstage.)* Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 215—221 (1954) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Linnik, Ju. V. und N. A. Šanin: *Andrej Andreevič Markov. (Zum fünfzigsten Geburtstage.)* Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 145—149 (1954) [Russisch].

Hyers, D. H.: *Aristotle D. Michal. 1899—1953.* Math. Mag. 27, 237—244 (1954).
Mit Schriftenverzeichnis.

Quade, W.: *Conrad Müller.* J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 57, 1—3 (1954).

Žautykov, O. A.: *Konstantin Petrovič Persidskij. (Zum fünfzigsten Geburtstage.)* Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 151—154 (1954) [Russisch].

Natucci, Alpinolo: *Nel primo centenario della nascita di Salvatore Pincherle.* Giorn. Mat. Battaglini 82 (V. Ser. 2), 335—342 (1954).

Ackeret, J.: *Ludwig Prandtl.* Z. angew. Math. Phys. 5, 175—177 (1954).

Tonolo, Angelo: *Commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario della nascita.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 1—24 (1954).

Mit Schriftenverzeichnis.

Szegő, Gabor: *Otto Szász.* Bull. Amer. math. Soc. 60, 261—263 (1954).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Dantzig, D. van: Das mathematische Modell in der Erfahrungswissenschaft. Euclides, Groningen 29, 35—41 (1954).

Kamke, E.: Werden und Sicherheit mathematischer Erkenntnis. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 57, 6—20 (1954).

Locher-Ernst, L.: Entdecken oder Erfinden? — Zum sechzigsten Geburtstag von Paul Finsler am 11. April 1954. Elemente Math. 9, 25—29 (1954).

● Jaffé, George: Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. 220 S., steif geh. DM 9,60.

Die drei Dialoge lehnen sich stilistisch an Berkeleys „Three dialogues between Hylas and Philonous“ an und finden zwischen zwei gleichbenannten Personen statt, von denen die eine ein behutsam sprechender moderner Physiker, die andere ein imaginärer Philosoph ist, der kritisch-offen zuzuhören versteht. Die ersten beiden Dialoge, die sich mit Raum und Zeit einerseits als Formen der Anschauung, andererseits als Formen des physikalisch Wirklichen beschäftigen und zur Relativitätstheorie hinführen, sind in erster Auflage 1931 (Springer, Berlin) erschienen. Das Thema des neuen dritten Dialogs ist die Kausalität, genauer die Verträglichkeit des Kausalprinzips mit den statistischen Theorien der Physik. Durch die Auseinandersetzung des Problems am dem Eindringen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die klassische Physik, das schon mit der Ausgleichsrechnung beginnt, wird das Verständnis für den Hauptgegenstand des Gesprächs, die Quantentheorie, fundiert. Bei der Darstellung der Quantentheorie ist die Auswahl der allgemeinen Gesichtspunkte, die zur Erläuterung der Denkbarekeit dieser Theorie dienen, der Kern der sachlichen Leistung. Das Endergebnis ist die Verträglichkeit der Quantentheorie mit einem kritisch eingeschränkten Prinzip der Determiniertheit, durch das der Sinn des Kausalitätsprinzips gerettet wird.

K. Reidemeister.

Rescher, Nicholas: Leibniz's interpretation of his logical calculi. J. symbolic Logic 19, 1—13 (1954).

Auf drei Entwürfe ziehen sich die Bemühungen Leibnizens um eine Realisierung der bahnbrechend von ihm diskutierten Idee eines Logikkalküls zusammen: der erste um 1679, der zweite um 1685/6, der dritte vom Jahre 1690. In der vorliegenden Studie werden diese drei Entwürfe sachkundig und sorgfältig überprüft, mit Bezug auf den gegenwärtigen Stand der Kalkül-Entwickelungstechnik und der Einsicht in den Spielraum der Möglichkeiten von Logikkalkülen. Eine solche Überprüfung ist dadurch notwendig geworden, daß die bahnbrechende Leibnizinterpretation von Louis Couturat („La logique de Leibniz d'après des documents inédits“, Paris 1901), durch welche die um den eigentlichen, nicht an den Augen des Publikums haftenden Leibniz bemühte Forschung dokumentarisch zum erstenmal auf festen Grund gestellt worden ist, in bezug auf die in ihr enthaltene Diskussion dieser drei Entwürfe längst revisionsbedürftig geworden ist. Unter dem Einfluß der Booleschen Algebra hatte Couturat (mit Ernst Schröder) angenommen: (1) daß nur eine extensionale Logik mathematisiert werden könne (obwohl die intensionale Prädikatenlogik in Freges „Begriffsschrift“ von 1879, auf der wir heute noch stehen, schon damals hätte stützig machen können), (2) daß die von Leibniz festgehaltene Logik des Aristotelischen Quadrats, deren Existenzberechtigung freilich erst wesentlich später von den in jedem Sinne bahnbrechenden Logikern der Warschauer Schule (in diesem Falle von J. Łukasiewicz) entdeckt worden ist, nicht zu retten sei. Es wird gezeigt, daß eine Streichung dieser Vorurteile eine Rehabilitierung Leibnizens in fast allen wesentlichen Punkten nach sich zieht, wobei der schon in den Entwurf von 1685/6 eingehenden Null- und Allklasse im ersten Falle die Eigenschaft, ein Nicht-Ding zu sein, als die inhaltsreichste, im zweiten Falle die Eigenschaft, ein Ding zu sein, als die inhaltsärmste Eigenschaft zuzuordnen ist. Es würde zu wünschen sein, daß der Verf. diese Entsprechungen noch einmal planmäßig diskutiert, insbesondere unter dem Gesichtspunkt der Frage, wie sich die inhaltsreichste Eigenschaft im Sinn der klassischen Logik genauer: der Logik von Port-Royal) verhält zu der Eigenschaft, die jede Eigenschaft impliziert, entsprechend die inhaltsärmste Eigenschaft zu der Eigenschaft, die von jeder Eigenschaft impliziert wird: denn es kann, wie mir scheint, heute nicht mehr genügen, daß man sich darauf beschränkt zu sagen: „A enthält B im intensionalen Sinne“. Dies sollte vielmehr so präzisiert werden, daß man die intensionale Sprache auch in diesen und anderen kritischen Fällen eben so beherrschen lernt, wie wir heute die extensionalen Sprachen beherrschen.

Wichtig und gleichfalls über Couturat hinausführend sind die folgenden kalkültechnischen Feststellungen zu Leibniz: (1) L. macht einen grundlegenden Gebrauch von der Abtrennungsregel. Er hat diese Regel aber noch nicht einwandfrei formulieren können, weil er die Notwendigkeit einer klaren Unterscheidung zwischen Objektsprache und Metasprache noch nicht erkannt hat. [Sie wird aber in der Literatur m. W. überhaupt erst 1928 erkennbar, in der ersten Ausgabe von Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Berlin)]. (2) Eine zweite Umformungsregel bei L. ist die Regel der Termeinsetzung. (3) Die Identitätsbeziehung wird

metasprachlich so eingeführt, daß sie genau dem entspricht, was man in der zweiten Stufe erhält durch $x \equiv y =_{\text{Def}} \forall P (P x \leftrightarrow P y)$.

Die vorstehende Revision ist durch den Raum so beschränkt, daß eine neue Darstellung der Leibnizschen Bemühungen um einen Logikkalkül von dem Verf. ins Auge gefaßt werden sollte, mit einer kritischen Verwertung der Resultate der hochwertigen Leibniz-Analysis von C. I. Lewis, „A survey of symbolic logic“ (Berkeley 1918).

H. Scholz.

Schliebs, Günther: Über die Grundlagen der Algebra der Logik und ihre Anwendung in der Schaltungstheorie. Monatsh. Hochfrequenztechn. Elektroakustik 2, 57—71 (1954).

Verf. gibt eine Darstellung der Elemente der formalen Logik (Schlüssigkeit und Richtigkeit, Widerspruch und Gegensatz, verknüpfte Aussagen) und der Algebra der Logik (Symbole und Grundrechenarten der gewöhnlichen Algebra, besondere Regeln, die nicht denen der letzteren entsprechen) und zeigt, daß die Deutung der Symbole der Algebra der Logik als Bestimmungsgrößen geschalteter Stromkreise in der modernen Elektrotechnik keineswegs willkürlich, sondern im Gegenteil recht anschaulich ist. Bemerkenswert ist die vom Verf. gegebene, auf einer Kombination von symbolischer Algebra und Matrizenrechnung beruhende allgemeine Schaltungstheorie.

O. Volk.

Fine, N. J.: Proof of a conjecture of Goodman. J. symbolic Logic 19, 41—44 (1954).

Verf. beweist in einer netten Studie einige Äquivalenzen zwischen verschiedenen Bedingungen für Anordnungen. Die verwendeten Relationen sind des Näheren in N. Goodman, „The structure of appearance“, Kap. X (Cambridge, Mass. 1951) behandelt. Leider kann aus Raumgründen hier darauf nicht weiter eingegangen werden, da der begriffliche Apparat zu umfangreich wäre.

G. H. Müller.

Hailperin, Theodore: Remarks on identity and description in first-order axiom systems. J. symbolic Logic 19, 14—20 (1954).

Verf. bemerkt zunächst, daß man ganz allgemein die Gleichheit in ein im Prädikatenkalkül der 1. Stufe formalisiertes System durch explizite Definition einführen kann. Kommt z. B. nur ein Grundprädikat $\Phi(x, y)$ vor, dann setze man

$$x = y =_{\text{Def}} (z) (\Phi(z, x) \equiv \Phi(z, y)) \ \& \ (z) (\Phi(x, z) \equiv \Phi(y, z))$$

und füge entsprechende weitere Konjunktionsglieder für weitere Stellen in Φ , bzw. für weitere Grundprädikate hinzu. Die üblichen Gleichheitsaxiome sind dann beweisbar. — Anschließend wird die Einführung des ι -Symbols („dasjenige, welches“) in Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. 1, § 8 (Berlin 1934, dies. Zbl. 9, 145) (HB. I) und bei Rosser₁, „Logic for mathematicians“ (New York 1953) betrachtet. Sei S ein System der 1. Stufe mit Gleichheit und S' gehe aus S durch Hinzunahme von ι -Axiomenschemata hervor. Verf. definiert für jede Formel F aus S' eine ι -freie Transformierte F' (vgl. Rosser₂, dies. Zbl. 20, 194); mit Hilfe dieses Begriffes kann dann der Eliminationssatz für ι -Symbole nach Rosser₂ [oder vereinfacht (noch nicht publiziert) nach G. Hasenjaeger] geführt werden. Für die Einführung des ι -Symbols nach Rosser, zeigt Verf., daß der Eliminationssatz dann und nur dann zutrifft, wenn es ein einstelliges Prädikat Q gibt, so daß $(E y) (x) (x = y \equiv Q(x))$ in S beweisbar ist. — Schließlich werden für die Einführung des ι -Symbols in HB. I und bei Rosser₁ Vervollständigungsschemata angegeben für die Fälle, in denen die Eindeutigkeitsforderung nicht erfüllt ist, und es wird gezeigt, daß das durch Hinzunahme solcher Formelschemata zu S' entstehende System S'' in dem Sinne vollständig ist, daß, wenn für eine Formel F aus S' F' gültig in S ist, dann F in S'' beweisbar ist.

G. H. Müller.

Shoenfield, Joseph R.: A relative consistency proof. J. symbolic Logic 19, 21—28 (1954).

Seien A und A' zwei im Prädikatenkalkül der 1. Stufe formalisierte Axiomensysteme. A' möge mit A so verbunden sein wie z. B. das Bernaysche System der Mengenlehre mit dem Zermelo-Fraenkelschen System, d. h. insbesondere, daß A' eine neue Sorte von Individuen (Klassenvariablen) enthält. Verf. vermeidet hier mit Hilfe des Abstraktionsoperators gebundene Klassenvariablen für die Formulierung der Axiome von A' , erlaubt jedoch, daß A' außer den nichtlogischen Axiomen von A auch noch andere nichtlogische Axiome, die allerdings gewissen einschränkenden Bedingungen unterliegen, enthalten kann; ein so erweitertes System A' möge mit A'' bezeichnet werden. Nach I. Novák (dies. Zbl. 39, 245) folgt die Widerspruchsfreiheit (Wfh.) von A' aus der von A . Nach A. Mostowski (vom Verf. ohne Angabe der Stelle genannt) (dies. Zbl. 39, 276) ist jedes Theorem von A' , das in A formalisiert werden kann, in A beweisbar. —

Dieser Satz von Mostowski wird hier — mit Hilfe des ersten und zweiten ε -Theorems von Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2 (Berlin 1939, dies. Zbl. 20, 193) (HB. II) — in folgender Verschärfung bewiesen. Sei $P(a, b, c)$ das primitiv rekursive Prädikat: „Wenn a Nummer einer Formel F aus A und b Nummer eines Beweises von F in A' ist, dann ist c Nummer eines Beweises von F in A .“ Der Satz von Mostowski lautet dann: $\exists x (y) (Ez) P(x, y, z)$. Durch Formalisierung des in der Arbeit des Verf. durchgeführten Beweises dieses Satzes gelangt man zu einer primitiv rekursiven Funktion $f(a, b)$, deren Wert unter Voraussetzung von $P(a, b, c)$ gleich c ist. Damit ist der darin enthaltene Wfh.-Beweis im Sinne von HB. II, p. 340 geführt. Zum Abschluß werden noch einige Beispiele von Systemen, die wie A und A' bzw. A'' zusammenhängen, gegeben.

G. H. Müller.

Rose, Alan: A formalisation of the 2-valued propositional calculus with self-dual primitives. Math. Ann. 127, 255—257 (1954).

Axiomatisierung des klassischen Aussagenkalküls mit Hilfe der folgenden Primärbegriffe: t (für „Wahr“), f (für „Falsch“), $[X, Y, Z]$ (für $X \& Y$ v. $Z \& \bar{Y}$). Vgl. A. Church, dies. Zbl. 34, 291. Eine Formel \mathfrak{A} heißt „dual“ zu \mathfrak{B} , wenn sie aus \mathfrak{B} durch Umschreibung von rechts nach links und Vertauschung von t und f hervorgeht. Die Negation wird wie folgt definiert: $\bar{\mathfrak{A}} =_{\text{Dr}} [f, \mathfrak{A}, t]$. Es gilt das folgende Dualitätsprinzip: Die Negation des Dualen eines Theorems ist ein Theorem. Die Axiomatisierung wird auf Vorschlag von A. Church so eingerichtet, daß der Beweis dieses Prinzips besonders einfach ist.

G. H. Müller.

Martin, Norman M.: The Sheffer functions of 3-valued logic. J. symbolic Logic 19, 45—51 (1954).

Martin first obtains a number of necessary conditions for a function to be a Sheffer function of m -valued logic. He then isolates all Sheffer functions of 3-valued logic and shows that there are 3774 such functions.

A. Rose.

Moh, Shaw-Kwei: Logical paradoxes for many-valued systems. J. symbolic Logic 19, 37—40 (1954).

The author first defines an implication function Cpq to be a function such that the rule „From P and CPQ we can infer Q “ is valid. He then defines $(Cp)^i q$ by „ $(Cp)^1 q$ is to be Cpq , $(Cp)^{i+1} q$ is to be $Cp(Cp)^i q$ “ and shows that if in a system we can assert the proposition Cpp and the rule „If $(Cp)^{n+1} q$ then $(Cp)^n q$ “ then the system is led into an inconsistency by the class $\lambda x \cdot (Cxx)^n p$. He then proves a number of theorems concerning the validity of the rule of absorption in various systems. Finally he raises objections to Łukasiewicz's interpretation of 3-valued logic and suggests an alternative interpretation.

A. Rose.

Gentzen, Gerhard: Zusammenfassung von mehreren vollständigen Induktionen zu einer einzigen. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 1—3 (1954).

In dieser Abhandlung, die 1944 Heinrich Scholz zu seinem 60. Geburtstag gewidmet war, zeigt der 1945 verstorbene Verf.: Jeder Beweis in einem Formalismus, der die natürlichen Zahlen und die Prädikatenlogik enthält, kann so umgeformt werden, daß die vollständige Induktion höchstens einmal angewandt wird. Hieraus folgt insbesondere, daß als Maß für die „Kompliziertheit“ eines Beweises nicht die Anzahl der auftretenden Induktionen, sondern nur der „Grad“ der Induktionsaussagen dienen kann.

Kurt Schütte.

Loś, J.: On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. Colloquium math. 3, 58—62 (1954).

Unter einem System werde eine widerspruchsfreie deduktiv abgeschlossene Ausdrucksmenge verstanden. Ein System heiße elementar, wenn es im Prädikatenkalkül der ersten Stufe durch Adjungierung von außerlogischen Konstanten ohne Benutzung von Prädikaten- oder Funktionsvariablen formalisiert werden kann. In der Abhandlung über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen (dies. Zbl. 10, 49) hat Th. Skolem gezeigt, daß kein elementares System mit einem abzählbar unendlichen Modell kategorisch ist. Nun sind zwei Modelle nur dann isomorph, wenn sie gleichzählig sind. Es genügt also zu zeigen, daß es zu jedem elementaren System mit einem abzählbaren Modell noch ein zweites Modell von einer höheren Mächtigkeit gibt. Dies ist der übliche Weg. Es liegt nahe, zu fragen, ob es nicht auch so geht, daß gezeigt wird, daß es zu

jedem elementaren System mit einem abzählbaren Modell ein nicht mit ihm isomorphes abzählbares Modell gibt.

Es wird gezeigt, daß diese Möglichkeit verneint werden muß. Es gibt elementare Systeme, die (bis auf Isomorphismen) nur ein einziges abzählbares Modell besitzen. Ein solches System heiße „kategorisch in bezug auf die Mächtigkeit \aleph_0 “. Allgemein heiße ein System „kategorisch in bezug auf die Mächtigkeit m “, wenn es (bis auf Isomorphismen) nur ein einziges Modell von dieser Mächtigkeit hat. Für den abzählbaren Fall ist ein klassisches Beispiel eines elementaren Systems, das kategorisch ist in bezug auf die Mächtigkeit \aleph_0 , das System der nicht-atomaren Booleschen Algebra. Dieses System ist elementar. Es ist aber bekannt, daß jedes abzählbare Modell einer solchen Algebra isomorph ist mit der Algebra der zugleich abgeschlossenen und offenen Mengen des Cantorsche Diskontinuums. Im Anschluß hieran wird gezeigt, daß es auch elementare Systeme gibt, die kategorisch sind (a) in bezug auf jedes $m \geq \aleph_0$, (b) in bezug auf jedes $m > \aleph_0$. — Ein elementares System S heiße vollständig, wenn für jeden aus den Ausdrucksmitteln von S erzeugbaren Ausdruck H gilt: $H \in S$ oder $S \cup \{H\}$ ist widerspruchsvoll. In bezug auf diesen Vollständigkeitsbegriff werden zwei Theoreme angegeben zur Erhellung der Beziehungen zwischen Kategorizität und Vollständigkeit. — S sei ein elementares System. Dann gilt: (1) Wenn S kategorisch ist in bezug auf die Mächtigkeit $m \geq \aleph_0$ und wenn S keine endlichen Modelle hat, so ist S vollständig. (2) Wenn S kategorisch ist in bezug auf $n < \aleph_0$, so ist das durch $S \cup \{\pi_n\}$ erzeugte System vollständig [π_n ein (wie oben definierter) elementarer Ausdruck, dessen Modelle der n -Zahligkeitsbedingung genügen müssen]. Abschließend werden drei nicht-triviale offene Fragen formuliert im Zusammenhang mit der auf verschiedene Mächtigkeiten erstreckten Kategorizität eines elementaren Systems.

H. Scholz.

Kreisel, G.: Remark on complete interpretations by models. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 4—9 (1954).

Als „vollständige konjunktive Interpretation“ eines Systems \mathfrak{F} durch ein System F bezeichnet Verf. eine Zuordnung von Formeln A_n ($n = 1, 2, \dots$) aus F zu jeder Formel \mathfrak{A} aus \mathfrak{F} , so daß \mathfrak{A} dann und nur dann in \mathfrak{F} beweisbar ist, wenn sich jede Formel A_n in F beweisen läßt. Diese Zuordnung soll bei geeigneter Arithmetisierung gegeben werden durch eine berechenbare Funktion $f(n, a)$, welche die Gödel-Nummer von A_n angibt, wenn a die Gödel-Nummer von \mathfrak{A} ist. Als System \mathfrak{F} betrachtet Verf. erstens den Prädikatenkalkül 1. Stufe Π_1 , zweitens den Kalkül Π , der aus Π_1 durch Hinzunahme von Quantoren für Prädikatenvariablen entsteht. Die Interpretation erfolgt in beiden Fällen durch ein System \mathfrak{Z} , das aus Z_μ mit verifizierbaren primitiv-rekursiven Formeln als Axiomen besteht. Zur Interpretation von Π wird zunächst eine endliche Prädikatenmenge P eingeführt, die gemäß den in einer Formel Σ zusammengefaßten Forderungen eine Abbildung von Π in Π_1 zum Ausdruck bringt. Hiernach ist eine Formel \mathfrak{A} dann und nur dann als in Π beweisbar anzusehen, wenn eine entsprechende Formel $\Sigma \rightarrow \mathfrak{A}_1$, welche nur Prädikate aus P enthält, in Π_1 beweisbar ist. Mittels einer linearen Anordnung aller Mengen von Prädikaten aus Z_μ , welche dieselben Argumentstellen wie die Prädikate aus P besitzen, werden schließlich geeignete Individuenbereiche $D^{(n)}$ und Prädikatenbereiche $D_p^{(n)}$ angegeben. Die Formeln A_n , die aus \mathfrak{A} bei Beschränkung der Variabilitätsbereiche auf $D^{(n)}$ bzw. $D_p^{(n)}$ entstehen, lassen sich in Z_μ ausdrücken und liefern eine vollständige konjunktive Interpretation von Π durch \mathfrak{Z} .

Kurt Schütte.

Boone, William W.: Certain simple, unsolvable problems of group theory. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 231—237 (1954).

Es gibt eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden g_1, \dots, g_n und endlich vielen definierenden Relationen sowie eine natürliche Zahl $m < n$ so, daß die Frage, ob ein Gruppenelement bereits in der von g_1, \dots, g_m erzeugten Halbgruppe liegt, kein rekursives Entscheidungsverfahren besitzt.

G. Pickert.

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

• Andreoli, Giulio: Lezioni di matematiche superiori. I, II, III. Napoli-Roma-Milano: Istituto Editoriale del Mezzogiorno 1952, 1953, 1954. 107, 78, 126 p.

Es wird in 3 Heften ein Unterrichtskurs veröffentlicht, im allgemeinen der abstrakten Algebra, und insbesondere der Booleschen Algebra samt ihren Anwendungen, gewidmet. — I. Allgemeine Begriffe der abstrakten Algebra; Mengenlehre, Operatoren Gruppen, Iso- und Auto-morphismen. Boolesche Algebra; logische und zahlentheoretische Deutungen; lineare Formen, Normalform, Gleichungen; Strukturen, usw. — II. Anwendung der Booleschen Algebra auf den Aussagenkalkül, und dieser zur

begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mehr vom formalen als vom inhaltlichen Standpunkte aus.) — III. Matrizenalgebra, im allgemeinen und im Booleschen Falle. Projektive Äquivalenz in Booleschen Mengen, Matrizenkalkül und Transformationsregeln (Kovarianz, Kontravarianz). *B. de Finetti.*

Welter, C. P.: The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 194—200 (1954).

Von beliebig viel Feldern, numeriert: $1, 2, \dots$, seien n mit je einer Marke besetzt. Zwei Spieler ziehen abwechselnd, indem jeder eine beliebige Marke auf irgendein leeres Feld mit niedrigerer Nummer rückt. Wer das Spiel beendet, ist Sieger. — Dies Spiel geht auf eine Kowalewskische Abart von Nim zurück ($n = 3$); dann wurde der Fall $n = 4$ und, für nur 16 Felder, $n = 5$ vom Ref. erledigt. Jetzt hat Verf. das Problem mit einem überraschend einfachen Satz in voller Allgemeinheit gelöst. Den Feldern werden die Elemente der unendlichen Abelschen Gruppe mit lauter Erzeugenden der Ordnung 2 umkehrbar eindeutig zugeordnet und jeder Stellung der n Marken ein rekursiv leicht zu bestimmendes Gruppenelement. Dem Einheitsselement sind genau die Stellungen zugeordnet, in welchen der Anziehende verliert. [Beginnt die Nummerierung mit 0 und wird die additive Gruppe mit den Erzeugenden 2^k ($k = 0, 1, \dots$) zugeordnet, dann stimmen Feldnummer und Gruppenelement überein (dyad. Ziffersystem); Ref.].

R. Sprague.

Bizley, M. T. L.: Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from $(0, 0)$ to (k, m, k, n) having just t contacts with the line $m, y = n, x$ and having no points above this line; and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line. *J. Inst. Actuaries* **80**, 55—62 (1954).

Soit OAB le triangle rectangle dont les sommets ont pour coordonnées $O(0, 0)$, $A(k, m, 0)$, $B(k, m, n)$, m, n, k entiers positifs, $(m, n) = 1$. Considérons une ligne brisée, d'extrémités OB , ayant ses sommets (entiers) dans le triangle OAB où sur son périmètre, et telle que deux sommets consécutifs aient toujours une coordonnée commune. Si le sens de parcours, sur chaque arête de la ligne brisée, quand on la décrit de O vers B est toujours le même que le sens positif des axes, le trajet est minimum. Il n'est question dans cette note que de lignes minima. I. D. Grossman [*Scripta math.* **16**, 207—212 (1950)] a donné sans démonstration la formule:

(x) $\sum \frac{F_1^{k_1} F_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots}$, $F_i = \frac{1}{i(m+n)} \binom{i(m+n)}{i, m}$ où la somme est étendue à tous les entiers $k_i \geq 0$ tels que $\sum_i i k_i = k$ et qui donne le nombre des parcours correspondant à un

système de valeurs m, n, k . L'A. calcule le nombre $\Psi_k = \Phi_{k,1}$ des parcours ne touchant pas l'hypoténuse OB (sauf à ses extrémités) et le nombre $\Phi_{k,t}$ des trajets qui touchent OB en $t-1$ points: $\Psi_k = \sum [(-1)^{1+\sum k_i} \frac{F_1^{k_1} F_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots}]$. Le nombre $\Phi_{k,t}$ est le coefficient de x^t dans: $(1 - \exp[-F_1 x - F_2 x^2 \dots])^t$ avec F_i défini comme dans (x). La formule de Grossman est ainsi démontrée. Des relations de récurrence pour Ψ_k et Φ_k sont établies, et le cas particulier $n = 1$ étudié plus spécialement. *A. Sade.*

Seiden, Esther: On the problem of construction of orthogonal arrays. *Ann. Math. Statistics* **25**, 151—156 (1954).

Un tableau orthogonal (N, k, s, t) est une matrice M , de k lignes et de N colonnes, dont les éléments sont $0, 1, 2, \dots, s-1$, telle que les N colonnes de toute sous-matrice composée de t lignes de M soient formées des s^t arrangements avec répétition t à t des éléments $0, 1, 2, \dots, s-1$, chaque arrangement figurant le même nombre (λ) de fois dans les N colonnes. Soit S l'ensemble ordonné des s éléments. On peut décomposer les s^t arrangements avec répétition t à t de ces éléments en s^{t-1} sous-ensembles S_i , chacun contenant s arrangements et étant fermé par rapport aux substitutions circulaires des s . Exemple: $s = t = 2$; $S_1 = (0, 0, 1, 1)$; $S_2 = (0, 1, 1, 0)$. Soit A une matrice de r lignes et de λs^{t-1} colonnes dont les éléments $\in S$ et telle que, dans toute sous-matrice de t lignes, le nombre des éléments $\in S_i$ soit λ pour toute valeur de i . Alors, en permutant circulairement les s dans A , on obtient s matrices dont la juxtaposition sera un $(\lambda s^t, r, s, t)$. Application: d'un $(12, 11, 2, 2)$ de Plackett-Burman il est déduit un $(24, 11, 2, 3)$ et d'une matrice 2×12 , obtenue par la méthode des différences de Bose (ce Zbl. **23**, 1) un tableau orthogonal $(36, 13, 3, 2)$. Page 151, ligne 11 et p. 153, l. 22, lire $(24, 12, 2, 3)$. Sur ces questions, voir K. B. Bush (ce Zbl. **47**, 17) puis R. C. Bose et K. A. Bush (ce Zbl. **48**, 8). *A. Sade.*

Kövari, T., V. T. Sós and P. Turán: On a problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium math.* **3**, 50—57 (1954).

K. Zarankiewicz stated the problem of determining the minimal number $z_j(n)$ such that every n by n matrix containing at least $k_j(n)$ elements 0 possesses

a minor of order j consisting exclusively of 0's ($2 \leq j \leq n$). Improving a result of S. Hartman, J. Mycielski and C. Ryll-Nardzewski the authors show that $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_2(n) \cdot n^{-3/2}) = 1$ and, for every j ,

$$k_j(n) < 1 + jn + [(j-1)^j n^{(2j-1)/j}].$$

The paper contains also a graph-theoretical interpretation of these results.

T. Szele.

Piza, P. A.: Fermat coefficients. Math. Mag. **27**, 141—146 (1954).

Dans un précédent article (ce Zbl. **38**, 7) les „coefficients de Fermat“ avaient été définis comme les nombres: $[n:c] = 2^{c-1} \binom{2n-c}{c-1} / c$. L'A. remplace cette définition par la suivante: $(n:c) = [n:c] / 2^{c-1}$. Il rectifie et complète les résultats de son premier travail et donne la table des coefficients de Fermat pour $n, c = 1, 2, \dots, 17$.

A. Sade.

Fjeldstad, Jonas Ekman: A generalization of Dixon's formula. Math. Scand. **2**, 46—48 (1954).

$$\sum_{s=0}^{2m} (-1)^s \binom{2m}{s} \binom{2n}{n-m+s} \binom{2p}{p-m+s} = (-1)^m \frac{(m+n+p)! (2m)! (2n)! (2p)!}{(m+n)! (m+p)! (n+p)! m! n! p!}$$

Für $m = n = p$ ergibt sich die Formel von Dixon [Messenger Math. **20**, 79—80 (1891)].

Reichman, Raphael I.: A summation formula involving Fibonacci numbers. Scripta math. **20**, 111—112 (1954).

Gould, H. W.: A note on a paper of Grosswald. Amer. math. Monthly **61**, 251—253 (1954).

Bezieht sich auf die Arbeit „On sums involving binominal coefficients“ von Emil Grosswald in ders. Zs. **60**, 179—181 (1953).

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

García Pradillo, Julio: Über Eigenschaften und Anwendungen der Permanenten. Gac. mat., Madrid **6**, 8—14 (1954) [Spanisch].

Unter der Permanente einer quadratischen Matrix (a_{ik}) wird die Summe $\sum a_{1k_1} \cdots a_{nk_n}$ über alle Permutationen (k_1, \dots, k_n) verstanden; also eine determinantenähnliche Bildung ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der Permutationen. Zusammenstellung einfacher Eigenschaften und Beispiele. *H.-J. Kowalsky.*

Brenner, J. L.: Une borne pour un déterminant avec diagonale majorante. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 555—556 (1954).

Verf. zeigt, daß der Betrag einer n -reihigen Determinante $\det(a_{ij})$ mit $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} a_{kj}$ ($k = 1, \dots, n$) nach unten abgeschätzt werden kann durch

$$|\det(a_{ij})| \geq |a_{11}| \prod_{k=2}^n (|a_{kk}| - m_k + p_k); \text{ hierbei ist } m_k = \sum_{j < k} |a_{kj}|, p_k = q_k + \frac{|a_{k1}|}{|a_{11}|} \sum_{j > k} |a_{1j}|,$$

$$q_k = \sum_{p=2}^{k-1} \left| \begin{matrix} 1, \dots, p-1, k \\ 1, \dots, p-1, p \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} (1, \dots, p-1) \\ (1, \dots, p-1) \end{matrix} \right|^{-1} \sum_{j > k} \left| \begin{matrix} (1, \dots, p-1, p) \\ (1, \dots, p-1, j) \end{matrix} \right| \text{ und } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

jeweils derjenige Minor, der aus den Zeilen α und den Spalten β von (a_{ij}) gebildet wird. Auf die Verwandtschaft mit Resultaten von Price [Proc. Amer. math. Soc. **2**, 497—502 (1951)], Ostrowski (dies. Zbl. **46**, 12) und Haynsworth (dies. Zbl. **50**, 249) wird hingewiesen. *H. Bilharz.*

Mitchell, B. E.: Unitary transformations. Canadian J. Math. **6**, 69—72 (1954).

Jede Matrix A wird durch unitäre Transformation in die trianguläre Form übergeführt, deren diagonale Bestandteile A_1, \dots, A_k bzw. zu den Bestandteilen C_1, \dots, C_k in der bekannten Jordanschen Normalform ähnlich sind. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Beweis, daß A_1, \dots, A_k wesentlich eindeutig sind, wenn A „non-derogatory“ ist, d. h. wenn das Minimalpolynom von A mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt.

K. Shoda.

Eaves, J. C.: A note on sets of matrices simultaneously reducible to the triangular skeleton. *J. Math. Physics* 32, 302—306 (1954).

Eine (nicht notwendig quadratische) Matrix $(b_{\mu\nu})$ heiße eine (spezielle) Dreiecksmatrix, wenn $b_{\mu\nu} = 0$ ist für $\mu > \nu$ (bzw. für $\mu \geq \nu$). Verf. zeigt: Sind n_1, \dots, n_k natürliche Zahlen, $\sum n_k = n$, so kann man die Gesamtheit der $n \times n$ -Dreiecksmatrizen durch eine geeignete Permutation der Zeilen und gleichlautende Permutation der Spalten in die Gesamtheit der Matrizen von der Gestalt $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{kk} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$ überführen; hierin bedeutet jede Teilmatrix $A_{\varrho\sigma}$ eine $n_\varrho \times n_\sigma$ -Dreiecksmatrix, die für $\varrho > \sigma$ überdies speziell ist.

H. Wielandt.

Egervry, E.: On a lemma of Stieltjes on matrices. *Acta Sci. math.* 15, 99—103 (1954).

In einer reellen $n \times n$ -Matrix A seien alle n Abschnittsdeterminanten positiv, alle Elemente außerhalb der Diagonale seien nichtpositiv, und jede Spalte der über der Diagonale stehenden Dreiecksmatrix sowie jede Zeile der unter der Diagonale stehenden Dreiecksmatrix enthalte mindestens ein negatives Element. Dann sind alle Elemente der inversen Matrix A^{-1} positiv.

H. Wielandt.

Parker, W. V.: Matrices and polynomials. *Amer. math. Monthly* 61, 182—183 (1954).

Es sei A die Begleitmatrix des Polynoms $f = a_0 + a_1 x + \dots + x^n$; es sei $g = g(x)$ ein beliebiges Polynom, d der größte gemeinsame Teiler von f und g ; der Rang der Matrix $g(A)$ sei r . Dann sind die ersten r Zeilen von $g(A)$ linear unabhängig, es ist $\text{Grad } d = n - r$ und

$$f/d = q_0 + \dots + q_{r-1} x^{r-1} + x^r, \quad (q_0 \dots q_{r-1} \ 1 \ 0 \dots 0) g(A) = 0.$$

Ist B eine weitere n -reihige Begleitmatrix und $AX = XB$, so läßt sich X als Polynom in B darstellen.

H. Wielandt.

Parker, W. V. and W. A. Rutledge: Equivalence of matrices over a polynomial domain. *J. London math. Soc.* 29, 172—177 (1954).

A general lemma concerning the subject mentioned in the title is proved. The theorem of H. Flanders (this Zbl. 44, 6) on elementary divisors of AB and BA is proved by reducing $AB - xE$ to a canonical form $P(AB - xE)Q$. *J. L. Brenner.*

Roth, William E.: On the characteristic polynomial of the product of two matrices. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 1—3 (1954).

The characteristic polynomials of two $n \times n$ matrices A and B may be written in the forms $a_0(x^2) - x a_1(x^2)$ and $b_0(x^2) - x b_1(x^2)$. The author shows that when the rank of $A - B$ is at most unity the characteristic polynomial of AB is $(-1)^n [a_0(x) b_0(x) - x a_1(x) b_1(x)]$.

F. W. Ponting.

Gouarn, René et Isaac Samuel: Matrices complexes  polynomes caractéristiques indépendant des arguments des lments. Applications  ltude des propriétés magnétiques de quelques hydrocarbures conjugues. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 808—809 (1954).

Sufficient conditions are established for a complex matrix to have the same characteristic polynomial as the matrix of the moduli of its elements. The number of conditions is small enough for easy verification.

J. Jacobs.

Herstein, I. N.: A note on primitive matrices. *Amer. math. Monthly* 61, 18—20 (1954).

Beweis des folgenden Satzes von Frobenius: Besitzt eine unzerlegbare, nicht negative Matrix A nur einen Eigenwert von maximalem Betrage, so ist eine geeignete Potenz von A positiv.

H. Wielandt.

Horn, Alfred: On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 4—7 (1954).

Zwischen den singulären Werten $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ einer komplexen $n \times n$ -Matrix A (definiert als die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten von $\bar{A}'A$) und den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A (die im folgenden nach fallenden Beträgen geordnet angenommen vorausgesetzt werden) bestehen nach H. Weyl die $n-1$ Ungleichungen $|\lambda_1 \dots \lambda_k| \leq \sigma_1 \dots \sigma_k$ ($1 \leq k \leq n-1$). Verf. zeigt, daß dies neben der trivialen Gleichung $|\lambda_1 \dots \lambda_n| = \sigma_1 \dots \sigma_n$ die einzigen Einschränkungen sind, denen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bei vorgeschriebenen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ zu genügen haben. Eine verwandte Bedingung ist dafür notwendig und hinreichend, daß es eine hermitesche Matrix mit vorgeschriebenen Eigenwerten und vorgeschriebenen Abschnittsdeterminanten gibt. H. Wielandt.

Sinden, Frank William: Ein Oszillationsgesetz für algebraische Eigenwertprobleme. Z. angew. Math. Phys. 5, 86–88 (1954).

Eine reelle $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ik})$ heißt nach Schoenberg [Math. Z. 32, 321–328 (1930)] variationsmindernd, wenn jede Spalte \mathfrak{x} mindestens so viele Zeichenwechsel enthält wie $A\mathfrak{x}$. Verf. spricht ohne Beweis die folgenden Sätze aus: Ist A variationsmindernd, symmetrisch, positiv definit und ist stets $a_{i+i+1} \neq 0$, so lassen sich die Eigenwerte von A in eine Reihe $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0$ anordnen, und der zu α_k gehörige Eigenvektor hat genau $n-k$ Zeichenwechsel. Ferner ist $\min q_i \leq \alpha_k \leq \max q_i$, wenn (u_i) eine beliebige Spalte mit genau $n-k$ Zeichenwechseln bedeutet, für deren Bildspalte $A(u_i) = (v_i)$ alle Quotienten $q_i = v_i/u_i$ positiv sind. H. Wielandt.

Varga, Richard S.: Eigenvalues of circulant matrices. Pacific J. Math. 4, 151–160 (1954).

Die Eigenwerte einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ik})$ mit der Eigenschaft $a_{i+p, k-p} = a_{ik}$, worin die Indizes mod n zu nehmen sind, lassen sich mit Hilfe der Bemerkung berechnen, daß A durch Ähnlichkeitstransformation mit der aus einer primitiven n -ten Einheitswurzel ω gebildeten Matrix (ω^{ik}) in Teilmatrizen der Grade 1 und 2 zerfällt wird. Auf diesem Wege stellt der Verf. die n Eigenwerte der bei gewissen numerischen Verfahren zur konformen Abbildung einer Ellipse auftretenden Matrix

$$A = a b/\pi n [(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos(2\pi(i+k)/n)] \quad (a > b > 0)$$

durch endliche Summen dar, deren Abweichung von ihren Grenzwerten für $n \rightarrow \infty$ abgeschätzt wird. [Bem.: Die genannten Summen lassen sich durch eine Residuerechnung geschlossen aufsummieren. Das Ergebnis steht bei H. Wielandt, Nat. Bur. Standards Report Nr. 2831 (1953), Formel 91]. H. Wielandt.

Taussky, Olga: Characteristic roots of quaternion matrices. Arch. der Math. 5, 99–101 (1954).

Verf. überträgt die folgenden aus der Eigenwerttheorie der komplexen $n \times n$ -Matrizen geläufigen Tatsachen auf $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus dem Körper Q der reellen Quaternionen, wobei die Eigenwerte λ von A durch die Existenz von Vektoren $x \neq 0$ mit $Ax = x\lambda$ charakterisiert sind. (1) Besitzt die transponierte und konjugierte Matrix \bar{A}' den Eigenvektor y zum Eigenwert μ , so gilt $\bar{\lambda} \bar{x}' y = \bar{x}' y \mu$. (2) Ist $A = \bar{A}'$, so ist jeder Eigenwert von A reell. (3) Der Wertevorrat von A (definiert als die Gesamtheit der Quaternionen der Form $\bar{x}' Ax$ mit $\bar{x}' x = 1$) ist abgeschlossen und beschränkt, invariant gegenüber den inneren Automorphismen von Q , sowie gegenüber allen Ähnlichkeitstransformationen von A mit Matrizen S der Form $S = \bar{S}'^{-1}$, und enthält alle Eigenwerte von A . H. Wielandt.

Hoffman, Alan J. and Olga Taussky: A characterization of normal matrices. J. Res. nat. Bur. Standards 52, 17–19 (1954).

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Eigenwerte einer komplexen $n \times n$ -Matrix A . Mit Hilfe fest vorgegebener komplexer Koeffizienten bilde man

$$B = f(A, A^*) = a_1 A + a_2 A^* + b_1 A^2 + b_2 A^{*2} + c_1 A A^* + c_2 A^* A.$$

Bekanntlich hat B , falls A normal ist, die Eigenwerte $f(x_i, x_i)$. In der umgekehrten Richtung beweisen die Verf.: Wenn es eine Permutation P der Zahlen $1, \dots, n$ derart gibt, daß B die Eigenwerte $f(x_i, x_{Pi})$ besitzt, und wenn mindestens eine der drei Bedingungen (I) $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$, $a_1 a_2 \neq 0$; (II) $c_1 + c_2 = 0$; (III) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_1$, $c_2 = c_2$, $c_1 c_2 \neq 0$ erfüllt ist, so ist A normal.

H. Wielandt.

Bellman, Richard and Alan Hoffman: On a theorem of Ostrowski and Taussky. Arch. der Math. 5, 123—127 (1954).

New proofs are given for and relations pointed out between various theorems in matrix theory. Some of the theorems are the following. 1° Let B, C be hermitian; B positive definite. Then the relation $\det(B + iC) \neq \det B$ holds (A. M. Ostrowski and O. Taussky, this Zbl. 43, 252). 2° If in addition B, C are real, then the relation

$$\pi^{n/2} = |\det(B + iC)|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^*(B+iC)x} dx$$

holds, where $\det(B + iC)^{1/2}$ is the product of the principal square roots of the eigenvalues $q^k - i\sigma^k$ of $B - iC$, and $q^k > 0$. 3° If D_k, D_{n-k} are disjoint principal minors of C of dimensions indicated by the subscripts, C real, $C = C^* > 0$, then $(\det D_k)(\det D_{n-k}) \leq \det C$. 4° A theorem of K. Fan concerning eigenvalues of a hermitian matrix [Problem 4429, Amer. math. Monthly 60, 174 (1953)]. J. L. Brenner.

Wong, Y. K.: On non-negative-valued matrices. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 121—124 (1954).

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \geq 0$ und den Spaltensummen $\sum_i a_{ij} = 1$. Dann ist jede der drei folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß $I - A$ nichtsingulär ist, daß also alle Eigenwerte von A im Innern des Einheitskreises liegen. (a) In A^n ist jede Spaltensumme < 1 . (b) Durch geeignete Permutation der Zeilen und dieselbe Permutation der Spalten läßt sich A in eine Matrix (b_{ij}) überführen, die den n Bedingungen $\sum_{i=1}^n b_{ij} < 1$ genügt. (c) Im selben Sinn

ist A äquivalent einer Matrix (c_{ik}) mit der Eigenschaft $c_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(c_{ik} \sum_{m=1}^k c_{mi} \right) < 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Verf. verfeinert diese Ergebnisse noch durch Angabe oberer und unterer Schranken für die Elemente von $y(I - A)^{-1}$, worin y eine beliebige vorgegebene Zeile mit nicht negativen Elementen bedeutet.

H. Wielandt.

Takeno, Hyōtirō: A theorem concerning the characteristic equation of the matrix of a tensor of the second order. Tensor, n. Ser. 3, 119—122 (1954).

Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung $\lambda^n + \dots = \det[\lambda E - A] = 0$ einer Matrix A sind ganze rationale Funktionen der Spuren von A, A^2, \dots, A^n . Diese längst bekannte Tatsache folgt unmittelbar aus den Newtonschen Gleichungen der elementaren Algebra, worauf Verf. neuerdings hinweist. R. W. Weitzenböck.

Wielandt, Helmut: Einschließung von Eigenwerten Hermitescher Matrizen nach dem Abschnittsverfahren. Arch. der Math. 5, 108—114 (1954).

Es werden Fehlerschranken für die Approximation von Eigenwerten einer Hermiteschen Matrix $L = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ durch die Eigenwerte des Abschnittes A bestimmt. Es mögen die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix, etwa M , mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden; und zwar mögen μ_p bzw. μ_{-p} ($p = 1, 2, 3, \dots$) die positiven bzw. negativen Eigenwerte, entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, durch abzählbar viele Nullen ergänzt und in $\mu_{+1}, 0, \mu_{-1}, \dots$ geordnet sein; es sei $\|M\| = \max(\mu_1, |\mu_{-1}|) = \max(|Mx|/|x|)$. Bekannt sind für das behandelte Problem bisher allein Schranken, die die Größe der Restmatrix $D = \begin{pmatrix} O & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ linear enthalten, so etwa $0 \leq \alpha_k \leq \lambda_k^+$ ($k = 1, 1, 2, \dots$) und $|\lambda_k - \alpha_k| \leq \|D\|$, aus der Ungleichung von Weyl ($M = N + R \hookrightarrow \mu_k \leq \nu_k + \rho_1$) folgend, oder für positiv semi-

definites L (Aronszajn) $\lambda_p \leq \alpha_p + \gamma_1$. Verf. gibt hier erstmals Abschätzungen, die D quadratisch enthalten: 1. $\sum |\lambda_k^2 - \alpha_k^2| = \text{Spur } D^2$ 2. $0 \leq \lambda_k^2 - \alpha_k^2 \leq \|B^* B\| + \|B B^* + C^2\| \leq 2 \|D\|^2$. Zum Beweise von 2. werden die Ungleichungen von Aronszajn und Weyl verwandt. 1. liefert in der Ausdehnung auf vollstetige hermitesche Operatoren im speziellen Hilbertschen Räume, insbesondere auf Integralgleichungen mit quadratisch integrierbarem, hermiteschem Kern eine Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren. *F. W. Schäfke.*

Schneider, Hans: Regions of exclusion for the latent roots of a matrix. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 320—322 (1954).

Es sei $A = (a_{ij})$ eine komplexe $n \times n$ -Matrix, λ ein Eigenwert von A , $[\mu(1), \dots, \mu(n)]$ eine Permutation von $[1, \dots, n]$. Gibt es zu λ m linear unabhängige Eigenvektoren, so gehört λ mindestens m der folgenden n Kreisbereiche an: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, wenn $i = \mu(i)$; $|\lambda - a_{ii}| \geq |a_{i\mu(i)}| - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq \mu(i)}} |a_{ij}|$, wenn $i \neq \mu(i)$.

H. Wielandt.

Bartsch, Helmut: Abschätzungen für die kleinste charakteristische Zahl einer positiv-definiten hermiteschen Matrix. Z. angew. Math. Mech. **34**, 72—74 (1954).

$A = (a_{ij})$ sei eine n -reihige quadratische positiv definite hermitesche Matrix mit den charakteristischen Zahlen λ_i mit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Verf. verschärft Abschätzungen von Wittmeyer und vom Ref. Bei den Abschätzungen werden die Größen $a = \det A$, die Spur S_A von A , die Spur S_B von $B = A^{-1}A$, ferner $\varrho_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}$ und $\varrho_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ verwendet. Die beste Abschätzung, die bei Verwendung von a und S_A (bzw. von a und S_B) möglich ist, ist $\lambda_1 \geq \kappa$, wobei κ die kleinere positive Wurzel von $\kappa = a [(n-1)/(S_A - \kappa)]^{n-1}$ (bzw. einer entsprechenden Gleichung) ist. Es werden weitere Abschätzungen abgeleitet und miteinander verglichen, z. B. ist $\lambda_1 \geq a(n-1)(n-2)^{n-2} S_A^{n-3} / (S_A^2 - S_B)^{n-2}$ und für $\varrho_B \geq S_B/(n-1)$ gilt $\lambda_1 \geq (a/\sqrt{\varrho_B}) [(n-2)/(S_B - \varrho_B)]^{(n-2)/2}$.

L. Collatz.

Thurston, H. S. and Mary K. Alexander: The equation $X^2 + PX + Q = 0$ in binary matrices. Amer. math. Monthly **61**, 8—17 (1954).

Eine Theorie der im Titel genannten Matrixgleichung stammt schon von Sylvester. Im allgemeinen gibt es sechs Lösungen. Falls das absolute Glied einer gewissen kubischen Gleichung verschwindet, können auch weniger Lösungen existieren.

R. Kochendörffer.

Jones, Burton W. and Donald Marsh: Automorphs of quadratic forms. Duke math. J. **21**, 179—193 (1954).

Sei F die Matrix einer nicht singulären quadratischen Form in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper der Charakteristik $\neq 2$. Ein Automorphismus der Form ist eine n -reihige Matrix T , welche der Gleichung $\dot{T} F T = F$ genügt. $(T - T^{-1}) F^{-1} = R$ ist schiefsymmetrisch: $\dot{R} = -R$. T läßt sich dann und nur dann als ein Polynom in $L = R F$ schreiben, wenn die charakteristischen Wurzeln τ_1, \dots, τ_n der Matrix T die Eigenschaft haben, daß $\tau_i \tau_j \neq -1$ für alle Paare $i \neq j$ ist. Unter dieser Bedingung kann man aber auch $T = t(L) t(L)^{-1}$ mit einem geeigneten Polynom $t(x)$ schreiben (Verallgemeinerung der Parameterdarstellung von Cayley). Auf diese Weise läßt sich eine Darstellung der ganzzahligen Automorphismen einer indefiniten ternären quadratischen Form mit rationalen Koeffizienten angeben. — In Verallgemeinerung eines Satzes von I. S. Sominskij (dies. Zbl. **31**, 106) beweisen Verff.: Hat ein Automorphismus T die Eigenschaft $\text{Rang}(T - 1_n) + \text{Rang}(T + 1_n) = n$, so ist $T^2 = 1_n$ und es gibt eine Matrix U vom Format $n \times r$ ($r = \text{Rang}(T - 1_n)$), so daß $\dot{U} F U \neq 0$ und $T = 1_n - 2 U (\dot{U} F U)^{-1} \dot{U} F$ ist.

M. Eichler.

Lewis, D. J.: Singular quartic forms. Duke math. J. **21**, 39—44 (1954).

A homogeneous polynomial $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of degree m over a field k is called „singular“ if all its zeros (a_1, a_2, \dots, a_n) in k are also zeros of all its first partial derivatives. When k is a finite field the author uses elementary methods to obtain all singular forms for $m = 2, 3$, whilst for $m = 4$ similar results are

obtained with the aid of an extension of a theorem of Carlitz's. The result for $m = 4$ is proved only for $k = GF(q)$ where q is odd and exceeds a certain minimum, and is dis-proved for $q = 5$.

M. C. R. Butler.

Carlitz, L.: Representations by quadratic forms in a finite field. *Duke math. J.* **21**, 123—137 (1954).

Let A, B be symmetric matrices of orders m, t respectively with elements in a finite field $GF(q)$ (q odd). The author determines the number $N_t(A, B)$ of $m \times t$ matrices X for which $X'AX = B$. If A is non-singular and B has rank r the problem is effectively reduced (§ 6) to the determination of $N_r(A, B)$ and $N_r(A, 0)$. In § 3, $N_r(A, B)$ is found by induction on $r, r = 1$ to being the familiar problem of finding the number of solutions $x' = (x_1, \dots, x_m)$ in $GF(q)$ of $x'Ax = \beta$. The particular case $B = A$ yields the number of automorphs of A . — Let C be symmetric, of order m , rank r ; let δ be the product of the non-vanishing characteristic roots of C , and let $\psi(\delta) = 1$ or -1 according to whether or not δ is a square or non-square in $GF(q)$. The number $N(m, r, \psi(\delta))$ of matrices C with given $m, r, \psi(\delta)$ is obtained in § 4 from a known formula for the number of non-singular square matrices of order m . In § 5, a „Gauss Sum“ $G(A)$ for the matrix A (defined in § 2 by means of the associated quadratic form $x'Ax$) is used to find $N_r(A, 0)$ in terms of the $N(t, r, \psi(\delta))$; finally, $N_r(A, 0)$ is expressed by means of certain terminating q -hypergeometric series. In § 8 a relation is established between the $N_t(A, B)$ and the number of representations of a polynomial by sums of squares in $GF[q, x]$, a problem considered in recent papers by the author and others.

M. C. R. Butler.

• **MacDuffee, C. C.:** Theory of equations. New York: John Wiley and Sons 1954. VII, 120 p. \$ 3,75.

Das Buch soll zwei Gruppen von Studenten dienen: den angehenden Mathematikern und Nichtmathematikern, die in ihrem Fach etwas Mathematik brauchen. Dementsprechend behandelt es von der Lehre von den algebraischen Gleichungen das, was ohne Gruppentheorie gebracht werden kann: Auffindung der rationalen und ganzrationalen Lösungen, Eingrenzung der Wurzeln, einschließlich Satz von Sturm, Numerische Lösung mit Näherungsmethoden, Lösung von $x^n = a$, der Gleichungen dritten und vierten Grades, Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium, Lösung eines Systems zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten mittels x -Resultante, Resultante, Diskriminante (ohne Determinantendarstellung), Hauptsatz über symmetrische Funktionen und Newtonsche Formeln, Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen, Allgemeine Lösung linearer Gleichungssysteme ohne Determinanten. Stets werden Zahlenbeispiele gebracht und genügend Aufgaben zur Einübung gestellt. Dazwischen werden dem Leser die Grundbegriffe der abstrakten Algebra vermittelt und die Lehre von den Polynomen ausführlich behandelt und bis zum Satz getrieben, daß die Polynome über einem Ring mit eindeutiger Faktorzerlegung wieder einen solchen bilden. Das Buch wird seinen Zweck zweifellos erfüllen.

G. Lochs.

Stein, S.: The fundamental theorem of algebra. *Amer. math. Monthly* **61**, 109 (1954).

The purpose of this note is to present a simple topological proof of the Fundamental Theorem of Algebra. This proof differs from that of Eilenberg and Niven [*Bull. Amer. math. Soc.* **50**, 246—248 (1944)] in that all constructions are carried out within the complex plane.

Autoreferat.

Abhyankar, S. S.: Note on positive polynomials. *Amer. math. Monthly* **61**, 184—187 (1954).

Unter einem positiven Polynom werde ein solches verstanden, das positive Koeffizienten aus einem vorgegebenen geordneten Körper besitzt. Angeregt durch eine Fragestellung über elektrische Netzwerke, beweist Verf.: Jedes positive Polynom n -ten Grades läßt sich als Summe von höchstens $[n/2] + 1$ positiven Polynomen mit lauter negativen Nullstellen darstellen; andererseits gibt es zu jeder natürlichen Zahl n ein positives Polynom n -ten Grades, das nicht Summe von weniger als $[n/2] + 1$ positiven Polynomen mit lauter negativen Nullstellen ist.

A. Stöhr.

Rédei, Ladislaus: Über das Kreisteilungspolynom. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 27—28 und russ. Zusammenfassg. 28 (1954).

The principal ideal generated by the n -th cyclotomic polynomial $F_n(x)$ in the polynomial ring over the integers may be generated by all polynomials $F_p(x^{n/p})$ where p divides n . This theorem was given and used by the author (this *Zbl.* **41**, 157), but the proof was erroneous. N. G. de Bruijn pointed this out, and supplied a proof (this *Zbl.* **51**, 258). The author now gives a different short proof.

Hanna Neumann.

Bonsall, F. F. and Morris Marden: Critical points of rational functions with self-inversive polynomial factors. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 111—114 (1954).

Pour une fonction rationnelle f d'une variable complexe soient $\Re(f, E)$ et $\Im(f, E)$ respectivement le nombre des zéros et celui des poles distincts de f dans le domain fini E du plan de Gauss. On a le théorème: Soit $\Phi = k/K$ une fonction rationnelle, le degré de k étant plus grand que celui de K . Soit d'autre part $k = fg$ et $K = FG$, où f, g, F, G sont des polynomes, f et F ayant ses zéros symétriques par rapport à $|z| = 1$, et g et G tels que $\Re(g, |z| > 1) = \Re(G, |z| < 1) = 0$. On a alors $\Re(\Phi', |z| > 1) = \Re(\Phi, |z| > 1) + \Im(\Phi, |z| < 1)$. De ce théorème sont des cas particuliers d'autres bien connus (Cohn, Lucas, Walsh) de la théorie analytique des polynomes.

G. Ancochea.

Parodi, Maurice: Sur les polynomes d'Hurwitz. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1466—1467 (1954).

Verf. gibt eine Lösung folgenden Problems: $f(x)$ sei ein Hurwitzsches Polynom n -ten Grades mit positiven Koeffizienten, $g(x)$ ein Polynom höchstens n -ten Grades mit reellen Koeffizienten. Gesucht ist eine positive reelle Zahl d , so daß $f(x) + \lambda g(x)$ für jedes reelle λ mit $|\lambda| < d$ ein Hurwitzsches Polynom wird. Dazu wird ein Satz von Ostrowski über den höchsten Betrag der Veränderungen verwendet, die man an den Elementen einer regulären Matrix vornehmen darf, wenn sie regulär bleiben soll (dies. Zbl. **16**, 3).

E. Schönhardt.

Turán, P.: Hermite-expansion and strips for zeros of polynomials. Arch. der Math. **5**, 148—152 (1954).

Ein Polynom n -ten Grades $f(z)$ sei nach Hermiteschen Polynomen entwickelt: $f(z) = \sum_{m=0}^n b_m H_m(z)$. Sämtliche Nullstellen von $f(z)$ liegen in den Streifen ($z = x + iy$ gesetzt):

$$|y| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|b_n|} \cdot \max_{0 \leq m \leq n-1} |b_m| \right), \quad |y| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{b_n} \right|.$$

diese Abschätzungen sind in gewissem Sinne scharf. Hiermit ist ein Teil der Ergebnisse bewiesen, die Verf. früher (dies. Zbl. **48**, 252) skizziert hatte.

H. Tietz.

Gruppentheorie:

McLean, David: Idempotent semigroups. Amer. math. Monthly **61**, 110—113, (1954).

Setzt man in einer idempotenten Halbgruppe H : $a P b$, wenn $a b a = a$ und $b a b = b$, so ist P eine Äquivalenzrelation in H . Jede Äquivalenzklasse ist eine antikommutative Halbgruppe, d. h. $a b = b a \rightarrow a = b$ für $a P b$. Das P -Bild von H ist eine kommutative Halbgruppe H_P . Außerdem ist jedes kommutative homomorphe Bild von H auch homomorph zu H_P . Diesen Sachverhalt entwickelt Verf. zu einem Beweis der Endlichkeit jeder endlich-erzeugbaren idempotenten Halbgruppe.

P. Lorenzen.

Chaleзов, E. A.: Die Automorphismen von Halbgruppen von Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 245—248 (1954) [Russisch].

Verf. bezeichnet mit F_n^r ($1 \leq r \leq n$) die multiplikative Halbgruppe aller n -reihigen quadratischen Matrizen über einem Körper F , deren Rangzahlen $\leq r$ sind, wendet Eigenschaften der Normalformen nil- und idempotenter Matrizen an und beweist auf Umwegen den Satz: Jeder Automorphismus θ von F_n^r ($n \geq 2$) hat die Form (1) $\|x_{ij}\|^{\theta} = S \|x_{ij}^{\varphi}\| S^{-1}$, wo S eine feste reguläre Matrix aus F_n ($= F_n^r$) und φ ein Automorphismus des Körpers F ist. — Ref. führt einen kürzeren Beweis dieses Satzes an: Die Matrix $E_{ij} = F_n$ enthalte eine Eins im Schnittpunkt der i -ten Zeile und j -ten Spalte und sonst nur Nullen. 1. Schritt. Ist φ ein Automorphismus von F_n^r mit $E_{ij}^{\varphi} = E_{ij}$, ($i, j = 1, \dots, n \geq 2$), so ergibt $E_{1i} \|x_{kl}\| E_{j1} = x_{ij} E_{11}$, daß φ einen gleich-bezeichneten Automorphismus von F hervorruft, und es wird $\|x_{ij}\|^{\varphi} = \|x_{ij}^{\varphi}\|$ für $\|x_{ij}\| \in F_n^r$.

2. Schritt. Das Gleichungssystem $E'_{ij} E'_{kl} = e_{jk} E'_{il}$, ($e_{jk} = 1$ (für $j = k$), $= 0$ (für $j \neq k$); $i, j, k, l = 1, \dots, n$) für n^2 Matrizen $E'_{ij} \in F_n$ hat außer der trivialen nur die Lösung $E'_{ij} = S E_{ij} S^{-1}$, wo S irgendeine feste reguläre Matrix aus F_n ist. 3. Schritt. Wegen $E'_{ij} E'_{kl} = e_{jk} E'_{il}$, existiert $S \in F_n$ mit $E'_{ij} = S E_{ij} S^{-1}$. Sei $S = \|s_{ij}\|$, $S^{-1} = \|s_{ij}^{-1}\|$, so ist $E'_{ij} S^{-1} = E_{ij}$, also gilt (1) mit $q = \theta S^{-1}$. — Ref. bemerkte im Anschluß an Formel (4) des Verf. ein Versehen, daß nämlich $R = \|r_{ij}\|$ nicht immer, sondern nur dann auf die Form $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$, $x \neq 0, z \neq 0$ gebracht werden kann, wenn $r_{11} \neq 0$. Erst die nachfolgende Formel ergibt $r_{11}^{-1} |R| = 1$, also tatsächlich $r_{11} \neq 0$.
H.-J. Hoehnke.

Tamari, Dov: Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev. Bull. Soc. math. France **82**, 53—96 (1954).

The necessary and sufficient conditions of Mal'cev (this Zbl. **22**, 311) for the embeddability of a cancellation semigroup in a group, and the sufficient conditions of Ore (this Zbl. **1**, 266) and Doss (this Zbl. **33**, 147) are generalized simultaneously in two directions, namely (i) by considering certain partial cancellation semigroups and their embeddings in certain partial groups, and (ii) by imposing a quasi-order on the systems considered. The partial groups („groupoides“) that occur possess to every element a an „inverse“ a' satisfying $(aa')a = a(a'a) = a$; Brandt groupoids are special examples of such „groupoides“. A „groupoïde préordonné“ is a partial group such that if $a \leq b$ and $c \leq d$ in the quasi-order, then the products ac and bd are both defined and $ac \leq bd$, or ac and bd are both undefined. The quasi-order is put to various uses, especially in refining the notion of equality of formal words and of finite chains of words formed from the system whose embeddability is under investigation, with formal inverses adjoined. The arguments are associated with geometrical models somewhat like those introduced by Lambek (this Zbl. **42**, 17). There is a wealth of new terminology in the paper, largely peculiar to the author. Thus e. g. „monoïde“ is used for an algebraic system with a partial binary operation (i. e. a partial groupoid), whereas Bourbaki uses the same term to denote an algebraic system with an associative operation everywhere defined (i. e. a semigroup). Two appendices sketch further developments of the theory; „prototypes“ are there defined with a view to classifying the non-embeddable systems. There is an extensive bibliography up to 1951.

B. H. Neumann.

Pierce, R. S.: Homomorphisms of semi-groups. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 287—291 (1954).

In a semi-group S (closed for an associative multiplication) an ideal I (IS and SI are contained in I) determines a congruence: $a \sim b$ if and only if $\{(c, d) \mid cad \in I\} = \{(c, d) \mid c b d \in I\}$. If the ideal is „inclusive“, that is contains a if cad is in it for all (c, d) , then S/I is a disjunctive semi-group (a s. g. with a zero 0 in which to any two distinct elements a, b one can find elements c, d such that one of $cad, c b d$ is zero but not the other); and conversely when h is a homomorphism of a s. g. on a disjunctive s. g. S , then $h^{-1}(0)$ is an inclusive ideal I of S , and S/I is isomorphic to S by the mapping $[a] \rightarrow h(a)$. This main result is followed by an analogue of the third isomorphism theorem. In the case of a commutative semi-group in which all elements are idempotent, that is in a semi-lattice, there is also an analogue of the second isomorphism theorem; and when a commutative s. g. S is semi-simple with respect to an ideal I (that is I contains a power of an element of S only when it contains the element) the ideal is inclusive, and S/I is a semi-lattice. For a distributive lattice L (with zero), considered as a multiplicative semi-lattice, any lattice ideal I determines as above a homomorphism h_I of L on L/I which is also a lattice homomorphism. If I is the inverse image of 0 under any lattice homomorphism h of L , then $h_I \geq h \geq h'_I$, the last being the homomorphism of L on the lattice of congruence classes of the form $(I \vee a)$ defined by the mapping $a \mapsto (I \vee a)$. [$h \leq g$, for two homomorphisms of L , if $h(a) \leq g(b)$ implies $g(a) = g(b)$ for all a, b from L .] It is then shown that all homomorphisms of L are disjunctive if, and only if, L is a Boolean ring.

V. S. Krishnan.

Clifford, A. H.: Naturally totally ordered commutative semi-groups. Amer. J. Math. **76**, 631—646 (1954).

Eine kommutative Halbgruppe S , d. h. eine Menge mit einer assoziativen und kommutativen Verknüpfung, heiße natürlich geordnet, wenn für zwei verschiedene Elemente $a, b \in S$ genau einer der beiden folgenden Fälle vorliegt: 1. Es existiert ein $x \in S$ mit $ax = b$. 2. Es existiert ein $y \in S$ mit $by = a$. Im ersten Fall sei $a < b$. Hierdurch ist S vollständig geordnet. Es wird die Struktur solcher Halbgruppen (n. g. H.) untersucht. Sei eine Menge von n. g. H. S_α gegeben, wobei α die vollständig geordnete Menge I durchläuft. In $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ werde eine Verknüpfung erklärt, die für $a, b \in S_\alpha$ mit der Verknüpfung in S_α übereinstimmen soll, für $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, durch $ab = b$ gegeben sei. $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ werde dann als Ordinalsumme

von $\{S_\alpha; \alpha \in J\}$ bezeichnet. Eine n. g. H. heiße irreduzibel, wenn sie nicht die Ordinalsumme von mehr als einer Unterhalbgruppe ist. Die Untersuchung der n. g. H. wird auf die der irreduziblen zurückgeführt durch den Satz: Jede n. g. H. läßt sich eindeutig als Ordinalsumme einer Menge irreduzibler Unterhalbgruppen darstellen. Anschließend wird eine spezielle Klasse irreduzibler n. g. H. behandelt, bei denen zu jedem Element a ein natürliches n mit $a^{n+1} = a^n$ existiert. Diese „Segmente“ können auch charakterisiert werden als archimedische n. g. H., in denen die Kürzungsregel nicht gilt, oder als n. g. H. mit einem Nullelement, deren sämtliche Elemente nilpotent sind. Besitzt ein Segment S ein kleinstes Element (diskretes Segment), so ist es eine endliche zyklische Halbgruppe. Ist dies nicht der Fall, so gilt für S folgender Satz: Sei P die n. g. H. der positiven reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, $[1]$ bzw. (1) das aus allen reellen Zahlen ≤ 1 bzw. > 1 bestehende Ideal von P , $P_1 = P/[1]$ bzw. $P_2 = P/(1)$ die Faktorhalbgruppe (D. Rees, dies. Zbl. 28, 4) von P nach $[1]$ bzw. (1). Dann ist S isomorph auf eine Unterhalbgruppe von P_1 oder P_2 . Bezeichnet man eine n. g. H. als vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Menge eine obere Grenze hat, so sind P_1 und P_2 die bis auf Isomorphismen einzigen vollständigen nicht diskreten Segmente.

O. Föllinger.

Maxfield, John E.: Graphical group representations. Math. Mag. 27, 169—171 (1954).

Higman, Graham and B. H. Neumann: On two questions of It. J. London math. Soc. 29, 84—88 (1954).

In a finite group G the Frattini subgroup — the intersection of the maximal subgroups — is well known to be nilpotent. The same applies to infinite soluble groups with maximal condition for subgroups (see N. It, this Zbl. 52, 19 and K. A. Hirsch, next review). However this property does not hold in groups generally: the authors construct examples of groups that have no maximal subgroups (so that they coincide with their Frattini subgroups) but are not nilpotent in any reasonable sense. The constructions are based on the following theorem. If a group has a complete abelian normal subgroup whose factor-group is isomorphic to the additive group of rationals, then the group has no maximal subgroup. Let F be the additive group of rational-valued functions of rational numbers; extend it by the „translation“ automorphisms $\tau_r: f(x) \rightarrow f(x+r)$ which are isomorphic to the additive group of rationals. Then the conditions of the theorem hold in this extension of F and of suitable subgroups of F . For example, if the $f(x)$ are restricted to polynomials, then the group arising is swept out by its ascending central series which is of length $\omega+1$; but the descending central series end with the derived group. If the admissible functions are zero except for a finite number of values of x , then the resulting group has a trivial centre, but its descending central series contracts to the 1-element in ω steps. Finally, if the admissible functions satisfy the condition $f(x+1) = 2f(x)$, then the group has a trivial center, and its descending central series ends with the derived group. By contrast the authors prove that a free product of non-trivial groups always has maximal subgroups. Indeed: the Frattini subgroup of a free product of groups is the trivial group.

K. A. Hirsch.

Hirsch, K. A.: On infinite soluble groups. V. J. London math. Soc. 29, 250—251 (1954).

(Part IV, this Zbl. 46, 20). It follows from a result of G. Higman and B. H. Neumann (preceding review) that the Frattini subgroup of an infinite soluble group is not necessarily nilpotent. N. It, on the other hand, has shown (this Zbl. 52, 19) that the Frattini subgroup of a soluble group with maximal condition for subgroups is nilpotent; the author gives an independent proof of the same fact, using a result of the third paper in this series [K. A. Hirsch, Proc. London math. Soc., II. Ser. 49, 184—194 (1946)].

B. H. Neumann.

Neumann, B. H.: Groups covered by permutable subsets. J. London math. Soc. 29, 236—248 (1954).

In der vorliegenden Abhandlung werden die folgenden interessanten Charakterisierungen zweier Klassen von Gruppen gewonnen. (1) Dann und nur dann ist die Kommutatorgruppe der Gruppe G endlich, wenn die Anzahl der Elemente in den Klassen konjugierter Elemente in G endlich beschränkt sind. (2) Die Gruppe G besitzt dann und nur dann eine Untergruppe von endlichem Index, deren Kommutatorgruppe endlich ist, wenn G von vertauschbaren Teilmengen überdeckt wird, die endlich beschränkt sind. Der Satz (2) ist eine Verallgemeinerung eines Mautnerschen Satzes, den Verf. in der folgenden verschärften Form beweist: (3) Wenn die Gruppe G eine endliche Untergruppe K besitzt, deren doppel­seitige Restklassen KgK paarweise vertauschbar sind, so ist $G = KH$, wo H die aus den endlichen Klassen

konjugierter Elemente bestehende charakteristische Untergruppe von G ist. — Die Basis für den Beweis der Sätze (2) und (3) bildet das folgende bemerkenswerte Lemma: Ist die Gruppe G Vereinigungsmenge von endlich vielen Restklassen nach Untergruppen $U(1), \dots, U(n)$, so gibt es ein i derart, daß der Index $[G:U(i)] \leq n$ ist.

R. Baer.

Cohn, P. M.: A countably generated group which cannot be covered by finite permutable subsets. J. London math. Soc. 29, 248–249 (1954).

It is shown that the free group of countably infinite rank can not be covered by permutable finite subsets. This answers a question which the reviewer had to leave open (B. H. Neumann, preceding review). Denoting by $P_f(P_b)$ the property of group to be covered by permutable finite (boundedly finite) subsets, the author remarks that both P_f and P_b are inherited by homomorphic images, and P_b also by subgroups, but that P_f is not inherited by subgroups.

B. H. Neumann.

Loonstra, F.: Sur les extensions du groupe additif des entiers rationnels par le même groupe. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 263–272 (1954).

There are two abstract groups which have an infinite cyclic normal subgroup with infinite cyclic factor group: the free abelian group $\{a, b; b^{-1}ab = a\}$ of rank 2, and the metacyclic group $\{a, b; b^{-1}ab = a^{-1}\}$. The author derives and discusses this fact in some detail by considering the possible factor systems. These give rise to a study of the solutions of a difference equation for integers; an analogous partial differential equation is also discussed.

B. H. Neumann.

Haimo, Franklin: Some non-Abelian extensions of completely divisible groups. Proc. Amer. math. Soc. 5, 25–28 (1954).

In direkter Übertragung bekannter Schlußweisen zeigt Verf.: Ist U eine $U = U^n$ für jedes positive n erfüllende Untergruppe des Zentrums einer Gruppe G , ist weiter V eine maximale $V = V = 1$ erfüllende Untergruppe von G , so ist der Normalisator von V in G gleich dem direkten Produkt von U und V .

R. Baer.

Fox, Ralph H.: Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups. Ann. of Math., II. Ser. 59, 196–210 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. 50, 256). Die in dem Gruppenring JF der freien Gruppe F mit den Erzeugenden x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) existierende partielle Differentiation $\eta_i(x) \partial x_i$ der Ringelemente $\eta_i(x)$ vermittelt zu jeder Darstellung eine Gruppe G mit Erzeugenden x_i und den definierenden Relationen $r_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) eine Matrix $\partial r_k(x) \partial x_i = \eta_{ki}(x)$. Die durch den Automorphismus q von F auf G bzw. JF auf JG aus $\eta_{ki}(x)$ entstehende Matrix $q \eta_{ki}$ heißt die Jacobische Matrix der Darstellung x_i, r_k von G . Das Haupttheorem besagt, daß Jacobische Matrizen verschiedener Darstellungen derselben Gruppe in JG äquivalent sind. Durch homomorphe Abbildungen p von JG entstehen weitere Matrizen $p q \eta_{ki}$, insbesondere bei der Abbildung von G auf die Faktorkommutatorgruppe die Alexander-Matrizen der Gruppe. Dieselben besitzen Elementarteilerideale, die der Berechnung zugänglich sind.

K. Reidemeister.

Chen, Kuo-Tsai: A group ring method for finitely generated groups. Trans. Amer. math. Soc. 76, 275–287 (1954).

Ist eine Gruppe G als Faktorgruppe F/R einer freien Gruppe F gegeben, so kann man bekanntlich aus dieser nicht-invarianten Darstellung von G vielerlei Invarianten von G herleiten, die Gruppen oder Ringe sein können. Verf. systematisiert diese Prozesse; insbesondere werden die Foxsche Differentiation und die Magnusche Abbildung freier Gruppen in formale Potenzreihenringe eingeordnet. Wie die sich ergebenden Invarianten zur Unterscheidung nicht-isomorpher Gruppen benutzt werden können, wird durch Beispiele gezeigt. — Die im Titel erwähnte Beschränkung auf endlich erzeugbare Gruppen ist natürlich unnötig.

R. Baer.

Scott, W. R.: The number of subgroups of given index in non-denumerable Abelian groups. Proc. Amer. math. Soc. 5, 19–22 (1954).

This paper contains the following improvement of an earlier result of the author (this Zbl. 46, 19): Let G be an abelian group of order $A > 8_0$ and suppose that $A \geq B \geq 8_0$. Then G has exactly 2^A subgroups of index B , and their intersection contains only 0. Furthermore there exists a set of 2^A subgroups of index B and order A having isomorphic factor groups. D. G. Higman.

Azleckij, S. P.: Über die Normalreihen der Sylowschen Klassen von minimalen Systemen einer endlichen Gruppe. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 269—278 (1954) [Russisch].

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 42, 23; 44, 13). Eine Gruppe \mathfrak{G} mit dem minimalen System $\langle \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_r \rangle$ von Sylowklassen heißt im verallgemeinerten Sinne speziell, wenn $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{P}_1 \rangle \cdot \langle \mathfrak{P}_2 \rangle \times \dots \times \langle \mathfrak{P}_r \rangle$. Man bilde in \mathfrak{G} Normalreihen, deren Glieder aus dem Erzeugnis von einer, zwei, ..., $r-1$ Sylowklassen bestehen. Untersucht werden diejenigen Gruppen, bei denen die Indizes aller dieser Normalreihen bis auf die Reihenfolge die gleichen sind. Diese Gruppen sind notwendig im verallgemeinerten Sinne speziell, und, falls nur ein einziges minimales System von Sylowklassen existiert, besitzen die im verallgemeinerten Sinne speziellen Gruppen auch die genannte Eigenschaft. Weitere Sätze behandeln Zusammenhänge zwischen dem Sylowrang und der Länge der Kompositions- und Hauptreihen. R. Kochendorfer.

Grün, Otto: Über das direkte Produkt regulärer p -Gruppen. Arch. der Math. 5, 241—243 (1954).

Das direkte Produkt $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ von zwei im Sinn von P. Hall (dies. Zbl. 7, 291) regulären p -Gruppen braucht nicht regulär zu sein. Verf. zeigt jedoch, daß Regularität sicher dann eintritt, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß jedes Element C aus der Kommutatorgruppe von \mathfrak{G}_2 der Gleichung $C^p = E$ genügt. Insbesondere ist das direkte Produkt einer regulären p -Gruppe und einer abelschen p -Gruppe regulär. H. Wielandt.

Holyoke, T. C.: Transitive extensions of dihedral groups. Math. Z. 60, 79—80 (1954).

Es wird folgender Satz bewiesen: H sei eine zweifach transitive Permutationsgruppe gewisser Buchstaben. Als Fixgruppe von a trete eine Diedergruppe G auf, und Fixgruppe von a, b sei eine Spiegelungsgruppe der Ordnung 2 von G . G hat dann die Ordnung 4, 6 oder 10. Die Ordnung von H ist entsprechend 12, 24 oder 60. Ernst Witt.

Hall jr., Marshall: On a theorem of Jordan. Pacific J. Math. 4, 219—266 (1954).

S_n bezeichne die symmetrische, A_n die alternierende und M_n die Mathiessche Permutationsgruppe in n Ziffern. Gesucht ist die Struktur einer 4-fach transitiven Permutationsgruppe mit Fixgruppe H von 4 Ziffern. Im Fall $H = 1$ und endlich vieler Ziffern hat schon C. Jordan $G = S_4, S_8, A_6$ oder M_{11} bewiesen. Hier wird gezeigt: Für ungerade Ordnung von H tritt nur noch die weitere Möglichkeit $G = A_7$ hinzu. Ernst Witt.

Honda, Kin'ya: On primary groups. Commentarii math. Univ. St. Pauli 2, 71—83 (1954).

In einer additiv geschriebenen Abelschen p -Gruppe wird der „Horizontal-exponent“ $h(G)$ folgendermaßen definiert: Ist $G = 0$, so ist $h(G) = 0$; ist die Gleichung $p \cdot x = g$ für jedes $g \in G$ auflösbar, so ist $h(G) = \infty$; ist p^n die niedrigste Ordnung derjenigen Elemente $g \in G$, für die $p \cdot x = g$ nicht auflösbar ist, so ist $h(G) = n$. G wird „elementar vom Exponenten n “ genannt, wenn $0 < h(G) = n < \infty$ und $p^n \cdot g = 0$ für jedes $g \in G$ ist. Es wird gezeigt, daß G , wenn es elementar vom Exponenten n ist, als direkte Summe von zyklischen Gruppen der Ordnung p^n dargestellt werden kann. Ist aber G nicht elementar und $0 < h(G) = n < \infty$, so ist

G direkt zerlegbar: $G = G_1 + G_2$, wobei G_1 elementar vom Exponenten n und $h(G_2) = n$ ist. Diese Zerlegung ist eindeutig. Der Fundamentalsatz der endlichen Abelschen Gruppen und einige seiner Verallgemeinerungen folgen unmittelbar aus diesen Sätzen.

F. W. Levi.

Honda, Kin'ya: Analytic considerations on finite groups and their representations. Commentarii math. Univ. St. Pauli 2, 41—46 (194).

Für eine endliche Gruppe \mathfrak{G} mit den verschiedenen irreduziblen Darstellungen D_1, \dots, D_h wird mit einfachsten funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen: Ist D eine treue Darstellung vom Grad d , deren n -te Kroneckerpotenz D^n die irreduzible Darstellung D_μ $u_{\mu n}$ mal enthält, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_{\mu n}} = d$ für jedes μ . Hieraus folgt sofort, daß jedes D_μ in mindestens einem D^n vorkommt; genauer gilt, daß D_μ schon in einer der Darstellungen D, D^2, \dots, D^h vorkommt. In gleicher Weise werden die zu diesen Sätzen sozusagen dualen hergeleitet, bei denen man „irreduzible Darstellung D “ durch „Klasse konjugierter Gruppenelemente \mathfrak{C}_μ “ zu ersetzen hat, „Darstellung D^n “ durch „normale Teilmenge \mathfrak{M} von \mathfrak{G} “ ($a\mathfrak{M}a^{-1} = \mathfrak{M}$ für $a \in \mathfrak{G}$), den Grad d von D durch die Ordnung m von \mathfrak{M} , „ D ist treu“ durch „ \mathfrak{M} erzeugt \mathfrak{G} “, die Anzahl $u_{\mu n}$ durch die Anzahl $v_{\mu n}$ geordneter Systeme b_1, \dots, b_n von Elementen aus \mathfrak{M} mit $b_1 b_2 \dots b_n = a_\mu$, wo a_μ ein festes Element von \mathfrak{C}_μ . Das eine Mal werden die Orthogonalitätsrelationen für die Zeilen, das andere Mal für die Spalten der Charakterentafel von \mathfrak{G} benutzt.

H. Boerner.

Wolf, Paul: Der Dualitätssatz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen als Aussage über den Gruppenring. Math. Nachr. 11, 129—133 (1954).

Bezeichnen χ, ψ, ξ die Charaktere der absolut irreduziblen Darstellungsklassen einer gegebenen endlichen Gruppe \mathfrak{G} und ist F_χ eine feste vorgegebene zum Charakter χ gehörige Darstellung, so erhält man das Multiplikationsschema der einfachen Charaktere in der Form $\chi\psi = \sum_{\xi} k_{\chi\psi}^{\xi} \xi$ mit nicht-negativen ganzrationalen Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^{\xi}$, und das Multiplikationsschema der irreduziblen Darstellungen lautet $\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi = \Gamma_{\chi\psi} \cdot P_{\chi\psi}^{-1} \Gamma_\xi \cdot P_{\chi\psi} = A k_{\chi\psi}^{\xi} \Gamma_\xi$ mit regulären

Matrizen $P_{\chi\psi}$. Dabei bedeutet A das dem Summenzeichen \sum_{ξ} entsprechende Symbol für die diagonale Zusammensetzung von Matrizen. Der allgemeine Dualitätssatz der Darstellungstheorie, gegeben von H. Hasse, besagt im wesentlichen, daß die einzigen Realisierungen des Multiplikationsschemas der irreduziblen Darstellungen durch Matrizen die Darstellungsmatrizen 1_χ (S eines beliebigen Elementes S aus \mathfrak{G} sind). Der Verf. beweist hier diesen Satz durch Betrachtung des Gruppenringes G von \mathfrak{G} über einem Grundkörper Ω , dessen Charakteristik kein Teiler der Ordnung von \mathfrak{G} ist und der die g_0 -ten Einheitswurzeln enthält, wenn g_0 die maximale Elementarordnung in \mathfrak{G} ist. Es wird gezeigt, daß der Dualitätssatz einer Aussage über den Gruppenring entspricht, nämlich: Es bedeute H den Isomorphismus $S^H = S \times S$ für alle S aus \mathfrak{G} . Dann gilt: Die einzigen von Null verschiedenen Elemente α aus G , deren direktes Produkt $\alpha \times \alpha$ gleich α^H ist, sind die Elemente der Gruppe \mathfrak{G} .

H. Bergström.

Kadison, Richard V.: Infinite general linear groups. Trans. Amer. math. Soc. 86, 66—91 (1954).

Suite d'un article précédent (ce Zbl. 46, 252). Il s'agit cette fois du groupe linéaire général M_∞ , c'est-à-dire du groupe de tous les opérateurs inversibles d'un facteur M . Les résultats essentiels sont les suivants: 1. Tout sous-groupe normal, non central, uniformément fermé G du groupe M_∞ d'un facteur de type II₁ est l'image réciproque d'un sous-groupe fermé de R^+ (nombres réels positifs) dans l'application: opérateur \rightarrow déterminant (cf. B. Fuglede and R. Kadison, ce Zbl. 46, 336). L'image réciproque de 1 est topologiquement simple (pas de sous-groupe propre fermé, normal, non central). 2. Si M est de type III₁, tout sous-groupe G coïncide avec M_∞ . 3. Si M est de type I_{oo} ou II_{oo}, G contient $M_\infty \cap 1$ (groupe normal fermé constitué des opérateurs ayant 1 pour centre unique de densité infinie. Cf. compte rendu du précédent article). $M_\infty \cap 1$ est topologiquement simple et tout opérateur normal de G est dans $M_\infty \cap 1$ produit de $M_\infty \cap 1$ et du groupe des scalaires différents de 0. 4. Si M est de type I_{oo}, G est somme directe de $M_\infty \cap 1$ et d'un sous-groupe fermé des scalaires.

A. Reuz.

Dieudonné, Jean: Les isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis. Canadian J. Math. 6, 305—315 (1954).

Démonstrations nouvelles, utilisant l'origine géométrique des groupes étudiés, des isomorphismes exceptionnels entre les groupes classiques finis. *A. Revuz.*

Freudenthal, Hans: Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 218—230 (1954).

Mit den Ausdrucksmitteln der einfachen Jordanalgebra J_{27} wird rechnerisch im reellen projektiven Raum P_{55} eine Mannigfaltigkeit M_{27} , mit der Lieschen Ausnahmegruppe E_7 als transitiver Automorphismengruppe angegeben. *Ernst Witt.*

Bruhat, François: Irréductibilité des représentations induites des groupes de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 38—40 (1954).

Soient G un groupe de Lie, F un sous-groupe fermé, α, β des représentations continues unitaires de dimension 1 de F , U^α, U^β les représentations induites de G . Antérieurement (ce Zbl. **51**, 341), l'A. a associé, à tout opérateur d'entrelacement de U^α et U^β , une distribution sur G . Il suppose maintenant qu'il n'existe dans G qu'un nombre fini de doubles classes FxI , et esquisse la démonstration de résultats dont nous donnons seulement un exemple plus bas. Pour toute double classe $P = FxI$, il existe un ouvert Ω de G , réunion de doubles classes, tel que P soit sous-variété fermée de Ω . L'A. se ramène à étudier, pour tout $x \in G$, les distributions $dT(z)$ sur Ωx^{-1} , de support contenu dans $V = Px^{-1}$, telles que $dT(\xi z \eta^{-1}) = \alpha(\xi)\beta(x^{-1}\eta x) dT(z)$ pour $\xi \in I, \eta \in xIx^{-1}$. Dans un voisinage assez petit W de e , dT est somme de dérivées transversales à V de distributions dT_ν , extensions à W de distributions définies sur $V \cap W$; la condition trouvée sur dT se traduit en une condition sur les dT_ν , condition qui fait intervenir les coefficients des formules de transformation des dérivations transversales à V par les translations $z \rightarrow \xi^{-1}z\eta$; ces coefficients enfin définissent de manière assez compliquée une représentation $V_r(\xi)$ de $I_x = F \cap xIx^{-1}$ dépendant d'un entier r . Théorème: Si, pour tout $x \in G$ non dans F et tout $r \geq 0$, la représentation $\alpha(\xi)\alpha(x^{-1}\xi x)$ de I_x n'est pas contenue dans $V_r(\xi)$, alors U^α est irréductible. *J. Dixmier.*

Bruhat, François: Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 437—439 (1954).

Bruhat, François: Représentations induites des groupes de Lie semi-simples réels. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 550—553 (1954).

Suite de la Note précédente. L'A. prend pour G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe; soient H un sous-groupe de Cartan de G , $\Gamma = H$ un sous-groupe fermé résoluble maximal de G , \hat{H} le normalisateur de H dans G ; \hat{H}/H est le groupe de Weyl, fini, de G . Pour les groupes classiques, l'A. a vérifié explicitement le lemme suivant: les doubles classes modulo Γ dans G correspondent biunivoquement aux éléments du groupe de Weyl (résultat dont Harish-Chandra a obtenu depuis une démonstration générale). L'A. peut alors appliquer les résultats de la Note précédente. Il fait des calculs explicites qui utilisent les détails de la théorie des racines. D'où par exemple: si α , restreinte à H , n'est invariante par aucune des rotations du groupe de Weyl distinctes de l'identité, U^α est irréductible. Ceci est en relation avec les résultats de Gelfand-Naimark sur la „série principale“; les méthodes de l'A. peuvent aussi donner des résultats sur la „série complémentaire“. Dans la 2^{ième} Note, l'A. étend ces résultats aux groupes de Lie semi-simples réels connexes, et considère en outre des représentations α de Γ qui ne sont plus nécessairement de dimension 1. *J. Dixmier.*

Gurevič, G. B.: Über gewisse Eigenschaften der algebraischen linearen Lieschen Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 177—178 (1954) [Russisch].

Let \mathfrak{G} be an algebraic linear Lie group and \mathfrak{A} its Lie algebra [cf. Mal'cev, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 329—352 (1945), or Chevalley, Théorie des groupes de Lie II: Groupes algébriques, Paris 1951]. In a coordinate system the elements of \mathfrak{G} appear as $n \times n$ matrices, say (the field is left unspecified). If $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are the weights of \mathfrak{A} , then the weights of \mathfrak{G} are $\Theta_i = e^{\lambda_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Using results by Mal'cev (l. c.) the author shows that all relations connecting the weights of an algebraic linear Lie group \mathfrak{G} can be reduced to the form $\Theta_1^{\alpha_1} \cdots \Theta_n^{\alpha_n} = \Theta_1^{\beta_1} \cdots \Theta_n^{\beta_n}$, where the α_i and β_i are non-negative integers. Similarly every relation between the weights λ_i of \mathfrak{A} can be reduced to relations of the form $\gamma_1 \lambda_1 + \cdots + \gamma_n \lambda_n = 0$, where the γ_i are integers. — If \mathfrak{A} is a Lie algebra of matrices, the F -system of \mathfrak{A} is defined as the set of matrices $X \in \mathfrak{A}$ such that $\text{Tr}(AX) = 0$ for all $A \in \mathfrak{A}$. If every matrix of \mathfrak{A} has all its eigenvalues equal to zero, \mathfrak{A} is called a nil-algebra. Then the author states that the F -system of a Lie algebra corresponding to an algebraic linear Lie group is a nil-algebra. *P. M. Cohn.*

Koszul, J. L.: Sur les modules de représentation des algèbres de Lie résolubles. Amer. J. Math. **76**, 535–554 (1954).

This paper is devoted to proofs of the results announced previously by the author (this Zbl. **50**, 32). The result that a Lie algebra over a field of characteristic 0 is soluble if and only if every cohomology class of positive degree is effaceable (l. c.), which is proved here, is reinterpreted as follows: If a Lie group is simply connected and soluble (and hence homeomorphic to R^n), then the cohomology of the complex of real differential forms whose translations belong to a finite dimensional space is the same as the cohomology of the complex of all differential forms. *P. M. Cohn.*

Inonu, E. and E. P. Wigner: On a particular type of convergence to a singular matrix. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 119–121 (1954).

The contraction of a Lie group which the authors have previously defined (this Zbl. **50**, 26) can be expressed as follows (l. c.): If I_i, J_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are the infinitesimal operators of the given group and its contraction respectively, then $J_i = \sum_j u_{ij} I_j$, where $u = (u_{ij})$ is a singular matrix which was considered as the limit (as $\varepsilon \rightarrow 0$) of a matrix $u = \varepsilon w$, where $w = \varepsilon w$ does not vanish identically in ε . The authors point out that a continuity condition is necessary for the considerations in l. c. to apply, viz. $u(u + \varepsilon w)^{-1}u \rightarrow u$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. This is shown to hold if and only if the coefficient of ε^{n-r} in $u + \varepsilon w$ is $\neq 0$, where r is the rank of u . *P. M. Cohn.*

Godement, Roger: Théorie des caractères. I. Algèbres unitaires. II. Définition et propriétés générales des caractères. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 47–62, 63–85 (1954).

La théorie des algèbres unitaires (ou hilbertiennes), développée dans la partie I, a été dans ces dernières années exposée par de nombreux auteurs, de sorte que les résultats de cette partie, établis indépendamment par l'A., sont pour la plupart aujourd'hui connus. Signalons toutefois le th. 3.: soient A une algèbre hilbertienne, \mathfrak{H} l'espace hilbertien complété de A , R^A l'anneau d'opérateurs engendré par les opérateurs $U_x, x \in A$ (on pose $U_x y = xy$ pour $x \in A, y \in A$). Alors, il existe sur R^A une trace fidèle et une seule Tr telle que: 1. $\text{Tr}(T^*T) < +\infty$ si et seulement si $T = U_a$ pour un élément „borné“ $a \in \mathfrak{H}$; 2. on ait $\text{Tr}(U_a U_b^*) = \langle a, b \rangle$ pour a, b bornés dans \mathfrak{H} . (Cette trace Tr est dite trace canonique sur R^A . — Dans un mémoire antérieur (ce Zbl. **43**, 32; cité MTC dans la suite), l'A. a étudié les caractères des groupes localement compacts. La théorie échouait sur certains points, par suite d'une définition insuffisamment générale des caractères. Dans la partie II du présent mémoire, l'A. reprend la question indépendamment du mémoire précédent. Les résultats obtenus, et ceux qui seront démontrés dans les parties suivantes, constituent une généralisation satisfaisante de la théorie classique. Soient G un groupe localement compact unimodulaire, $M(G)$ l'algèbre des mesures complexes bornées sur G munie de l'adjonction $dx(x) \mapsto dx(x^{-1})$, et de la topologie faible définie par les fonctions continues bornées sur G . Une „algèbre de groupes“ de G est une sous-algèbre à autoadjointe partout dense de $M(G)$ invariante par translation. Une trace sur G est une forme sesquilinéaire hermitienne positive $\sigma(x, \beta)$ sur \mathfrak{a} , avec des axiomes tels que \mathfrak{a} devienne une algèbre hilbertienne A . Il lui est associé dans l'espace hilbertien complété une double représentation unitaire continue de G : $U_x \alpha = \alpha * U_x, V_x \alpha = \alpha * U_x^{-1}$; les U_x et les V_x engendrent les anneaux d'opérateurs R^A, R^A associés à A . Il existe sur R^A une trace canonique Tr telle que $\sigma(x, \beta) = \langle x, \beta \rangle = \text{Tr}(U_x^{-1} U_\beta^*)$, et d'après la partie I. (Dans MTC, \mathfrak{a} était l'algèbre des fonctions continues à support compact, et σ une mesure). En fait, il existe dans R^A des opérateurs U_x , avec $x \in M$ mais $x \notin \mathfrak{a}$, pour lesquels $\text{Tr}(U_x U_x^*) < +\infty$; ces mesures forment une algèbre de groupe \mathfrak{a}' prolongeant \mathfrak{a} sur laquelle on peut prolonger σ précisément par la formule $\sigma(x, \beta) = \text{Tr}(U_x^{-1} U_\beta^*)$; une trace est dite maximale si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$; toute trace se prolonge d'une manière unique en une trace maximale, à savoir celle qu'on vient de construire; on se limite désormais aux traces maximales, qui sont définies sur des idéaux de $M(G)$. Une trace maximale est un „caractère“ si la double représentation de G qu'elle définit est irréductible, i. e. si R^A et R^A sont des facteurs. — Une trace σ sur \mathfrak{a} est majorée par une trace σ' sur \mathfrak{a}' si $\sigma(x, x) \leq \sigma'(x, x)$ pour $x \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$. L'ensemble \mathcal{Q} des traces maximales est un cône convexe d'un espace vectoriel réel, et les caractères correspondent aux génératrices extrémales de \mathcal{Q} (résultat qui ne pouvait être obtenu dans MTC). Dans les cas classiques, on peut normaliser les traces de façon à obtenir un ensemble convexe compact auquel on applique le théorème de Krein-Milman; ici cette méthode est inapplicable, et l'A. ne prouvera l'existence de caractères que dans la partie III. — On a donc associé, à un caractère, une repré-

sensation factorielle de G . Réciproquement, soit $s = U_\alpha$ une représentation factorielle de G ; pour $\alpha \in M(G)$, $\text{Tr}(U_\alpha^* U_\alpha)$ n'est pas nécessairement finie; si cette condition est remplie pour „suffisamment“ de mesures α , l'A. dit que la représentation est normale. D'où une correspondance biunivoque entre représentations factorielles normales et caractères (à ceci près que la représentation factorielle n'est définie qu'à un isomorphisme algébrique près). — La classification des facteurs donne une classification des caractères. Pour qu'un caractère soit de classe I, il faut et il suffit qu'il soit associé à une représentation irréductible normale de G , laquelle est déterminée univoquement par son caractère. Si G est un groupe de Lie semi-simple admettant une représentation linéaire fidèle, toute représentation factorielle de G dans un espace séparable est normale et de classe I (résultat obtenu par Harish-Chandra sans hypothèse de séparabilité, par une méthode très différente: ce Zbl. 51, 240). Pour qu'un caractère soit de classe finie, il faut et il suffit qu'il soit défini par une fonction continue. S'il existe dans G un système fondamental de voisinages invariants par les automorphismes intérieurs, tout caractère est de classe finie (la réciproque est annoncée pour une partie suivante).
J. Dixmier.

Poincet, Jean: Sur les groupes simples localement compacts. C. r. Acad. Sci. Paris 238, 192—194 (1954).

G sei eine lokalkompakte und zusammenhängende Gruppe, die in kompakten Gruppen nur trivial darstellbar ist. H sei eine Untergruppe, für die der homogene Raum $H^* = G/H$ kompakt ist und ein bezüglich G invariantes Maß besitzt. Ist M eine Teilmenge von H^* , x_0 der Punkt H von H^* , so heißt die Menge aller Punkte $X x_0$ mit $X^{-1} x_0 \in M$ die zu M symmetrische Menge. Eine Menge, die mit der zu ihr symmetrischen übereinstimmt, heißt symmetrisch. Es wird bewiesen, daß jede offene symmetrische Teilmenge von H^* in H^* dicht ist, ferner daß es in H^* stets zwei zueinander symmetrische offene Teilmengen M_1, M_2 gibt, so daß für O_1 offen in M_1 und O_2 offen in M_2 die Mengen HO_1 und HO_2 in M_1 bzw. M_2 dicht sind und ihre Vereinigung dicht in H^* .
G. Köthe.

Schöneborn, Heinz: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I. Math. Z. 59, 455—483 (1954).

Der Autor untersucht gewisse topologische Abelsche Gruppen, deren Topologie definiert ist durch ein System von Untergruppen als Umgebungssystem des Einselements. Nach einigen einleitenden Betrachtungen werden zuerst die abgeschlossenen Untergruppen der Abelschen Gruppen A mit einem natürlichen Operatorenbereich P ausgezeichnet. Unter einem solchen wird verstanden ein Multiplikationsring mit: (i) P enthält das Einselement, (ii) Pa ist gleich der kleinsten, das Element a enthaltenden abgeschlossenen Untergruppe von A , (iii) es gilt $M \cdot a = M \cdot a$ für jedes $a \in A$ und jede Untermenge $M \subset P$. Jede abgeschlossene Untergruppe von A ist stets zulässig, während die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt. Es werden Bedingungen bestimmt, unter welchen ein natürlicher Operatorenbereich der Gruppe existiert. Zyklhomogenität und Torsionstopologie sind solche hinreichenden Bedingungen. Verf. führt dann einen allgemeinen Begriff der primären Gruppe ein und beweist einen Satz über Zerlegungen in primäre Gruppen (Satz 5). Zwei Untergruppentopologien werden äquivalent genannt, wenn sie auf jeder zyklischen Gruppe die gleiche Topologie induzieren, und die feinste Topologie in einer Äquivalenzklasse ist die zu dieser Klasse gehörige S -Topologie. Besitzt dann die S -topologische Gruppe A den Ring R_p der ganzen p -adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich, so ist eine Untergruppe $B \subset A$ dann und nur dann abgeschlossen in A , wenn sie R -zulässig ist (Satz 10). Im letzten Paragraphen wird die Beziehung zwischen der größten Topologie und der linearen Kompaktheit diskutiert.
T. Tannaka.

Cockcroft, W. H.: Interpretation of vector cohomology groups. Amer. J. Math. 76, 599—619 (1954).

J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. 37, 260) definierte Vektorkohomologiegruppen $\hat{H}_n^X(X, Y; G)$ und zeigte, daß \hat{H}_n^X und \hat{H}_n^Y sich in ähnlicher Weise mittels Gruppenerweiterungen mit Operatoren interpretieren lassen wie die gewöhnlichen Kohomologiegruppen von Gruppen mittels gewöhnlicher Gruppenerweiterungen. Verf. zeigt, daß das gleiche auch für die von Eilenberg-McLane (dies. Zbl. 29, 341) angegebene looptheoretische Interpretierung der höheren Kohomologiegruppen gilt. Es werden Loops mit Operatoren in einer Gruppe X und X -Verlängerungen (L, Φ) einer Gruppe Y durch eine Gruppe G definiert. Dies sind im wesentlichen Loops L mit Operatoren in X , so daß $\Phi: L \rightarrow Y$ ein Operatorhomomorphismus ist, dessen Kern eine Gruppe $K \supseteq G$ ist. Die Gruppen $\hat{H}_{n-1}^n(X, Y; G)$ lassen sich dann für $n \geq 3$ ganz analog zu den Ergebnissen von Eilenberg-McLane (l. c.) als gewisse Restklassensysteme aus dem multiplikativen System der X -Verlängerungen deuten. Der Beweis erfolgt indirekt nach der auch bei Whitehead (l. c.) verwendeten Methode, wobei die X -Verlängerungen von Y mit G zurückgeführt werden auf

gewöhnliche Verlängerungen einer Gruppe W mit der Gruppe G . Auf diese zugeordneten gewöhnlichen Verlängerungen läßt sich dann mit einigen Modifikationen die Eilenberg-MacLane'sche Theorie anwenden. Ferner wird auch ein direkter Beweis des Ergebnisses angedeutet. — Weiter zeigt Verf., daß auch die bekannte Beziehung der ersten Kohomologiegruppe $H^1(Y, G)$ zu der Automorphismengruppe einer Gruppenerweiterung von Y mit G (vgl. Eilenberg, dies. Zbl. 31, 342) sich auf die Vektorkohomologiegruppe $\hat{H}^1(X, Y; G)$ und die Automorphismengruppe einer X -Erweiterung von Y durch G übertragen läßt.

E. Burger.

Verbände. Ringe. Körper:

Hostinsky, L. Aileen: Loewy chains and uniform splitting of lattices. Proc. Amer. math. Soc. 5, 315—319 (1954).

In einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 43, 34) hat Verf. den Begriff eines Verbandshomomorphismus so definiert, daß die von Gruppenhomomorphismen im Untergruppenverband induzierten Abbildungen Verbandshomomorphismen im Sinne dieser Definition sind. Verf. hat a. a. O. das gleichmäßige Zerfallen derartiger Verbandsendomorphismen definiert und untersucht. In der vorliegenden Arbeit wird die folgende Bedingung als hinreichend für das gleichmäßige Zerfallen des Verbandsendomorphismus σ erwiesen: sind p und q σ -zulässige Verbandselemente und $p < q$, so existiert ein σ -zulässiges Verbandselement m derart, daß $p < m \leq q$ ist und zwischen p und m weiter kein σ -zulässiges Verbandselement liegt; dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Loewy-Kette σ -zulässiger Elemente.

R. Baer.

Lorenzen, Paul: Über die Korrespondenzen einer Struktur. Math. Z. 60, 61—65 (1954).

L'A. formule l'hypothèse que la structure d'alliance („Bund“) qu'il obtient par abstraction à partir de certaines propriétés immédiates de l'ensemble de toutes les relations binaires compatibles avec une structure algébrique donnée et de la propriété appelée „relation de Dedekind“ par le rapporteur est toujours réalisée par au moins un ensemble de relations binaires compatibles avec une structure algébrique. Cette conjecture s'appuie sur le fait que la structure d'alliance suffit pour retrouver les résultats connus sur les équivalences compatibles. A titre d'exemple, il est démontré que dans une alliance, deux chaînes normales de mêmes extrémités admettent des raffinements normaux projectifs, ainsi que le théorème de substitution de Noether.

J. Riguet.

Schuff, Hans Konrad: Zur Darstellung von Polynomen über Verbänden. Math. Nachr. 11, 1—4 (1954).

Verf. konstruiert zu einem gegebenen Verband V und einer geordneten, zu V elementfremden Menge U von Elementen x_α einen Oberverband H , der im Sinne von K. Dörge (dies. Zbl. 42, 16) als Polynomverband mit den Unbestimmten x_α über V zu bezeichnen ist. — Will man an geläufige Begriffe anknüpfen, so kann man sagen: Der vom Verf. gebildete Bereich H stellt für den Fall der Verbände das Gegenstück dar zum freien Produkt einer vorgegebenen Gruppe V mit der freien Gruppe, die die Erzeugenden x_α besitzt. Wesentlich ist, daß bei der Konstruktion von H zu jedem Element eine eindeutig bestimmte Normalform gewonnen wird.

W. Krull.

Sampei, Yoemon: On lattice completions and closure operators. Commentarii math. Univ. St. Pauli 2, 55—70 (1954).

Es sei L ein Verband. Ist \mathfrak{L} ein vollständiger Verband, in den L durch einen Verbandsisomorphismus q abgebildet werden kann, so nennt Verf. das Paar (\mathfrak{L}, q) eine Vervollständigung von L . Das System $\mathfrak{S}(L)$ aller Vervollständigungen von L kann teilweise geordnet werden: Es gelte $(\mathfrak{L}, q) \leq (\mathfrak{M}, r)$ genau dann, wenn es einen Isomorphismus π von \mathfrak{L} in \mathfrak{M} gibt mit $\pi q = r$. Ist $\mathfrak{L} < \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{L}$, so heißen \mathfrak{L} und \mathfrak{M} äquivalent. Eines der Hauptresultate besagt, daß zwischen $\mathfrak{S}(L)$ und gewissen Hüllenoperatoren eine Galoiszuordnung besteht. Ein Hüllenoperator c von L ist dabei eine Zuordnung, die jeder Teilmenge X von L eine Teilmenge X^c so zuordnet, daß die Axiome $X \subseteq X^c$, $X \subseteq Y \rightarrow X^c \subseteq Y^c$ und $X^{cc} = X^c$ erfüllt sind. Ein

spezieller Hüllenoperator wird durch $X \rightarrow X^m = \{y: y \leq x \text{ für irgendein } x \in X\}$ geliefert. Ein Hüllenoperator c von L heißt normal, wenn für alle $x, y \in L$ stets $\{x, y\}^c = (x \cup y)^m$ erfüllt ist. Die Menge $C(L)$ der Hüllenoperatoren kann in natürlicher Weise mit einer Verbandsstruktur versehen werden, und die Menge $N(L)$ der normalen Hüllenoperatoren bildet einen vollständigen Unterverband von $C(L)$. Zwischen $N(L)$ und $\mathcal{C}(L)$ besteht dann die erwähnte Galoische Zuordnung. Eine Vervollständigung von L heißt normal, wenn sie zu einer Vervollständigung äquivalent ist, die in bestimmter Weise durch einen normalen Hüllenoperator erzeugt wird. Die normalen Vervollständigungen können einfach charakterisiert werden. Hinsichtlich der in $\mathcal{C}(L)$ definierten teilweisen Ordnung gibt es minimale Vervollständigungen. Diese sind normale Vervollständigungen und sind alle isomorph zu einer bekannten Vervollständigung von MacNeil. Weitere spezielle Vervollständigungen werden diskutiert und durch entsprechende Hüllenoperatoren charakterisiert.

H.-J. Kowalsky.

Ellis, David: Some saddle-points in $\mathbf{A} \oplus \bar{\mathbf{A}}$. Publ. math., Debrecen 3, 168—170 (1954).

In einem vollständigen Verband Γ heißt eine für die Elemente von Γ erklärte Eigenschaft p eine fallende (steigende) Eigenschaft, wenn die Menge aller Elemente von Γ , auf die p zutrifft, nicht leer ist und mit α auch alle $\beta \leq \alpha$ ($\beta \geq \alpha$) enthält. Ist p eine fallende, q eine steigende Eigenschaft, so heißt ein Element α von Γ ein Sattelpunkt hinsichtlich p und q , wenn beide Eigenschaften auf α zutreffen und α hinsichtlich p maximal, hinsichtlich q minimal ist. Wenn es wenigstens ein Element in Γ gibt, auf das p und q zutreffen und wenn alle solche Elemente Sattelpunkte sind, dann heißen p, q Sattelpunkts-Eigenschaften. Verf. betrachtet für eine unendliche Menge S den vollständigen Verband \mathbf{A} aller T_1 -Topologien von S ($\alpha \leq \beta$: Jede β -offene Menge ist α -offen) und den durch Dualisierung aus \mathbf{A} entstehenden Verband $\bar{\mathbf{A}}$. In \mathbf{A} sind folgende zwei Eigenschaften p, q Sattelpunkts-Eigenschaften: Die Topologie α besitzt die Eigenschaft p , wenn sie das Hausdorffsche Trennungssaxiom erfüllt; sie besitzt die Eigenschaft q , wenn S unter ihr bikompakt ist (Satz von Vaidyanathaswami). Es sei weiter f eine feste Permutation von S . Das Paar (σ, τ) aus dem direkten Produkt $\mathbf{A} \oplus \bar{\mathbf{A}}$ besitze die Eigenschaft p , wenn f stetig ist hinsichtlich σ als Topologie des Urbildes und τ als Topologie des Bildes. Ferner besitze (σ, τ) die Eigenschaft q , wenn in analoger Weise f eine offene Abbildung ist. Verf. zeigt: Diese beiden Eigenschaften p, q sind ebenfalls Sattelpunkts-Eigenschaften.

H.-J. Kowalsky.

Molinaro, Italo: Généralisation de l'équivalence d'Artin. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1284—1286 (1954).

Es sei eine kommutative Halbverbandshalbgruppe mit Einselement e gegeben, in der zu je zwei Elementen a, b die obere Grenze $b:a$ aller x mit $a \cdot x \leq b$ vorhanden ist. Als Artin-Äquivalenzen werden diejenigen Äquivalenzrelationen A_x bezeichnet, für welche $a \equiv b (A_x)$ als $x:a = x:b$ erklärt ist. $A_x = A_{x,y}$ ist gleichwertig mit $y(x:y) \equiv e(A_x)$. Ein Element x , das diese Bedingung für alle y erfüllt, heißt normal. Ein solches ist genau dann vorhanden, wenn es ein größtes idempotentes Element gibt. Ist x normal, so folgt für jedes y aus $a \equiv b (A_y)$ stets $a \equiv b (A_x)$. Sind x und y normal, so gibt es ein z mit $y = xz$. Die Ganz-Abgeschlossenheit der Halbverbandshalbgruppe (d. i. $a:a = e$ für alle $a \neq 0$) besagt gerade, daß e normal ist.

G. Pickert.

Molinaro, Italo: Généralisation de l'équivalence d'Artin. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1767—1769 (1954).

In Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. werden u. a. folgende Sätze bewiesen. Eine Kongruenzrelation, die eine Gruppe als Restklassenstruktur liefert und bei der a maximales Element der Kongruenzklasse von a ist, stimmt mit der Artin-Äquivalenz A_a überein. Genau für die normalen Elemente a ist die Restklassenstruktur nach A_a eine Gruppe. Bei Ganz-Abgeschlossenheit gibt es ein normales Element a mit $x:(a:a) = x(A_a)$ für alle x . Besitzt a diese Eigenschaften, so folgt aus $x \equiv x'(A_a)$, $y \equiv y'(A_a)$ stets $x:y \equiv x':y'(A_a)$ und, falls sogar eine Verbandshalbgruppe vorliegt, $x \cap y \equiv x' \cap y' (A_a)$.

G. Pickert.

Preston, G. B.: The arithmetic of a lattice of sub-algebras of a general algebra. J. London math. Soc. 29, 1—15 (1954).

Das Paar (A, V) heißt Algebra, wenn V eine nichtleere Menge von in der Menge A erklärten Verknüpfungen endlicher Argumentanzahlen ist, f sei im folgenden ein festes Element von V mit n Argumenten. Ist N eine Menge von natürlichen Zahlen $\leq n$, so wird die Unteralgebra (B, V) (d. h. B abgeschlossen gegenüber den Verknüpfungen aus V) als N -Ideal der Algebra be-

zeichnet, wenn aus $a_i \in B$ für alle $i \in N$ stets $f(a_1, \dots, a_n) \in B$ folgt, und als N -Primideal, wenn auch das Umgekehrte gilt. Eine Unteralgebra, die N -Ideal für jede Menge N von r natürlichen Zahlen $\leq n$ ist, heißt r -Ideal und, wenn weiter aus $f(a_1, \dots, a_n) \in B$ stets $a_i \in B$ für mindestens r verschiedene i folgt, r -Primideal. Mit der Enthaltensein-Beziehung (der B) als teilweiser Ordnung bilden bei fester Menge N die N -Ideale und bei fester Zahl r die r -Ideale einen vollständigen Verband. Besteht V nur aus f und enthält N ebenfalls nur ein Element, so ist der Verband der N -Ideale distributiv, und die N -Primideale bilden darin einen Booleschen Unter-Verband. Auch der Verband der 1-Ideale ist in diesem Fall distributiv; doch kann man von der Menge der 1-Primideale nur aussagen, daß sie — durch die Enthaltensein-Beziehung teilweise geordnet — einen vollständigen Verband bilden. — Im folgenden sind 1-Ideale und 1-Primideale kurz als Ideale bzw. Primideale bezeichnet. An die Algebra (A, V) werden jetzt Forderungen in Gestalt von Rechengesetzen gestellt, welche z. B. im Falle $V = \{f\}$ und $n = 2$ besagen, daß die Algebra eine kommutative Halbgruppe ist, und im Falle $V = \{f, g\}$ mit $n = 2$ und ebenfalls binärer Verknüpfung g die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität (bez. g) von f bedeuten. Wird mit R_a die Menge der $a \in A$ bezeichnet, für welche man mittels a und f ein Element von B bilden kann, so ergibt sich der Durchschnitt aller das Ideal (B, V) enthaltenden minimalen Primideale zu (R_f, V) . Als Primärideal wird das Ideal (B, V) dann bezeichnet, wenn im Falle $f(a_1, \dots, a_{n-1}) \in B$ entweder $a_i \in R_k$ für alle i oder $a_i \in B$ für mindestens ein i gilt; (R_f, V) ist dann ein Primideal. Im Falle $n = 2$ gilt der Satz von Eindeutigkeit der reduzierten Darstellung als Durchschnitt von Primäridealen in der aus der Idealtheorie der Ringe bekannten Form; gilt noch die O -Kettenbedingung für die Ideale, besteht V nur aus f und besitzt f ein neutrales Element, so läßt sich jedes Ideal als Durchschnitt endlich vieler Primärideale darstellen.

G. Pickert.

Preston, G. B.: Factorization of ideals in general algebras. J. London math. Soc. 29, 363—368 (1954).

Die in der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. erklärten Begriffe wie „prim“ werden dadurch verallgemeinert, daß in den Definitionen unter den n Argumenten von f jeweils nur höchstens r ($r \leq n$) als untereinander verschieden zugelassen werden. Dann bleiben wesentliche Sätze der früheren Arbeit erhalten, und in dem Satz von der Eindeutigkeit der reduzierten Darstellung als Durchschnitt von Primäridealen kann die Voraussetzung $n = 2$ durch $r \leq 2$ ersetzt werden. G. Pickert.

• Waerden, B. L. van der: Moderne Algebra. Übersetzung der 2. deutschen Aufl. von Hugo B. Ribeiro. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática 1954. 135 Escudos [Portugiesisch].

Higman, Graham and A. H. Stone: On inverse systems with trivial limits. J. London math. Soc. 29, 233—236 (1954).

Es wird ein gerichtetes System von abzählbaren Ringen R_i mit einer Indexmenge der Mächtigkeit \aleph_1 zusammen mit Homomorphismen f_{jk} von R_j auf R_k im Falle $k < j$ so angegeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. $f_{jk}(f_{ji}(x)) = f_{ik}(x)$ für $x \in R_i$, $k < j < i$. 2. Ist zu jedem i ein $x_i \in R_i$ mit $f_{ik}(x_i) = x_k$ für $k < i$ ausgewählt, so muß $x_i = 0$ sein. G. Pickert.

Herstein, I. N.: An elementary proof of a theorem of Jacobson. Duke Math. J. 21, 45—48 (1954).

This paper deals with the following theorem of Jacobson: If R is a ring, such that for every element a there exists an integer $n \geq 1$, such that $a^n = a$, then R is commutative [Ann. of Math., II. Ser. 46, 695—707 (1945)]. The author considers this theorem as a generalization of the classical theorem of Wedderburn, that a finite division ring is commutative. Assuming Wedderburn's theorem he proves Jacobson's theorem in an elementary way, i. e. only using simple facts about ideals and polynomial rings, but without use of structure theory of rings. Zorn's theorem is used. W. Peremans.

Herstein, I. N.: On the Lie ring of a simple ring. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 305—306 (1954).

A subgroup U of the additive group of an associative ring A is called a Lie (Jordan) ideal, if $ux - xu \in U$ ($ux + xu \in U$) for all $u \in U$, $x \in A$. If A is simple (non-nil) of characteristic $\neq 2, 3$, then any proper Lie ideal of $[A, A]$ is contained in the centre of A . The author states this and other theorems on the Lie

and Jordan ideals of simple non-nil associative rings of which proofs are to appear later [& some of which he has also announced in the Bull. Amer. math. Soc. **60** (1954) abstracts No. 387, 466].
P. M. Cohn.

Higgins, P. J.: Lie rings satisfying the Engel condition. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 8—15 (1954).

Let L be a Lie ring and denote the inner derivation $a \rightarrow ax$ in L by ad_x . Then L is said to satisfy the n -th Engel condition (E. c.) if $(ad_x)^n = 0$ for all $x \in L$. The author considers conditions under which the n -th E. c. implies the nilpotency of L . Thus, if L satisfies the n -th E. c. and has characteristic prime to $n!$ (i. e. $n!x = 0$ implies $x = 0$), then L is nilpotent if (and of course only if) it is soluble. Further, some identities between inner derivations are proved, leading to the result that i) any Lie ring satisfying the 2nd E. c. is nilpotent ($L^1 = 0$), and ii) a Lie ring satisfying the 3rd or 4th E. c. is nilpotent if its characteristic is prime to 10 or 210 respectively.
P. M. Cohn.

Ikeda, Masatosi and Tadasu Nakayama: On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 15—19 (1954).

Ein Ring A mit Minimalbedingung und Einselement ist dann und nur dann quasi-Frobeniussch, wenn jeder Homomorphismus eines Linksideals von A in A stets durch Multiplikation mit einem Element aus A erhältlich ist. Dieser von M. Ikeda (dies. Zbl. **48**, 25) angegebene Satz wird bewiesen unter Benützung der Resultate von T. Nakayama (dies. Zbl. **26**, 58). Den Ausgangspunkt bildet ein allgemeiner Satz über Ringe ohne Endlichkeitsbedingung, der gewisse Beziehungen zwischen den oben erwähnten Bedingungen und der von Nakayama aufgedeckten Annihilation der einseitigen Ideale aufklärt. Eine ähnliche Überlegung führt die Verff. zu einer ähnlichen Charakterisierung der von Neumannschen regulären Ringe.
K. Shoda.

Whaples, G.: Additive polynomials. Duke math. J. **21**, 55—65 (1954).

The so-called p -polynomials, $f(x) = \sum a_p x^p$ over a field k of characteristic $p \neq 0$ have two interesting properties. They form a ring under addition and „composition“ [since $f(g(x))$ is a p -polynomial if $f(x), g(x)$ are], and they are the only non-trivial „additive“ polynomials (a. p.) over k —that is the only non-trivial $f(x)$ for which $f(x+y) = f(x) + g(y)$. They have been studied extensively by O. Ore (this Zbl. **9**, 100) and others. The author develops a theory of a. p. in connection with the „open“ subgroups, σ , of the additive group k^+ of k , σ being called open if $u(x) \in k[x]$ such that $\sigma \cap u(k) = \{u(x) | x \in k\}$. Starting from the field axioms 1. k has characteristic $p \neq 0$; 2. k has no inseparable extension; 3. k has, for each integer n , at most one extension, (in any algebraic closure) of degree n , and has exactly one extension of degree p , the author's main results are as follows: σ is open if and only if $\sigma = f(k^+)$ for some a. p. $f(x)$ (corollary 1.1 and 10.1); if $f(x)$ is an a. p. then $(k^+ : f(k^+))$ is the number of zeros of $f(x)$ in k (Theorem 8); for each open σ there is an a. p. $g(x)$ such that $\sigma = g(k^+)$, $g(x)$ has all its zeros in k , and each a. p. $f(x)$ for which $f(k^+) \subset \sigma$ has the form $g(h(x))$ (Theorem 9). — Axiom 1. suffices to prove that every open σ contains a set $f(k^+)$ for some a. p. $f(x)$. Axiom 2. implies that the a. p. form both a left and right Euclidean ring. Axioms 2. and 3. together require that each algebraic extension of k is cyclic. Counter examples are provided to show that Axiom 3. is necessary to two of the many interesting results of § 3.
M. C. R. Butler.

Amitsur, S. A.: A general theory of radicals. II. Radicals in rings and bi-categories. Amer. J. Math. **76**, 100—125 (1954).

L'A. applique les résultats généraux de son étude des „radicaux“ abstraits dans les „lattices“ complets [Amer. J. Math. **74**, 771—786 (1952)] aux idéaux bilatères d'un anneau associatif ou non (et indique que la plupart de ces résultats sont valables pour des structures algébriques plus générales, les „bi-catégories“ de Mac Lane). Partant d'une propriété π des idéaux, invariante par homomorphisme, il caractérise par des propriétés supplémentaires les diverses circonstances que l'on rencontre dans la théorie classique du radical: existence du radical, radical d'un sous-anneau et d'un idéal bilatère, relations entre le π -radical et les π -idéaux à droite (ou à gauche), radical d'un anneau de matrices. Lorsqu'un anneau de carré nul a toujours la propriété π , on peut aussi définir un analogue du „radical inférieur“ de Baer, qui se comporte comme ce dernier vis-à-vis du π -radical. Enfin, l'A. montre comment la théorie du F -radical de Brown-McCoy (ce Zbl. **39**, 262) rentre aussi comme cas particulier dans sa théorie.
J. Dieudonné.

Amitsur, S. A.: A general theory of radicals. III. Applications. Amer. J. Math. **76**, 126—136 (1954).

L'A. applique les résultats de ses deux précédents articles [Amer. J. Math. **74**, 774—786 (1952) et le rapp. précéd.] à étendre et simplifier des résultats connus sur les divers „radicaux“ précédemment introduits, et à définir de nouveaux types de „radicaux“. Il montre d'abord comment la théorie des idéaux nilpotents et du „radical inférieur“ de Baer peut être étendue aux anneaux non associatifs, y compris le théorème de Levitzki sur la caractérisation du radical de Baer comme intersection des idéaux premiers. Il indique ensuite brièvement comment sa théorie se spécialise pour le radical de Jacobson, le radical de McCoy et le „noyau localement fini“ de Levitzki. Parmi les propriétés π qu'il signale comme donnant lieu à de nouveaux „radicaux“, mentionnons: 1. la propriété PI de satisfaire à une identité polynomiale (ceci s'applique uniquement aux algèbres); 2. la propriété FI , qui, pour un anneau quelconque R , signifie que dans tout anneau quotient de R , tout idéal à droite qui contient des éléments non nilpotents contient au moins un idempotent. J. Dieudonné.

Fuchs, L.: On the fundamental theorem of commutative ideal theory. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5**, 95—99 und russische Zusammenfassg. 99 (1954).

Soit R un anneau commutatif, soumis à la seule condition d'avoir un élément unité. Etant donné un idéal A de R , l'A. résout le problème suivant: à quelles conditions existe-t-il une décomposition unique $A = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$ en puissances d'idéaux premiers avec exposants minimaux, telle que tout idéal $B \subset A$ distinct de R soit lui aussi un produit $P_1^{l_1} \dots P_r^{l_r}$ avec $0 \leq l_i \leq k_i$. Ces conditions (nécessaires et suffisantes) sont les suivantes: 1. les idéaux contenant A satisfont à la condition minimale; 2. désignant, pour un diviseur premier P de A , par $A(P)$ l'idéal des $x \in R$ tels qu'il existe $e \in P$ tel que $e x \in A$, alors la condition $A(P) \neq P$ implique qu'il n'existe aucun idéal entre P et P^2 autre que ces deux idéaux. J. Dieudonné.

Siršov, A. I.: Die Unterhalbgebren der freien kommutativen und der freien antikommutativen Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. **34**(76), 81—88 (1954) [Russisch].

For brevity refer to commutative and anticommutative algebras as K -algebras and AK -algebras respectively. Then the author proves the proposition: „Every subalgebra of a free ε -algebra is again a free ε -algebra“ for $\varepsilon = K, AK$. The method of proof follows closely that of the author's paper reviewed in this Zbl. **52**, 30. If R is any set, the ε -regular words in R are defined analogously to the regular words in a free Lie algebra (l. c.): The ε -regular words of length 1 are the non-associative words of length 1 (i. e. the elements of R itself) ordered in any way. If the ε -regular words of length $< n$ have been defined and ordered (so that all words of length m precede all words of length $m+1$), then a word w of length n is called ε -regular, if 1. $w = uv$, where u and v are ε -regular, and 2. $u \geq v$ for $\varepsilon = K$; $u > v$ for $\varepsilon = AK$. The ε -regular words of length n are then ordered in any way to follow the ε -regular words of length $< n$. — Let \mathfrak{A} be the free ε -algebra on the set R over a field F (of characteristic $\neq 2$ if $\varepsilon = AK$). Then the ε -regular words form a basis of \mathfrak{A} . — For any subalgebra \mathfrak{B} of \mathfrak{A} a set \mathfrak{B} can be defined in exactly the same way as for a Lie algebra (l. c.) and this is shown to be a set of free generators of \mathfrak{B} ; hence \mathfrak{B} is a free ε -algebra. P. M. Cohn.

Cohn, P. M.: On homomorphic images of special Jordan algebras. Canadian J. Math. **6**, 253—264 (1954).

Eine Jordansche Algebra ist durch die Regeln $a b = b a$, $(a^2 b) a = a^2 (b a)$ definiert. Spezielle Jordansche Algebren werden solche genannt, die aus einem assoziativen Ring durch die Bildung $A B = B A$ hervorgehen. Es ist noch ungeklärt, ob es außer den allgemeinen Regeln weitere gibt, die für alle speziellen Jordanschen Algebren gelten. Jedenfalls läßt sich die Klasse der speziellen Jordanalgebren nicht durch ein System von Regeln charakterisieren. Hier wird nämlich an einem Beispiel gezeigt, daß ein homomorphes Bild einer speziellen Jordanalgebra nicht speziell zu sein braucht. Ernst Witt.

Lyndon, R. C.: Identities in finite algebras. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 8—9 (1954).

A sei das multiplikative System mit dem ausgezeichneten Element 0 und den weiteren Elementen e, b_1, b_2, c, d_1, d_2 , in dem $c e = e, e b_i = d_i, d_i e = d_i, d_i b_k = d_i$ ($i, k = 1, 2$) gilt, während alle anderen Produkte $= 0$ sind. Zu jeder endlichen Menge von in A geltenden Identitäten (z. B. $0 x = 0, (x y) x = 0$) kann man dann

stets eine in A geltende Identität angeben, welche sich nicht aus der endlichen Identitätenmenge herleiten läßt. *G. Pickert.*

Rizza, Giovanni Battista: Sulla struttura delle algebre di Clifford. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 91—99 (1954).

Für die Aufstellung des Analogons der Cauchyschen Integralformel in Clifford-schen Algebren C_n mit der Ordnung 2^n ist die Kenntnis der Verteilung der Nullteiler der C_n wichtig. Verf. beweist, daß diese Nullteiler im 2^n -dimensionalen Darstellungsraum der C_n 2^{n-2} lineare Räume der Dimension $2^n - 4$ bilden, die alle den Ursprung enthalten. Das folgt leicht aus der ebenfalls bewiesenen Tatsache, daß C_n direkte Summe von 2^{n-2} zur Quaternionenalgebra isomorphen Algebren ist. *E. Trost.*

Walker, Gordon L.: Fermat's theorem for algebras. Pacific J. Math. **4**, 317—320 (1954).

Das Polynom $f(x) = x^{p^n} - x$ wird von allen Elementen des Galoisfeldes $(GF(p^n))$ annulliert. Verf. untersucht das Hauptideal $\delta(A)$ aller Polynome $f(x) \in K[x]$, die von sämtlichen Elementen einer Algebra A über dem Körper K annulliert werden. Ist insbesondere A die Matrix-Algebra der Ordnung m^2 über $K = GF(p^n)$, dann wird $\delta(A)$ durch das Polynom $f(m, p^n, x)$ erzeugt, das das kleinste gemeinsame Vielfache aller Polynome vom Grade m in $K[x]$ ist, und zwar ist $f(m, p^n, x) = (x^{p^n} - x)(x^{p^{2n}} - x) \cdots (x^{p^{mn}} - x)$. Das reduziert sich für $m = 1$ auf den bekannten Satz von Fermat. Zwei weitere Sätze über halbeinfache Algebren der Charakteristik p und Algebren mit einem Radikal beschließen die Arbeit.

W. Gröbner.

Vivier, Marcel: Sur les annulateurs des formes extérieures. C. r. Acad. Sci. Paris **238**, 548—550 (1954).

Soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ n formes extérieures de degré pair $2d$, complètement décomposables et telles que $\omega_i \wedge \omega_j \neq 0$, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \neq 0$, d'une algèbre extérieure \mathfrak{A} de degré $2nd$. Pour $d = 1$, l'annulateur de la forme quadratique $A = \sum_{i=1}^n \omega_i$ est un idéal homogène complètement décomposable. Par l'emploi d'un algorithme approprié et grâce à la notion de degré réduit d'une forme l'A. généralise ce résultat au cas où $d > 1$.

Th. Lepage.

Springer, T. A.: An algebraic proof of a theorem of H. Hopf. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 33—35 (1954).

H. Hopf proved with topological methods (this Zbl. **23**, 383) that the only hypercomplex systems K over the field R of the real numbers which (i) are commutative, (ii) possess no divisors of zero, are R and $R(i)$. The author gives an algebraic proof of this result which therefore applies to any real closed field R . The proof is surprisingly simple: Let e_1, \dots, e_n be a basis of K over R , and let multiplication of two elements $\xi = \sum_{\mu=1}^n x_\mu e_\mu, \eta = \sum_{\nu=1}^n y_\nu e_\nu$ be defined by $\xi \eta =$

$\sum_{\mu, \nu, \lambda=1}^n a_{\mu\nu}^\lambda x_\mu y_\nu e_\lambda$, (ii) implies (ii') $|a_{\mu\nu}^\lambda| \neq 0$ ($1 \leq \lambda \leq n$), and (iii) $\xi^2 = 0$ only if $\xi = 0$. From (i) and (ii) it follows that (iv) $\xi^2 - \tau \cdot 1 = 0$ has 0 or 2 solutions. Considering also complex vectors $\xi = \xi + i\eta$, it follows that (v) $\xi^2 = 0$ implies $\xi = 0$, and (vi) that for real $\tau = \sum_{\lambda=1}^n r_\lambda e_\lambda \neq 0$, $\xi^2 = \tau$ has 0, 2 or 4 solutions which are either real or pure imaginary. But these solutions are identical with the points of intersection in complex projective space P_n of the n hypersurfaces $\sum_{\mu, \nu=1}^n a_{\mu\nu}^\lambda z_\mu z_\nu = r_\lambda z_0^2$ [by (v) there are no intersections with $z_0 = 0$]. As these points are real or pure imaginary, it follows from (ii') that their multiplicity is 1. By Bézout's theorem, their number is 2^n ; hence $2^n = 2$ or 4 , i. e. $n = 1$ or 2 .

F. A. Behrend.

Fried, E.: Über als echte Quotientenkörper darstellbare Körper. Acta Sci. math. **15**, 143—144 (1954).

Eine von P. Turan gestellte Frage wird folgendermaßen beantwortet: Genau die algebraischen Erweiterungen endlicher Körper sind nicht als Quotientenkörper echter Unterintegritätsbereiche darstellbar.

G. Pickert.

Amitsur, A. S.: Differential polynomials and division algebras. Ann. of Math., II. Ser. 59, 245–278 (1954).

F sei ein differenzierbarer kommutativer Körper der Charakteristik Null mit dem Konstantenkörper C . Der Ring $F[t]$ der Differentialpolynome über F ist dann ein nicht-kommutativer Polynomring in einer Unbestimmten t mit der Vertauschungsregel $at = ta + a'$ ($a \in F$, a' Ableitung von a). Der erste Teil der Arbeit bezieht sich im wesentlichen auf die Definition der Resultante zweier Differentialpolynome und das Studium ihrer Eigenschaften. Im zweiten Teil werden diese Ergebnisse auf das Problem angewandt, alle zentralen Divisionsalgebren über C zu konstruieren, die durch F zerfällt werden. Die Brauer-Gruppe gewisser solcher Divisionsalgebren kann bestimmt werden und ist zur ersten Cohomologiegruppe einer gewissen Automorphismengruppe isomorph. — \mathfrak{B} sei ein Vektorraum der Dimension n über F . Eine Differentialtransformation von \mathfrak{B} ist dann eine Abbildung \mathfrak{A} von \mathfrak{B} in sich mit $(v_1 + v_2)\mathfrak{A} = v_1\mathfrak{A} + v_2\mathfrak{A}$ und $(va)\mathfrak{A} = v\mathfrak{A}a + va'$ ($v \in \mathfrak{B}$, $a \in F$). In bekannter Weise können die Differentialtransformationen durch Matrizen beschrieben werden, und es kann für sie eine Ähnlichkeitsrelation eingeführt werden. Ferner werden den Differentialtransformationen charakteristische (Differential-) Polynome in $F[t]$ zugeordnet, die bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt sind. Dabei heißen zwei Polynome $f(t)$ und $g(t)$ ähnlich, wenn die $F[t]$ -Rechtsmoduln $F[t]/f(t)F[t]$ und $F[t]/g(t)F[t]$ isomorph sind. Die Ähnlichkeitsklassen der Differentialtransformationen und der Polynome aus $F[t]$ entsprechen sich dann umkehrbar eindeutig, und jedes Polynom aus $F[t]$ vom Grad n ist charakteristisches Polynom einer Differentialtransformation im n -dimensionalen Vektorraum über F . Die Resultante zweier Polynome $f(t)$ und $g(t)$ aus $F[t]$ wird nun in folgender Weise definiert: $f(t)$ und $g(t)$ sind charakteristische Polynome von Differentialtransformationen \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} der Vektorräume \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B} . Diesen Differentialtransformationen kann eindeutig eine Differentialtransformation \mathfrak{C} des Tensorproduktes $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ zugeordnet werden. Das charakteristische Polynom von \mathfrak{C} wird dann als die Resultante von $f(t)$ und $g(t)$ definiert und mit $f(t) \times g(t)$ bezeichnet. Die Resultante ist bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt, und ihre Bildung ist Ähnlichkeitsinvariant, kommutativ und assoziativ. Sind $f(t)$ und $g(t)$ zwei Polynome von einem Grad > 0 , so gibt es Zerlegungen $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ und $g(t) = g_1(t)g_2(t)$ mit Grad $f_2(t) = 0$ derart, daß $f_2(t)$ und $g_1(t)$ ähnlich sind genau dann, wenn die der Resultante $f^*(t) \times g(t)$ entsprechende Differentialgleichung in F mindestens eine nicht-triviale Lösung besitzt. $f^*(t)$ ist dabei das zu $f(t)$ adjungierte Polynom: Ist $f(t) = \sum_p t^p a_p$, so $f^*(t) = \sum a_p(-t)^p$. Jeder Differentialtransformation \mathfrak{A} des Vektorraumes \mathfrak{B} kann eine Differentialtransformation \mathfrak{A}^* des dualen Raumes \mathfrak{B}^* zugeordnet werden. Entspricht \mathfrak{A} hinsichtlich einer Basis die Matrix A , so entspricht \mathfrak{A}^* hinsichtlich der dualen Basis die transponierte von A . Und ist $f(t)$ das charakteristische Polynom von \mathfrak{A} , so ist $f^*(t)$ das charakteristische Polynom von \mathfrak{A}^* . Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen ergeben sich gleichzeitig Sätze über die Auflösung linearer homogener Differentialgleichungen. — Jedem $f \in F[t]$ kann ein Ring $\mathfrak{R}(f)$ zugeordnet werden: Er besteht aus allen denjenigen Klassen $p(t) = f(t)F[t]$ von $F[t]$, für die $p(t)f(t) = f(t)p_1(t)$ gilt. $\mathfrak{R}(f)$ ist eine endliche Algebra über dem Konstantenkörper C ; ist $f(t)$ irreduzibel, so ist $\mathfrak{R}(f)$ sogar eine Divisionsalgebra. Unter den Polynomen $g(t)$ aus $F[t]$ von einem Grad > 0 werden diejenigen als A -Polynome ausgezeichnet, zu denen es ein Polynom $g(t)$ gibt derart, daß $g(t)g(t)$ zu dem charakteristischen Polynom einer Nullmatrix geeigneten Grades ähnlich ist. Die Menge $\mathfrak{A}(C, F)$ der A -Polynome ist dann hinsichtlich der Ähnlichkeitsrelation und der Operation \times eine Halbgruppe mit Einheit und Kürzungsregel. Ebenso bilden die zentralen einfachen Algebren über C , die durch F zerfällt werden, hinsichtlich der Isomorphie und des Kronecker-Produkts eine Halbgruppe $\mathfrak{E}(C, F)$. Eines der Hauptresultate des zweiten Teils besagt, daß die Zuordnung $g(t) \rightarrow \mathfrak{R}(g)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}(C, F)$ auf $\mathfrak{E}(C, F)$ ist. Die zentralen einfachen Algebren über C bilden hinsichtlich einer geeigneten Ähnlichkeitsrelation sogar eine Gruppe, die Brauersche Gruppe. $\mathfrak{E}(C, F)$ entspricht dabei eine Untergruppe $\mathfrak{B}(C, F)$. Für die A -Polynome läßt sich ebenfalls eine geeignete (schwache) Ähnlichkeit definieren, hinsichtlich derer $\mathfrak{A}(C, F)$ eine zu $\mathfrak{B}(C, F)$ homomorphe Gruppe ist. Der Kern dieses Homomorphismus ist die Gruppe aller linearen Polynome. Die Ergebnisse werden auf die Auflösungstheorie von Differentialgleichungen angewandt, die den A -Polynomen entsprechen. Schließlich sei \mathfrak{D} ein Erweiterungskörper von C . Man kann dann ein Kompositum $F \supset \mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}'$ bilden, so daß F und \mathfrak{D} linear disjunkt über C sind. Die Differentiation kann von F auf $F \supset \mathfrak{D}$ fortgesetzt werden. $F \supset \mathfrak{D}'$ bzw. $F \supset \mathfrak{D}$ seien die entsprechenden additiven Gruppen, und $\mathfrak{L}(F \supset \mathfrak{D})$ sei diejenige Untergruppe von $F \supset \mathfrak{D}$, die aus allen logarithmischen Ableitungen $a^{-1}a'$ ($a \in F \supset \mathfrak{D}$) besteht. Die Brauersche Gruppe aller zentralen einfachen Algebren über C , die von F und \mathfrak{D} zerfällt werden, ist dann isomorph zu einer Untergruppe von $F \supset \mathfrak{D}$ ($F \supset \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{L}(F \supset \mathfrak{D})$). Ist weiter \mathfrak{D} eine normale algebraische Erweiterung von C mit der Galoisgruppe \mathfrak{G} , und ist $M \supset \mathfrak{L}(F \supset \mathfrak{D})$ diejenige maximale Untergruppe von $F \supset \mathfrak{D} \supset \mathfrak{L}(F \supset \mathfrak{D})$, deren Elemente linksinvariant unter \mathfrak{G} sind, dann ist die Brauer-Gruppe aller

Divisionsalgebren über C , die durch F und \mathcal{G} zerfällt werden, isomorph mit $M/(F^+ + \mathcal{L}(F\mathfrak{D}))$. Und ebenso ist diese Gruppe isomorph zur ersten Cohomologie-Gruppe von \mathcal{G} mit Koeffizienten in der additiven Gruppe $\mathcal{L}(F\mathfrak{D})$. Abschließend wird untersucht, welche Ergebnisse sich auf den Fall der Charakteristik p übertragen lassen.

H.-J. Kowalsky.

Amitsur, A. S.: Non-commutative cyclic fields. Duke math. J. **21**, 87—105 (1954).

Les „extensions cycliques“ qu'étudie l'A. sont les corps (commutatifs ou non) F ayant un sous-corps C qui est le corps des invariants d'un groupe cyclique d'automorphismes \mathcal{G} de F , d'ordre n , et tel en outre que F soit un espace vectoriel à droite de dimension n sur C (cette seconde condition n'est pas conséquence de la première, comme le montre un exemple). La méthode de l'A. consiste à associer à l'automorphisme σ générateur du groupe \mathcal{G} la „dérivation“ $Dx = x^\sigma - x$ [telle que $D(a b) = a^\sigma D b + (D a) b$] et remarquer que les éléments de F satisfont à l'„équation différentielle“ $((D + 1)^n - 1)z = 0$; il utilise essentiellement un de ses théorèmes antérieurs (ce Zbl. **34**, 198) d'après lequel un corps dont tous les éléments satisfont à une telle équation différentielle linéaire d'ordre ν à coefficients dans C , est de dimension $\leq \nu$ sur C . Lorsque F est de caractéristique p , et que $n = p^e$, on peut ainsi obtenir une base de F sur C formée de n éléments a_i tels que $a_1 = 1$, $a_{p^{i-1}} = a_{p^i+1} + a_{p^i}$. L'A. en déduit que dans ce cas toute extension cyclique de C de degré p est engendrée de façon analogue aux extensions cycliques des corps commutatifs de caractéristique p , comme quotient d'un „anneau de polynômes“ $C[t]$ par un idéal premier bilatère de cet anneau engendré par un polynôme de la forme $t^p - t - a$; mais les „polynômes“ de $C[t]$ ont pour coefficients des éléments de C écrits à droite, et le calcul s'y fait suivant la règle $ct = tc + D_0 c$ pour tout $c \in C$, D_0 étant une dérivation de C . On a un résultat analogue lorsque n est premier à la caractéristique de F , que le centre de C contient une racine primitive n -ème ω de l'unité et qu'on considère seulement les extensions cycliques F dont le centre contient ω : alors on a une base (a_i) de F sur C telle que $a_i^p = \omega^i a_i$, et F est quotient de $C[t]$ par l'idéal premier bilatère engendré par un polynôme de la forme $t^n - a$; mais ici le calcul dans $C[t]$ se fait suivant la règle $ct = t c^\varrho$, où ϱ est un automorphisme de C . L'A. donne aussi des théorèmes plus compliqués, analogues aux résultats classiques d'Albert pour les corps commutatifs, et qui énoncent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une extension cyclique de degré p^e puisse être plongée dans une extension cyclique de degré p^{e+1} (si C est de caractéristique p) ou pour qu'une extension cyclique de degré m de C puisse être plongée dans une extension cyclique de degré qm lorsque qm est premier à p , que le centre de C contient une racine primitive q -ème ω de l'unité et qu'on ne considère que des extensions cycliques de C dont le centre contient ω . Il caractérise, dans les cas étudiés, les extensions F qui sont simplement des produits tensoriels $C \otimes \Delta$, où Δ est une extension commutative du centre F de C , de degré n : ce sont celles pour lesquelles la dérivation D_0 est intérieure, ou l'automorphisme ϱ est intérieur. Un autre type „trivial“ d'extensions cycliques correspond au cas où σ est intérieur; l'A. donne des critères pour qu'il n'en soit pas ainsi et en déduit des exemples d'extensions cycliques qui ne peuvent pas être obtenues par combinaison d'extensions „triviales“.

J. Dieudonné.

Kawada, Yukiyo: On the structure of the Galois group of some infinite extensions. I, II. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, **7**, 1—18, 87—106 (1954).

I. Es handelt sich um die Kennzeichnung der Galoisgruppe gewisser unendlicher Körpererweiterungen durch freie topologische Gruppen. Sei F_N die freie Gruppe mit dem Erzeugendensystem $\{\sigma_\lambda; \lambda \in I\}$, wobei N die Kardinalzahl von I bezeichne. Ein Normalteiler H von F_N wird p -Untergruppe genannt, wenn $[F_N:H] = p^n$ ist und H alle bis auf endlich viele der σ_λ enthält. Betrachtet man die Gesamtheit der p -Untergruppen von F_N als Umgebungssystem des Einselementes von F_N , so wird dadurch in F_N eine Topologie eingeführt. Die abgeschlossene Hülle von F_N bei dieser Topologie wird als freie topologische p -Gruppe F_N^* bezeichnet. Sei nun k entweder (I) ein Körper der Charakteristik p oder (II) ein Körper mit einer von p verschiedenen Charakteristik, der eine primitive p -te Einheitswurzel enthält und der keine (nichtkommutative) Schiefkörpererweiterung vom Exponenten p gestattet. Ferner bezeichne Ω_p die maximale p -Erweiterung von k , d. h. die Vereinigung aller normalen Erweiterungen von einem Grad p^n über k , und sei φ/k die additive Gruppe aller Elemente der Form $x^p - x$ mit $x \in k$, sowie k^* die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente aus k . Dann gilt (Satz 1): Sei N die Kardinalzahl einer Minimalbasis im Falle (I) der additiven Gruppe φ/k über dem Primkörper von k und im Falle (II) der multiplikativen Gruppe k^* (k^*) p , dann ist die Galoisgruppe von Ω_p/k (als topologische Gruppe im Sinne von Krull) topologisch isomorph zur Gruppe F_N^* . Der Beweis, der ausführlich nur für den Fall (I) durchgeführt wird, stützt sich wesentlich auf einen Existenzsatz von E. Witt für galoische Körper der Charakteristik p (dies. Zbl. **13**, 196). Im Falle eines p -adischen Zahlkörpers kann eine weitergehende Aussage gemacht werden (Satz 2): Sei k ein p -adischer Zahlkörper, der eine primitive p -te Einheitswurzel enthält, und sei R_p der rationale p -adische Körper, dann ist die Galoisgruppe \mathcal{G} von Ω_p/k eine topologische p -Gruppe mit $N = [k:R_p] + 2$ Erzeugenden und einer definierenden Relation. Die definierende Relation

wird genauer gekennzeichnet und insbesondere gezeigt, daß sie nicht trivial ist. Satz 2 ist ein Gegenstück zu einem Ergebnis von I. R. Šafarevič (dies. Zbl. 41, 171), der gezeigt hat, daß \mathfrak{G} eine freie topologische Gruppe mit $N = [k:R_k] + 1$ Erzeugenden ist, falls k keine primitive p -te Einheitswurzel enthält. — 11. Es werden kohomologietheoretische Eigenschaften der Galoisgruppe gewisser unendlicher Erweiterungen über einem Körper k , der entweder alle Einheitswurzeln oder aber alle p^n -ten Einheitswurzeln ($n = 1, 2, 3, \dots$) enthält, untersucht. Für derartige Grundkörper und endliche Erweiterungen werden zunächst klassenkörpertheoretische Eigenschaften hergeleitet und sodann gezeigt, daß diese äquivalent als kohomologietheoretische Eigenschaften der Galoisgruppe entsprechender unendlicher Erweiterungen gedeutet werden können. Zum Schluß wird die Frage behandelt, inwieweit die Struktur topologischer p -Gruppen durch kohomologietheoretische Eigenschaften bestimmt ist. Es ergibt sich dabei insbesondere, daß gewisse Ergebnisse dieser Arbeit mit Satz 1 von Teil I in Beziehung stehen. Für Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *F. Kasch.*

Šafarevič, I. R.: Über durch Radikale auflösbare Erweiterungen algebraischer Zahlkörper. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 225–227 (1954) [Russisch].

Es sei k ein endlich-algebraischer Zahlkörper. Verf. kündigt einen Beweis dafür an, daß es zu jeder endlichen auflösbaren Gruppe \mathfrak{G} einen galoisschen Körper K/k mit der Gruppe \mathfrak{G} gibt. [Für p -Gruppen mit $p \neq 2$ s. Arnold Scholz, dies. Zbl. 16, 6 und H. Reichardt, dies. Zbl. 16, 151; für beliebige p -Gruppen s. Verf., Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 261–296 (1954)]. Dazu werden gewisse „universeller“ Gruppen G als Faktorgruppen freier Gruppen derart angegeben, daß jede auflösbare Gruppe Faktorgruppe einer geeigneten Gruppe G ist. Durch Aufspaltung von G in eine Normalkette wird die Konstruktion eines Körpers K/k mit der Gruppe G auf ein Einbettungsproblem zurückgeführt. Ein Körper mit gewissen arithmetischen Eigenschaften, die schon bei Scholz, l. c., die fragliche Einbettbarkeit garantierten (s. a. Verf., l. c.), heißt „vom Scholzschen Typus“. Verf. gibt für die vorkommenden Gruppenerweiterungen (G von N) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ein Körper vom Scholzschen Typus (mit der Gruppe G/N) einbettbar ist in einen Körper vom Scholzschen Typus (mit der Gruppe G). *G. Beyer-H. Hasse.*

Šafarevič, I. R.: Zum Einbettungsproblem von Körpern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 459–461 (1954) [Russisch].

Gegeben sei ein Homomorphismus q der endlichen Gruppe G auf eine Gruppe F mit dem Kern \mathfrak{G} , sowie ein galoisscher Zahlkörper K/k mit der Gruppe F . Das Einbettungsproblem besteht in der Aufgabe, K/k in einen Körper K'/k mit der Gruppe G und q als natürlichem Homomorphismus der Galoisgruppen einzubetten. 1. G sei zerfallende Erweiterung von \mathfrak{G} (d. h. die zugehörige Faktorsystemklasse von \mathfrak{G} ist 1). Ist \mathfrak{G} abelsch, so ist das Einbettungsproblem stets lösbar [A. Scholz, Math. Z. 30, 332–356 (1929), dort nicht ausdrücklich erwähnt, aber im Beweis enthalten; andere Konstruktion bei Delone und Faddeev, Mat. Sbornik, n. Ser. 15, 245–284 (1944)]. Verf. kündigt eine Verallgemeinerung des Scholzschen Beweises an für den Fall, daß \mathfrak{G} eine p -Gruppe von einer Klasse $\geq p$ ist; oder daß \mathfrak{G} nilpotent ist und die Ordnungen von \mathfrak{G} und F teilerfremd sind. Beweismethode ähnlich wie beim Einbettungsproblem der vorsteh. referierten Arbeit. 2. Aufkündigung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für Einbettbarkeit im folgenden Fall: G ist die proflie p -Gruppe ($p \geq 3$) aus drei Erzeugenden der Ordnung p , deren Klasse 3 ist. F ist abelsch vom Typus (p, p, p) . K ist „vom Scholzchen Typus“ (s. vorsteh. Referat), und k enthält die p^2 -ten Einheitswurzeln. Die Bedingungen sind tatsächlich schärfer als die etwa vom 2. Ref. (dies. Zbl. 32, 255) angegebenen, womit eine Vermutung desselben widerlegt ist (ein erstes Gegenbeispiel gab kürzlich Faddeev, vgl. nachsteh. Referat, bei dem G eine 2-Gruppe ist). *G. Beyer-H. Hasse.*

Faddeev, D. K.: Über eine Hypothese von Hasse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 1013–1016 (1954) [Russisch].

Es wird durch ein Gegenbeispiel die Vermutung (V) des ersten Ref. (dies. Zbl. 32, 255) widerlegt, daß die von ihm angegebene notwendige Bedingung für die Einbettbarkeit eines galoisschen Körpers k/k_0 mit der Gruppe \mathfrak{N} in eine galoissche Algebra mit der Gruppe \mathfrak{G} ($\mathfrak{G} \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$), gegeben ist überdies der natürliche Homomorphismus der Galoisgruppen (\mathfrak{G} und \mathfrak{N}) auch hinreichend. Vorausgesetzt wurde vom Ref., daß \mathfrak{N} abelsch vom Exponenten n_0 ist, daß die Charakteristik von k nicht in n_0 aufgeht und daß k die n_0 -ten Einheitswurzeln enthält. Das Gegenbeispiel betrifft den folgenden Fall: k_0 = rationaler Zahlkörper; $k = k_0(\sqrt[7]{2}, \sqrt[4]{-1})$, k entsteht also durch Adjunktion von $\sqrt[7]{2}$ zum 8-ten Einheitswurzelkörper und \mathfrak{N} ist abelsch vom Typ $(2, 2, 2)$; \mathfrak{N} ist die zyklische Gruppe der Ordnung 8. Nun sei \mathfrak{G}_1 die Erweiterung von \mathfrak{N} durch $\mathfrak{N}_1 \simeq (2)$

mit nichtzerfallendem Faktorensystem, die in \mathfrak{N} den Automorphismus $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ induziert, wobei \mathfrak{G}_1 die Invarianzgruppe von $k_0(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-1})$ innerhalb \mathfrak{F} bedeutet. Dann ist \mathfrak{G} das direkte Produkt von \mathfrak{G}_1 mit $(2, 2)$. Verf. zeigt, daß in diesem Fall die notwendige Bedingung des Ref. erfüllt ist. Daß k/k_0 trotzdem nicht einbettbar ist, zeigt sich durch Betrachtung eines partiellen Einbettungsproblems: es müßte sich sonst mit einem geeigneten b aus k_0 der Körper $k_0(\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{b})/k_0$ in einen Körper mit der Gruppe \mathfrak{G}_1 über k_0 , der Gruppe (4) über $k_0(\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{b})$ einbetten lassen. [Nach einem Resultat von Delone und Verf., Mat. Sbornik, n. Ser. **15**, 243—284 (1944), kann nämlich ohne Einschränkung in unserem speziellen Ausgangsproblem das Wort „Algebra“ durch „Körper“ ersetzt werden.] Verf. zeigt, daß es ein solches b nicht gibt. H. Hasse. — G. Beyer.

Baker jr., G. A.: Einstein numbers. Amer. math. Monthly **61**, 39—41 (1954).

Verstehen wir unter „Einstein-Zahlen“ solche reellen Zahlen, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen positiven Zahl c liegt, und definieren wir zwei Verknüpfungen

$$a \oplus b = (a + b)/(1 + a b/c^2); \quad a \odot b = c \mathfrak{T}g [1/\mathfrak{U}rtg(a/c) \mathfrak{U}rtg(b/c)],$$

so bilden die Einsteinzahlen einen Körper S , bei dem c dieselbe Rolle wie ∞ im Körper R der reellen Zahlen spielt. Die Transformation $y = c \mathfrak{T}g x$ ($x \in R$, $y \in S$) vermittelt eine Isomorphie zwischen R und S . H. J. Kanold.

Cohn, P. M.: An invariant characterization of pseudo-valuations on a field. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 159—177 (1954).

Every pseudo-valuation $W(x)$ (see K. Mahler, this Zbl. **13**, 51) of a commutative field F defines a metric, hence a topology on F . The author solves the following two questions. (1) Which topologies \mathfrak{T} of F can be defined by means of pseudo-valuations? Answer: F must contain an open bounded non-empty set and \mathfrak{T} is either discrete or there are in F non-zero nilpotent (i. e., $x^n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$) elements with respect to \mathfrak{T} . (2) Which pseudo-valuations of F can be expressed as the upper bound of a set of valuations? Answer: The radical of $W(x)$ [i. e. the set of all x with $W(x^n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$] is bounded. There exist pseudo-valuations of fields that do not have this property. — Both answers can be put in other forms, and the author investigates the problems in great detail. K. Mahler.

Conrad, Paul: On ordered division rings. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 323—328 (1954).

Verf. gibt zunächst ein Kriterium für die Anordenbarkeit eines Schiefkörpers K . Dann und nur dann kann K angeordnet werden, wenn eine Bewertung f von K existiert, deren Restklassenring \bar{K} so anordenbar ist, daß folgende Bedingung erfüllt wird: Sind $a_1, \dots, a_n \in K$ und ist $f(a_1^2 \cdots a_n^2)$ das Nullelement der Wertgruppe von f , so ist die Restklasse von $a_1^2 \cdots a_n^2$ positiv. Dies ist die Verallgemeinerung eines Satzes von R. Baer [S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. **1927**, math.-naturw. Kl. Nr. 8, 3—13 (1927), insbesondere 10—11] und W. Krull (dies. Zbl. **4**, 98, insbesondere Satz 22 dieser Arbeit), daß sich ein Körper dann und nur dann anordnen läßt, wenn eine Bewertung desselben existiert, deren Restklassenkörper anordenbar ist. Bezeichnet man die durch eine Anordnung von K bestimmte Bewertung als die natürliche Bewertung des so geordneten Schiefkörpers, so wird zusätzlich gezeigt: K kann dann und nur dann so angeordnet werden, daß die natürliche Bewertung mit f übereinstimmt, wenn K archimedisch anordenbar ist. Hiernit wird ein von W. Krull für Körper erhaltenes Resultat (a. a. O., Satz 22) auf Schiefkörper ausgedehnt. Den Schluß der Arbeit bilden einige Sätze über die Erweiterung geordneter Schiefkörper. O. Föllinger.

Aubert, Karl Egil: Über Bewertungen mit halbgeordneter Wertgruppe. Math. Ann. **127**, 8—14 (1954).

Verf. untersucht systematisch die Möglichkeit, den Begriff der (Exponenten-)Bewertung eines kommutativen Körpers K dadurch zu verallgemeinern, daß man die Wertgruppe nur halbgeordnet (im Sinne Birkhoffs) voraussetzt und im übrigen die Bedingung $w(a-b) = \min(w(a), w(b))$ passend modifiziert. Ergelange so zu einer Theorie, in deren Rahmen sich die Untersuchungen von Zelinsky, Jaffard und Fuchs über verallgemeinerte Bewertungen leicht einordnen lassen. — Es sei I die halbgeordnete, im Sinne von Bourbaki „filternde“ Wertgruppe, die Verf. von dem sonst in der Bewertungstheorie üblichen Gebrauch abweichend, multiplikativ schreibt. e sei ihr Einheitsselement, Ω die Untergruppe aller $x \geq e$. Nach Lorenzen spricht man von einem (endlichen) r -Idealsystem in I , wenn jeder endlichen, von unten begrenzten Untermenge a von I eine Menge $a_r \supseteq a$ so zugeordnet ist, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. $a \subseteq c_r \rightarrow a_r \subseteq c_r$. 2. Wenn $a = \{\alpha\}$, dann $a_r = \alpha \cdot \Omega$. 3. $\alpha \cdot a_r = (\alpha \cdot a)_r$. — Ist nun K der zu bewertende Körper, K^* die durch Weglassung des Nullelementes entstehende multipli-

ative Gruppe, und ist in I ein festes r -Idealsystem ausgezeichnet, so versteht man unter einer r -Bewertung von K^* mit der Wertgruppe I eine homomorphe Abbildung w von K^* auf I , bei der für $a \pm b$ stets $w(a \pm b) = (w(a), w(b))$. Offenbar ist stets $w(1) = e$. Durch einen leichten Kunstgriff erhält man $w(-a) = w(a)$. Weiter ergibt sich: Die Menge aller $a \in K^*$ mit $w(a) \in \Omega$ bildet nach Hinzunahme der 0 einen Unterring von K , den zu w gehörigen r -Bewertungsring I_w . — Setzen wir für einen Integritätsbereich I mit dem Quotientenkörper K stets $I^* = I \cap K^*$ und E^* gleich der größten multiplikativen Untergruppe von I , so kann bei der r -Bewertung w offenbar I mit der durch Auszeichnung von $I^*, E^* = \Omega$ halbgeordneten Gruppen K^*, E^* identifiziert werden. Ordnen wir andererseits bei beliebigem I die Gruppe $K^* E^*$ halb mit $\Omega = I^*/E^*$ als ausgezeichnetem Unterhalbgruppe und wählen wir in $I^* E^*$ ein bestimmtes r -Idealsystem, so kommen wir dann und nur dann auf diese Weise zu einer r -Bewertung von K mit I als r -Bewertungsring, wenn für jedes r -Ideal \mathfrak{a} aus $I^* E^*$ die Menge aller $a \in K$ aus \mathfrak{a} , durch Hinzunahme der 0 additiv abgeschlossen wird. — In jeder halbgeordneten Gruppe gibt es nach Lorenzen zwei ausgezeichnete Idealsysteme, das e -Idealsystem und das s -Idealsystem. Es ist daher sinnvoll zu fragen: Wann ist I ein e - bzw. s -Bewertungsring? Die Antwort lautet: 1. Jeder I ist ein e -Bewertungsring. 2. I ist dann und nur dann s -Bewertungsring, wenn I einen Bewertungsring im üblichen Sinne des Wortes darstellt. — Satz 1 ist wohlbekannt. Satz 2, der eine neue Charakterisierung der üblichen Bewertungsringe liefert, bildet das wichtigste spezielle Ergebnis der vorliegenden Arbeit.

W. Krull.

zahlkörper. Funktionenkörper:

Fröhlich, A.: On fields of class two. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 35—256 (1954).

Die Arbeit bezieht sich durchgehend auf normale algebraische Zahlkörper. Ein solcher gehört zur Klasse 2, wenn seine Galoisgruppe (über den rationalen Zahlen) nicht-kommutativ ist, ihr Zentrum aber die Kommutatorgruppe enthält; er heißt höchstens von der Klasse 2, wenn er von der Klasse 2 ist oder wenn seine Galoisgruppe abelsch ist. Es wird ein Überblick über alle diese Körper gegeben. Eine Gruppe der betrachteten Art ist direktes Produkt von Primzahl-Potenz-Gruppen ebenfalls höchstens von der Klasse 2. Es genügt daher, nur solche Zahlkörper zu betrachten, deren Grad über den rationalen Zahlen eine Primzahlpotenz ist. Ist die Galoisgruppe eines Körpers K , so wird unter dem Kommutatorkörper von K derjenige Unterkörper verstanden, der bei der Galoisschen Zuordnung der Kommutatorgruppe von Γ entspricht. Die Aufgabe wird nun in folgender Weise zerlegt: Zunächst werden diejenigen Körper untersucht, die maximal von der Klasse 2 sind, und deren Kommutatorkörper maximal abelsch ist. Jeder Körper der Klasse 2 ist Unterkörper eines solchen maximalen Körpers. Und umgekehrt können die Unterkörper dieser speziellen Körper vollständig übersehen werden. Schließlich werden alle diejenigen Körper charakterisiert, die höchstens von der Klasse 2 sind und einen gegebenen (nicht notwendig maximalen) abelschen Körper als Kommutatorkörper besitzen.

H.-J. Kowalsky.

Fröhlich, A.: On the absolute class-group of Abelian fields. J. London math. Soc. 29, 211—217 (1954).

Anwendung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit. Über dem Grundkörper der rationalen Zahlen werden abelsche Körper K von Primzahlpotenz-Grad betrachtet und folgende Erweiterungskörper untersucht: Die maximale abelsche Erweiterung K^* , der maximale zentrale Klassenkörper \bar{K} (die Galoisgruppe von \bar{K}/K liegt im Zentrum der Galoisgruppe von K) und der maximale (l^h-2) -Klassenkörper \tilde{K} . K^* ist der Kommutatorkörper dieser Erweiterungskörper. Ein abelscher Körper K wird komplett genannt, wenn $K = K^*$ ist. Für komplette Körper wird die Struktur der Galoisgruppe angegeben. Schließlich werden alle abelschen Körper, deren Grad eine Potenz der Primzahl l ist und deren absolute Klassenzahl prim zu l ist, vollständig bestimmt.

H.-J. Kowalsky.

Urazbaev, B. M.: Über die Anzahl der zyklischen Körper des Grades l^h . Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Astron. Fiz. Mat. Mech., Razd. Mat. Mech. (7), Nr. 129, 51—57 (1954) [Russisch].

Die Anzahl der zyklischen Körper des Grades l^h mit der Diskriminante $= (p_1 \cdots p_r)^{h-1} (q_1 \cdots q_s)^{h-1} \cdots (r_1 \cdots r_t)^{h-1}$ beträgt $\varphi(l^h)^{\alpha-1} \varphi(l^{h-1})^\beta \cdots \varphi(l)^\gamma$. Hierbei sind l, p_i, q_i, \dots, r_i Primzahlen und $p_i \equiv 1 \pmod{l^h}$, $q_i \equiv 1 \pmod{l^{h-1}}$, \dots , $r_i \equiv 1 \pmod{l}$.

R. Kochendörffer.

Carlitz, Leonhard: The first factor of the class number of a cyclic field. Canadian J. Math. **6**, 23—26 (1954).

Der erste Faktor h der Klassenzahl des Kreiskörpers $R(e^{2\pi i/p})$, wo R den rationalen Zahlkörper und p eine Primzahl > 3 bedeutet, ist bekanntlich durch $h = (2p)^{-(p-3)/2} \prod_u f(Z^u)$

($u = 1, 3, \dots, p-2$), gegeben, wobei $f(x) = \sum_{i=0}^{p-2} r_i x^i$, $Z = e^{2\pi i/(p-1)}$, r eine Primitivwurzel mod p , und r_i der positive kleinste Rest von r^i mod p ist. Nun sei K ein Unterkörper von $R(e^{2\pi i/p})$ des Grades a mit $p-1 = ab$, wo b ungerade > 1 ist. Der erste Faktor der Klassenzahl von K ist durch $h_a = 2^{-(a-2)/2} p^{-a/2} \prod_u f(Z^{bu})$ gegeben. Bezüglich h zeigte Vandiver

1918—19 ($n \geq 1$) $h \equiv 2^{-(p-3)/2} p \prod_s B_{s,p^{n+1}} \pmod{p^n}$ ($s = 1, 3, \dots, p-2$), wobei B_m natürlich Bernoullische Zahlen bezeichnen. Verf. zeigt nun bezüglich h_a , was nach Beeger sicherlich ganz ist, ($n \geq 1$) $h_a \equiv 2^{-(a-2)/2} \prod_u B_{bu,p^{n+1}} \pmod{p^n}$ ($u = 1, 3, \dots, a-1$). Für $n = 1$

ergibt sich hieraus $h_a \equiv 2^{-(a-2)/2} \prod_u \frac{B_{bu+1}}{bu+1} \pmod{p}$. Der erste Faktor der Klassenzahl von K ist also dann und nur dann durch p teilbar, falls mindestens ein Zähler von B_{bu+1} ($u = 1, 3, \dots, a-1$) durch p teilbar ist. Ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, $a = 2$, $b = (p-1)/2$, so ist K der quadratische Körper $R(\sqrt{-p})$ und $-h_a$ gleich der Klassenzahl h von K . Somit gilt $h \equiv -B_{(p-1)p^{n/2+1}} \pmod{p^n}$. Z. Suetuna.

Dénes, Peter: Über die Kummerschen logarithmischen Hilfsfunktionen. Acta Sci. math. **15**, 115—125 (1954).

Das Ziel der Arbeit ist, die nötigen Hilfsmittel zu Strukturuntersuchungen der irregulären Kreiskörpereinheiten zu schaffen, die Verf. in einer späteren Arbeit entwickeln will. l sei eine ungerade Primzahl und K der Kreiskörper, welcher aus dem rationalen Zahlkörper durch Adjunktion einer primitiven l -ten Einheitswurzel ζ entsteht. Bekanntlich ist dann eine Zahl ω aus K als Polynom $\omega(\zeta)$ in ζ mit rationalzahligen Koeffizienten darstellbar. Wenn man dabei den Grad von $\omega(\zeta)$ nach ω auf höchstens $l-2$ beschränkt, so sind die Koeffizienten von $\omega(\zeta)$ eindeutig bestimmt; diese Normalform von $\omega(\zeta)$ wird mit $\omega^*(\zeta)$ bezeichnet. Man ersetze in $\omega(\zeta)$ ζ durch e^x (x ist ein reeller Parameter) und setze $D_m \log \omega(e^x) = (d^m dx^m) \log \omega(e^x)$. Verf. beweist dann die folgenden Sätze: 1. Ist ω eine zu l prime Zahl aus K , für die die Kongruenzen

$$D_{li^y} \log \omega(e^x) \equiv 0 \pmod{l^{y+1}} \quad (1 \leq y \leq n-1, 1 \leq i \leq l-2),$$

$$D_{kln} \log \omega(e^x) \equiv 0 \pmod{l^{n+1}} \quad (1 \leq k \leq t-1), \quad D_{ltn} \log \omega(e^x) \equiv q \not\equiv 0 \pmod{l}$$

bestehen, so ist $\omega = f_0 + f_t(1 - \zeta)^{n(l-1)t} ((1 - \zeta)^{n(l-1)t-1})$. Dabei sind f_0, f_t zu l prime, ganze rationale Zahlen, und es sind:

$f_0 \equiv \omega_0 + l(l-1)^{-1} D_{l(l-1)} \omega(e^x) (l^{n+1})$, $f_t \equiv (-1)^t \omega_0 q / l^n (t!) (l)$, wo $\omega_0 = \omega(e^0)$ gesetzt ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist auch gültig. 2. Ist ω eine zu l prime Zahl aus K , welche mit einer ganzen rationalen Zahl mod l^n kongruent ist, und bezeichnet $\omega(e^x)$ ein beliebiges zu ω gehöriges Polynom, $\omega^*(e^x)$ die Normalform von $\omega(e^x)$, so gilt die Kongruenz $\omega(e^0) \equiv \omega^*(e^0) \pmod{l^{n+1}}$ dann und nur dann, wenn $D_{l^n(l-1)} \log \omega(e^x) \equiv 0 \pmod{l^n}$ ist. M. Moriya.

Samet, P. A.: Algebraic integers with two conjugates outside the unit circle. II. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 346 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. **50**, 265). Es wird gezeigt, daß die Zahlen von S'_2 vom Grad $n > 2$ überall dicht in $|x| > 1$ sind, d. h. daß S'_2 auch dann noch nicht abgeschlossen ist, wenn man daraus die reellen quadratischen ganzen Zahlen wegläßt. E. Hlawka.

Dufresnoy, Jaques et Charles Pisot: Sur les petits éléments d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1551—1553 (1954).

Verff. setzen ihre Untersuchungen über die ganzzahlgebräichen Zahlen θ , deren Konjugierte alle im Einheitskreis liegen, fort (siehe dazu dies. Zbl. **47**, 275; **50**, 264; **51**, 29, 282). Es bezeichne S_1 die Menge der Zahlen θ , die Nullstellen der Polynome $1 - z^2 \pm z^n (1 + z - z^2)$ ($n = 1, 2, \dots$) sind, und es seien θ_k bzw. θ_k^* die Zahlen θ , die Nullstellen der durch $(1 - z) P_{2n} = 1 - z^{2n} (1 + z - z^2)$, $(1 - z^2) P_{2n+1} \equiv 1 - z^{2n+1} (1 + z - z^2)$, $(1 + z) P_{2n}^* \equiv 1 + z^{2n} (1 + z - z^2)$, $P_{2n+1}^* \equiv$

$1 + z^{2n+1}(1 + z - z^2)$ gegebenen Polynome P_k bzw. P_k^* sind. Ferner sei $\theta = \theta^{**}$ Nullstelle des Polynoms $1 - z + z^2 - z^3 + z^3(1 - z + 2z^2 - z^3)$ und $\theta_\infty = (1 + \sqrt{5})/2$. Dann wird bewiesen: Die Zahlen $\theta < \theta_{16}^*$, die nicht zu S_1 gehören, sind die Zahlen θ_k^* mit $k = 1, 2, \dots$, die Zahlen θ_k^* mit $k \geq 16$ und die Zahl θ^{**} . Der einzige Häufungspunkt der Zahlen $\theta < \theta_{16}^*$ ist θ_∞ . F. Kasch.

Bergman, Gösta: On the exceptional points of cubic curves. Ark. Mat. 2, 489—535 (1954).

Let Ω be a number field, A and B elements of Ω such that $4A^3 \neq 27B^2$, and let G be the Abelian group of all exceptional points (x, y) , where $x, y \in \Omega$, on the cubic $y^2 = x^3 - Ax - B$. The author continues earlier work, in particular by T. Nagell (see e. g. this Zbl. 48, 271) on this group G . He gives parametric formulae for A and B if G is of the types (4, 2), (8), (2, 5), (2, 2, 3), (4, 3), (4, 4), (8, 2), and (2, 3, 3), and he determines G in the two cases (i) $A \neq 0$, $B = 0$, $N = 2, 4$, or odd, and (ii) $A = 0$, $B \neq 0$, $N = 2, 3$, or prime to 6, N being the degree of Ω . K. Mahler.

Zahlentheorie:

Gabard, E.: Sur deux factorisations. Mathesis 63, 117—119 (1954).

Sexton, C. R.: Counts of twin primes less than 100000. Math. Tables Aids Comput. 8, 47—49 (1954).

Ser, J.: La disposition des restes dans les deux classes de nombres premiers. Mathesis 63, 18—20 (1954).

Singh, Daljit: Concerning the reciprocal of a prime. Amer. math. Monthly 61, 32—34 (1954).

Carlitz, L.: A theorem of Ljunggren and Jacobsthal on Bernoulli numbers. Proc. Amer. math. Soc. 5, 34—37 (1954).

Jacobsthal has proved the formula (1)
$$\sum_{r=1, (r, m)=1}^{[(m-1)/2]} (r + mB)^{2q} = \frac{1}{2} m B_{2q} \prod_{p|m} (1 - p^{2q-1})$$
 ($m > 2$), where B_{2q} denotes the Bernoulli number in the even suffix notation and the product is extended over all primes p dividing m (this Zbl. 36, 12). He also proved a similar formula where r is restricted to the range $1 \leq r \leq m$. (1) was proved by the reviewer for the special case $m = p^r$ (this Zbl. 30, 198). Making use of the multiplication formula for the Bernoulli polynomial and the corresponding theorems for the Euler polynomial $E_k(x)$ as well as for the Bernoulli and Euler polynomials of higher order, the author derives formulas like (1) and its similar formula. As an example we mention the following result

$$\sum_{r=1, (r, m)=1}^m \left(-1 \right)^r E_k \left(\frac{r}{m} \right) = m^{1-k} E_k(0) \prod_{p|m} (1 - p^{k-1}).$$

W. Ljunggren.

Carlitz, L.: Note on the cyclotomic polynomial. Amer. math. Monthly 61, 106—108 (1954).

Es sei $p \geq 3$ Primzahl. Wir setzen $m = (p-1)/2$, $\varepsilon = (-1)^m$. Aus der bekannten Gleichung $4[(t+1)^p - 1]t = U^2(t) - \varepsilon p V^2(t)$, wobei $U(t)$, $V(t)$ Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten sind, werden für diese Koeffizienten einige Kongruenzbeziehungen (mod p) hergeleitet. H. J. Kanold.

Brenner, J. L.: Linear recurrence relations. Amer. math. Monthly 61, 171—173 (1954).

The most general linear recurrence relation (over integers) can be written in the form (1) $u_{n+1} = \alpha_0 u_n + \alpha_1 u_{n-1} + \dots + \alpha_{k-1} u_{n-k+1} + a$, where k is positive, a and α_i are integers ($i = 0, 1, \dots, k-1$), and $\alpha_{k-1} \neq 0$. If integral values $u_{-1}, u_0, \dots, u_{k-2}$ are prescribed, the values u_{k-1}, u_k, \dots can be computed in succession from (1). By use of matrix methods the author proves the following two theorems: 1. Modulo an arbitrary prime p which does not divide α_{k-1} , the values u_n given by (1) are periodic with period dividing $\prod_{i=0}^{k-1} (p^{k-i} - p^i)$. 2. If any one of $u_{-1}, u_0, \dots, u_{k-2}$,

is 0, then there is an infinite number of terms u_n which are divisible by any fixed prime p , p not dividing α_{k-1} . W. Ljunggren.

Kale, M. N.: A note on magic squares of 9 cells. *Math. Student* **21**, 107—108 (1954).

Bieberbach, Ludwig: Über Stiefelsche magische Quadrate. I. *Arch. der Math.* **5**, 4—11 (1954).

Stiefelsche magische Quadrate sind solche, die auch nach dem Entfernen des Kranzes der Randfelder magisch bleiben, d. h. derart mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besetzt sind, daß jede Zeile, Spalte und Diagonale dieselbe Summe ergibt. Bisher waren nur Beispiele und Berandungsvorschriften bekannt. In der vorliegenden Arbeit werden allgemeine Sätze gezeigt, die den Bau solcher Quadrate, insbesondere derjenigen mit gerader Felderzahl, aufklären. R. Sprague.

Natucci, Alpinolo: Ricerche sistematiche intorno al „teorema di Catalan“. *Giorn. Mat. Battaglini* **82** (V. Ser. 2), 297—300 (1954).

Raine, Charles W.: Fibonacci equiareal triangles. *Scripta math.* **20**, 96—98 (1954).

The object of this note is to show that any group of 4 consecutive Fibonacci numbers, a, b, c, d is associated with a pair of equiareal triangles with sides and areas expressed by integers. Autoreferat.

Rosati, Luigi Antonio: Sull equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **9**, 59—63 (1954).

Erdős has conjectured that the diophantine equation mentioned in the title has a solution in positive integers x_1, x_2, x_3 for any given positive integer n greater than 1. The present author continues the work of Obláth (this Zbl. **39**, 34) and shows that this is the case if $n < 141649$ or if n has a factor in certain arithmetic progressions. To show this, he uses the fact that the equation is solvable for a given n if and only if n has a prime factor expressible in one of the forms $4hars - 4ha^2 - s$ or $4har - (4ha^2 + 1)/s$, where h, a, r, s are positive integers with $rs > a$. P. T. Bateman.

Obláth, R.: Über die Gleichung $x^m + 1 = y^n$. *Ann. Polon. math.* **1**, 73—76 (1954).

The author continues his investigation of the conjecture that there are not integral solutions of the title equation with $m > 1, n > 1$ other than $x^m = -1, 0, 8$. He gives a simple proof of an unpublished theorem of R. Hampel that there are no solutions with $|x - y| = 1$ and indeed shows that $|x - y| = 1$ implies $|x^m - y^n| \geq \max(5, y + 1)$ except when $x = \pm 2, y = \pm 1, n = 2$ or $x = \pm 1, y = \pm 2, m = 2$ or for the solutions noted. He further remarks that his criteria for the solubility of $x^2 - 1 = y^n$ (this Zbl. **26**, 101) now show that it is insoluble for $n < 25.000$ (apart from the trivial solutions) following work of Lehmer on $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}$ (cf. N. G. W. H. Beeger, this Zbl. **44**, 269). J. W. S. Cassels.

Hemer, Ove: Notes on the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$. *Ark. Mat.* **3**, 67—77 (1954).

The author gives some corrections and additions to an earlier paper (Diss. Uppsala 1952). He has succeeded in solving all the equations with $0 < k \leq 100$. For $k = 8$ the first complete solution was given by the reviewer in 1942 (this Zbl. **28**, 8). W. Ljunggren.

Nagell, Trygve: Verallgemeinerung eines Fermatschen Satzes. *Arch. der Math.* **5**, 153—159 (1954).

The author proves that the diophantine equation $x^2 + 2 = y^n, n > 3$, has no solutions in rational integers x and y . However, this theorem is not new. It was proved by the reviewer in 1943 (this Zbl. **28**, 109). In either case use is made of a theorem due to K. Mahler (this Zbl. **12**, 394). Further is proved that the equation $x^2 + 8 = y^n, n > 2$, has no solutions in positive integers x and y when n is not a

prime $n \equiv 1 \pmod{8}$. If n is such a prime, there is at most one solution in positive integers.

W. Ljunggren.

Nagell, Trygve: On a special class of Diophantine equations of the second degree. Ark. Mat. 3, 51–65 (1954).

The purpose of this paper is to show that the following theorem may be proved by means of elementary methods without using ideal theory: 1. Let D be a given square-free integer $\neq 1$, and let E be one of the four numbers ± 1 or ± 2 . Further, let A and B be variable positive integers, satisfying the following conditions: $AB \equiv D, 1 \leq A \leq B$ for $E = \pm 1$, and $1 \leq A \leq B$ or $E = \pm 2$ or ± 1 . When $E = \pm 2$, $AB \equiv D$ shall be odd. Under these conditions exactly one of the diophantine equations (1) $Ax^2 - By^2 = E$ is solvable in integers x and y . 2. Suppose that the equation (2) $U^2 - DV^2 = 4$ is solvable in odd integers U and V . Further, let A and B be variable positive integers, satisfying the following conditions: $AB \equiv D, 1 \leq A \leq B$. Under these conditions exactly one of the diophantine equations (3) $Ax^2 - By^2 = \pm 4$ is solvable in odd integers x and y , apart from the equation $x^2 - Dy^2 = 4$. In another formulation this is a well-known theorem in the theory of the real quadratic field $K(\sqrt{D})$, see f. ex. Hilbert, J.-Ber. Deutsch. Math.-Veren. 1894/95, Bd. IV (1897). A supplement to this theorem is: If $x = \xi$ and $y = \eta$ are the least positive solutions of (1) in integers, the number $(\xi | A + \eta | B)^2 / E$ is the fundamental solution of $X^2 - DY^2 = 1$. If $x = \xi$ and $y = \eta$ are the least positive solutions of (3) in odd integers, the number $(\xi | A + \eta | B)^2 / 4$ is the fundamental solution of (2). The first part of this supplementary result is proved earlier by D. Schepel (this Zbl. 11, 293).

W. Ljunggren.

Kelly, John B.: A characteristic property of quadratic residues. Proc. Amer. math. Soc. 5, 38–46 (1954).

Verf. gibt zunächst einen neuen Beweis des bekannten Satzes: „Wenn p eine Primzahl der Form $4k + 1$ ist, wenn ferner r ein quadratischer Rest und n ein Nichtrest ist, dann bestehen die Mengen $r + N$ und $n + R$, wo N alle Nichtreste, R alle Reste durchläuft, aus je k Resten und k Nichtresten.“ Sodann wird die folgende Umkehrung bewiesen: „Sei m eine natürliche Zahl der Form $4k + 1$; die $4k$ kleinsten positiven Reste mod m mögen in zwei Klassen A und B von je $2k$ Zahlen zerfallen derart, daß erstens $1 \in A$ und daß zweitens für $a \in A$ und $b \in B$ die Mengen $a + B$ und $b + A$ stets k Elemente aus A und k Elemente aus B enthalten. Alsdann ist m eine Primzahl, und es ist A die Menge der quadratischen Reste, B die Menge der Nichtreste.“ Der Beweis der Umkehrung ist wesentlich schwieriger, das wichtigste Werkzeug sind dabei die m -ten Einheitswurzeln. Die analogen Sätze für Zahlen der Form $4k + 1$ werden ebenfalls angegeben und lassen sich ähnlich beweisen.

O. Perron.

Ankeny, N. C.: Quadratic residues. Duke math. J. 21, 107–112 (1954).

$n(k)$ bezeichne den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest der Primzahl k . Nach Vinogradov [Trans. Amer. math. Soc. 29, 218–226 (1927)] gilt (für $k \rightarrow k_0(\epsilon)$)

(1) $n(k) < k^{1/2 + \epsilon} \log^2 k$, und unter Annahme der erweiterten Riemannschen Vermutung hat Verf. (dies. Zbl. 46, 40) $n(k) = O(\log^2 k)$ bewiesen. Nach unten ist $n(k) = \Omega(\log k)$ bekannt (V. R. Fridlender, dies. Zbl. 33, 352). Verf. beweist jetzt ohne eine unbewiesene Hypothese für alle Primzahlen $k \equiv 3 \pmod{4}$ in be-

rächtlicher Verschärfung von (1): $n(k) < k^{1/2} (k > k_0(\epsilon))$. Beim Beweise wird das Lemma benutzt: Sei $\lambda(k) = 1$ für $k \equiv 7 \pmod{8}$, $= 3$ für $k \equiv 3 \pmod{8}$, $h(k) =$

$\sum_{n=1}^{(k-1)/2} \left(\frac{n}{k}\right)$. Wenn für eine feste natürliche Zahl m $\left(\frac{i}{k}\right) = 1$ für $1 \leq i \leq \left(\frac{1}{2}k\right)^{1/m}$

gilt, so ist $h(k) = o\left(\frac{1}{2}k \log k\right)$ (vgl. Ju. V. Linnik und A. A. Rényi, dies. Zbl.

51, 11). Ferner wird eine asymptotische Aussage über die Funktion $f(x, c)$, die Anzahl der ungeraden natürlichen Zahlen $\leq x$, die keinen Primteiler $\equiv x^c$ besitzen, herangezogen.

H.-E. Richert.

Scholomiti, N. C.: An expression for the Euler φ -function. Amer. math. Monthly 61, 36–37 (1954).

Herleitung der Beziehung $\varphi(a) = \sum_{b=1}^{a-1} \left[\frac{1}{(a, b)} \right]$ für jede natürliche Zahl $a \geq 1$.

H. J. Kanold.

Selberg, Sigmund: On a conjecture by Ernst Jacobsthal. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **26**, 89—93 (1954).

Verf. untersucht die auf E. Jacobsthal zurückgehende Frage, ob die Funktion $\sigma_k(x) = \sum_{\lambda=1}^k \left\{ x \left[\frac{\lambda}{x} \right] - (x+1) \left[\frac{\lambda}{x+1} \right] \right\}$ für alle $x > 0$ nicht negativ ist. Verf. beweist $\sigma_k(x) \geq 0$ ($x > 0$), und unterscheidet zu diesem Zwecke die Fälle x rational und x irrational. H. Ostmann.

Waerden, B. L. van der: Einfall und Überlegung in der Mathematik. III. Der Beweis der Vermutung von Baudet. *Elemente Math.* **9**, 49—56 (1954).

Auf den Verf. geht bekanntlich der erste Beweis des folgenden Satzes (Baudetsche Vermutung) zurück [s. *Nieuw Arch. Wiskunde*, II. Ser. **15**, 212—216 (1927)]: Zu jeder ganzen Zahl $l \geq 1$ gibt es ein $N = N(l, k)$, so daß jede Aufteilung der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq N$, in k beliebige Klassen ($k \geq 1$) die Eigenschaft besitzt, daß in mindestens einer Klasse eine l -gliedrige arithmetische Progression existiert. (In der ursprünglichen Baudetschen Vermutung war $k = 2$, und die aufzuteilende Menge war die Menge aller natürlichen Zahlen.) Verf. gibt in der jetzigen Note eine ausführliche Beschreibung über die Entstehung seines Beweises sowie eine einfache, anschauliche Darstellung des Beweises. Die von M. A. Lukomskaja (s. *Chinč'in*, dies. Zbl. **42**, 40) angegebene Beweisvariante wird ebenfalls kurz skizziert. H. Ostmann.

Prachar, K.: On integers having many representations as a sum of two primes. *J. London math. Soc.* **29**, 347—350 (1954).

Es bezeichne $f(n)$ die Lösungsanzahl von $p + p = n$ in Primzahlen p, p . Bekanntlich gilt $f(n) = O[(n \log \log n) \log^2 n]$. Verf. zeigt, daß diese Größenordnung bereits genau ist, d. h. es gibt für geeignet gewähltes c unendlich viele n mit $f(n) > (c n \log \log n) / \log^2 n$. Genauer beweist Verf. den Satz: Es sei $A(x)$ die Anzahl aller $0 < n \leq x$ mit $f(n) > (c x \log \log x) / \log^2 x$ $\geq (c n \log \log n) / \log^2 n$. Dann ist $A(x) > c^{\alpha} \sqrt{\log x}$ (c, α sind positive Konstante). Abgesehen von der Verwendung bekannter Ergebnisse der Primzahltheorie verläuft der Beweis elementar. H. Ostmann.

Sandham, H. F.: Two series of partitions. *Amer. math. Monthly* **61**, 104—106 (1954).

Es sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n , $n_1 = n \pm \theta$, $1/24, \theta \geq 0$. Verf. beweist die Beziehungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \sinh 2\pi \sqrt{2n_1/3} / \sqrt{n_1} \cosh 3\pi \sqrt{2n_1/3} = 1/\pi \theta \sqrt{2}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) (n - \theta) / \cosh \pi \sqrt{2n} + 4\theta - 1/4 = 0.$$

Atkin, A. O. L. and P. Swinnerton-Dyer: Some properties of partitions. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **4**, 84—106 (1954).

Ist $N(m, q, n)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n mit einem Rang $m \pmod{q}$ (dabei ist der Rang einer Partition gleich größter Summand minus Anzahl der Summanden), dann hat für $q = 5, 7$, F. J. Dyson [*Eureka*, Cambridge, **8**, 10—15 (1944)] eine Reihe von Identitäten vermutungsweise aufgestellt, von denen wir nur die einfachsten angeben, die zugleich eine wesentliche Vertiefung der Ramanujanschen Kongruenzen für $p(n)$ darstellen. $N(m, q, q(n + \frac{1}{2}) + \frac{3}{2})$ ist für $q = 5, 7$ unabhängig von m . Die anderen Beziehungen sind nicht so einfach. Die Verff. beweisen nun alle diese Vermutungen. Dabei werden auch weitere Resultate mit Identitäten für allgemeine q gefunden. E. Hlawka.

Meinardus, Günter: Asymptotische Aussagen über Partitionen. *Math. Z.* **59**, 388—398 (1954).

Nach der Sattelpunktmethode wird ein Satz über Partitionen bewiesen, der ein monotonen Wachstum der Anzahlfunktion nicht zur Voraussetzung hat. Sei $f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}$,

$a_n \geq 0$, konvergent für $\operatorname{Re}(\tau) > 0$, und $f(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{-n\tau}$. Ferner sei $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergent für $\sigma > \alpha > 0$, fortsetzbar bis $\sigma = c_0$, $0 < c_0 < 1$, regulär für $\sigma > c_0$ außer für $s = \alpha$, wo $D(s)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum A besitze, und es gelte $D(s) = O(t^{-\alpha})$ gleichmäßig in σ für $t \rightarrow \infty$, $c_1 > 0$. Weiter gelte für $g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\tau}$ mit

$\tau = y + 2\pi i x$ die Ungleichung $\operatorname{Re}(g(\tau)) = g(y) \leq c_2 y^{-\epsilon}$ bei $|\arg \tau| \leq \pi/4$, $|x| \leq 1/2$, hinreichend kleinem $y > 0$, festem $\epsilon > 0$ und geeignetem $c_2 > 0$. Dann ist $r(n) = O(n^{\alpha} e^{c_1 n^{1/(1+\alpha)}} (1 + O(n^{-\alpha_1}))$, wo $\alpha = (2D(0) - 2 - \alpha)/2(1 + \alpha)$, $\alpha_1 = [\alpha/(\alpha + 1)] \min(c_0/\alpha - \delta/4, 1/2 - \delta)$, δ beliebig > 0 und C, C_1 durch $D(0), D'(0), \alpha, A$ bestimmte Konstanten sind. Die Voraus-

setzungen dieses Satzes treffen zu für die Funktion $f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-kn n\tau})^{-1}$, a, k ganz,

$(a, k) = 1$, $1 \leq a \leq k$, und es gilt für die Anzahl $q(n; k, a)$ der Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen $n_i = a_i k_i$ die asymptotische Gleichung $q(n; k, a) \sim C n^{\alpha} e^{\pi \sqrt{2n/3k}}$ mit

$\alpha = (1 + a/k)/2$. Eine entsprechende Formel gilt, wenn bei der Diskriminante d eines quadratischen Zahlkörpers und $r = 0$ oder 1 die Exponenten $a_n = a_n^{(r)} = 1$ für $\binom{d}{n} = (-1)^r$ und sonst $= 0$ gesetzt werden. Dann ist $r(n) = r_{\nu}(n, d)$ die Anzahl der Partitionen von n in natürliche Zahlen n_i für die das Kronecker-Symbol $\left(\frac{d}{n_i}\right) = (-1)^r$ ist. Es folgt noch

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0(n, d)}{r_1(n, d)} = \varepsilon^k$, wenn $d > 0$, ε die Grundeinheit > 1 in $R(\sqrt{d})$ und h dessen Klassenzahl

bedeutet. Für $d < 0$ wird $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_0(n, d)}{r_1(n, d)} = \omega$ Anzahl der Einheitswurzeln in $R(\sqrt{d})$, durch die Kroneckersche Grenzformel bestimmt.

B. Schoeneberg.

Sandham, H. F.: A square as the sum of 9, 11 and 13 squares. J. London math. Soc. 29, 31–38 (1954).

$r_k(n)$ bezeichne die Darstellungsanzahl der natürlichen Zahl n als Summe von k Quadraten. Verf. bemerkt, daß die Methode von Hurwitz zur Berechnung von $r_3(m^2)$ und $r_5(m^2)$ auch für die Bestimmung von $r_9(m^2)$, $r_{11}(m^2)$ und $r_{13}(m^2)$ anwendbar ist. Die benötigten Identitäten elliptischer Funktionen sind von Jacobi, Glaisher, Ramanujan und Mordell bewiesen worden. Verf. hat früher bereits den (einfacheren) Fall $r_7(m^2)$ erledigt (dies. Zbl. 51, 279).

H.-E. Richert.

Zulauf, Achim: Über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von Primzahlen aus gegebenen Restklassen und Quadraten mit gegebenen Koeffizienten. I. J. reine angew. Math. 192, 210–229 (1954).

Verf. erbringt in der vorliegenden Arbeit den Beweis eines von ihm bereits früher angekündigten Satzes (s. dies. Zbl. 48, 276) über die Kompositionsanzahl von $n = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} p_{\sigma} +$

$\sum_{\tau=1}^t b_{\tau} g_{\tau}^2$, worin die p_{σ} ungerade Primzahlen $\equiv a_{\sigma} \pmod{K_{\sigma}}$, die g_{τ} lediglich ganze Zahlen, $a_{\sigma}, K_{\sigma}, b_{\tau}$ gegebene natürliche Zahlen sind mit $(a_{\sigma}, K_{\sigma}) = 1$; $s = 1$ und $t \geq 0$ sind ganze Zahlen, die der Bedingung $\omega = s + \frac{1}{2}t \geq 2$ genügen. Verf. beweist für die in Rede stehende Kompositionsanzahl $N(n) = \frac{n^{\omega-1} \mathfrak{Z}(n)}{P \Gamma(\omega) \log^{\omega} n} + O\left(\frac{n^{\omega-1} \log \log n}{\log^{\omega+1} n}\right)$, worin $P = \pi^{-t/2} \prod_{\sigma=1}^{\kappa} q(K_{\sigma}) \prod_{\tau=1}^t b_{\tau}^{1/2}$

und $\mathfrak{Z}(n)$ die sogenannte singuläre Reihe ist. $\mathfrak{Z}(n)$ konvergiert absolut, überdies gleichmäßig in n . Den Beweis führt Verf. mittels der Hardy-Littlewood-Linnik-Methode (vgl. auch die oben angeführte Arbeit des Verf.). Der Spezialfall $K_1 = K_2 = \dots = K_s = b_1 = \dots = b_t = 1$ ist bereits bekannt und wurde von Halberstam (s. dies. Zbl. 44, 35) mittels der Vinogradov-Methode gewonnen. Der Spezialfall $K_1 = \dots = K_{\kappa} = K, t = 0$ ergibt eine Verschärfung eines früheren Resultats des Verf. (s. dies. Zbl. 48, 276) insofern, als jetzt eine Restgliedaussage miterhalten wird. Schließlich wird noch der Spezialfall behandelt, in dem in obigen Voraussetzungen lediglich $t = 0$ ist.

H. Ostmann.

Richert, H.-E.: On the difference between consecutive square-free numbers. J. London math. Soc. **29**, 16—20 (1954).

K. F. Roth hatte für die n -te quadratfreie Zahl q_n gezeigt: $q_{n+1} - q_n = O(n^\alpha \log^\beta n)$ mit $\alpha = 3/13$, $\beta = 4/13$ (vgl. dies. Zbl. **43**, 48). Verf. zeigt jetzt, daß die Abschätzung bereits mit $\alpha = 2/9$ und $\beta = 1$ gilt. Er zeigt gleich allgemeiner: Ist $q_n(a, b)$ die n -te quadratfreie Zahl in der arithmetischen Reihe $ma + b$ ($1 \leq b \leq a$, $(a, b) = 1$), dann gilt für $a = O(n^{2/7})$ gleichmäßig in n , a, b für $n \rightarrow \infty$

$$q_{n+1}(a, b) - q_n(a, b) = O(a^{11/9} n^{2/9} \log n).$$

Bei der Herleitung dieses Resultats verwendet der Verf. die von ihm verwendete Methode (vgl. dies. Zbl. **46**, 250). E. Hlawka.

Grey, L. D.: Round table on Fermat's last theorem. Math. Mag. **27**, 274—277 (1954).

Duparc, H. J. A. and A. van Wijngaarden: Note on a previous paper on Fermat's last theorem. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. **2**, 40—41 (1954).

Hinsichtlich des ersten Falles des Fermatproblems ($x^p + y^p = z^p$, $p > 2$ Primzahl, $p \nmid xyz$, $0 < x < y < z$) bewiesen die Verff. (dies. Zbl. **50**, 266) (1) $z > \frac{1}{2}(p^3/(3 + \log 2p) - p)^p$ sowie (2) $z > 10^6 \cdot 10^p$. Verff. zeigen jetzt, daß (1) auch für y gilt, und daß (2) für x, y und z richtig ist. Für x wird noch

$$x > \frac{1}{2}(2pe)^{-(p-1)/(p-\log 2pe)} (\log 2pe^3)^{1-p} (1 - p^{-1} \log 2pe^3) p^{3p-2}$$

abgeleitet. (2) wird unter Verwendung der für die Lösbarkeit notwendigen Bedingung $p \geq 253747889$ gewonnen. H. Ostmann.

Lehmer, D. H., Emma Lehmer and H. S. Vandiver: An application of high-speed computing to Fermat's last theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 25—33 (1954).

Während im sogenannten ersten Fall des Fermat-Problems [d. h. $x^p + y^p = z^p$, $p > 2$ Primzahl, $(x, y, z) = 1$, $(xyz, p) = 1$] auf Grund allgemeiner Kriterien die Unlösbarkeit für alle $p < 253747889$ nachweisbar ist, gelang es im zweiten Fall ($p|xyz$) im wesentlichen lediglich durch gesonderte Betrachtung jedes einzelnen p , die Unmöglichkeit für alle $p < 619$ zu bestätigen. Durch Zuhilfenahme moderner Rechenautomaten (hier: SWAC, Institut für Numerical Analysis, Los Angeles) haben die Verff. die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung auf alle $p < 2003$ ausgedehnt; sie teilen die theoretischen Grundlagen der Programmierung mit, die im ersten Schritt in der Ermittlung aller regulären Primzahlen $p < 2003$ besteht. Es ergeben sich dabei 184 reguläre und 118 irreguläre Primzahlen. Die gelegentlich geäußerte Vermutung, daß die Anzahl der regulären Primzahlen endlich ist, erhält hierdurch keine Erhärtung. Am Schluß der Arbeit ist das Zahlenmaterial tabellarisch angegeben. H. Ostmann.

Breusch, Robert: Another proof of the prime number theorem. Duke math. J. **21**, 49—53 (1954).

Bekanntlich hat A. Selberg 1949 den Primzahlsatz elementar bewiesen. Er zeigte nämlich zuerst die Formel

$$\vartheta(x) \log x + \sum_{p \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p = 2x \log x + o(x \log x),$$

wobei $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ ist, und leitete daraus den Primzahlsatz her. Diese letzte Herleitung

gibt Verf. nun folgendermaßen an. Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\vartheta(x)}{x}\right) = a$ ist, so ist $A + a = 2$.

Wird also $A = 1 + \gamma$ gesetzt, ist $0 < \gamma < 1$. Zu beweisen ist natürlich $\gamma = 0$. Also sei angenommen $\gamma > 0$. Bei passendem großem x sei nun das Intervall $R = (\log x, x \log x)$ so in $m - 1$ Teilintervalle ($m = [h^{-1}(\log x - 2 \log \log x)]$) eingeteilt, daß beim t -ten Teilintervall $I_t = (x_{t-1}, x_t)$ $x_t = x_{t-1} e^h$ ist ($t = 1, 2, \dots, m$), wobei h eine genügend kleine positive Zahl bedeutet. Somit sei N_1 die Anzahl derjenigen Teilintervalle, daß für jedes n in ihnen $\vartheta(x/n) < (1 - \gamma + 7h)x/n$ wäre, und N_2 die Anzahl derjenigen Teilintervalle, daß für jedes n in ihnen $(1 - \gamma + 7h)x/n < \vartheta(x/n) < (1 - \gamma/2)x/n$ wäre. Daraus würde sich ergeben

$$\sum_{n \in R} \vartheta\left(\frac{x}{n}\right) < x(h + h^2) \left((m + 1)(1 + \gamma + h^2) - N_1(2\gamma - 7h + h^2) - N_2\left(\frac{3}{2}\gamma + h^2\right) \right).$$

Wenn p_1 solche Primzahlen in R durchläuft, daß $\vartheta(x/p_1) < (1 - \gamma + h)x/p_1$ gilt, so wäre $\sum(p_1^{-1} \log p_1) > (1 - 4h) \log x$; und die Anzahl der Teilintervalle, welche solche p_1 in sich ent-

halten, wäre größer als $m(1-6h)/2$. Ferner gäbe es mindestens $m/200$ solche Teilintervalle, daß für jedes n in ihnen $(1-\gamma/7h)x/n \leq \vartheta(x/n) \leq (1-\gamma/2)x/n$ wäre, wobei B eine gewisse positive Konstante bedeutet. Also würde sich ergeben $\sum_{n \in R} (1-3h)x \log x$. Daß dies Resultat ein Widerspruch ist, läßt sich leicht nachweisen. Dieser neue Beweis wird vielleicht etwas leichtverständlicher als der Selbergsche sein. Z. Suetuna.

Wright, E. M.: A class of representing functions. J. London math. Soc. 29, 63—71 (1954).

A prime-representing function is a function on the set of positive integers into the set of prime numbers. The author discusses conditions on a sequence of real functions q_1, q_2, \dots under which $[q_n(x)]$ is a prime-representing function (of n) for a suitable real number x . He shows that under still further conditions the set of x for which this is true has the power of the continuum, is nowhere dense, and has measure zero. These conditions cover the cases: (i) $q_n(x) = x^{k/n}$, where $k \geq 8/3$, (ii) $q_n(x) = \lambda^n(x)$, where $\lambda(x) = 2^x$, and (iii) $q_n(x) = D^{2^n}$, where $D > 1$.

P. T. Bateman.

Teuffel, E.: Eine Rekursionsformel für Primzahlen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 57, 34—36 (1954).

Verf. beweist die folgende Rekursionsformel für Primzahlen: Die ersten $m-1$ Primzahlen p_1, \dots, p_{m-1} seien bekannt. Man wähle eine natürliche Zahl k mit $k \geq 2 p_{m-1}$ und berechne q_m aus $q_m^k = 1 - \frac{1}{\zeta(k) H_m - 1}$, wo $H_m = \prod_{v=1}^{m-1} (1 - p_v^{-k})$. Dann ist $p_m = [q_m - 1]$. Diese Formel ist jedoch, wie Verf. bemerkt, für numerische Primzahlberechnungen praktisch ungeeignet. H.-E. Richert.

Vinogradov, I. M.: Verteilung der Primzahlen mit vorgegebenem Wert des Legendreschen Symbols nach einem Primzahlmodul. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 105—112 (1954) [Russisch].

Es wird die Gleichverteilung mod q (q Primzahl) der Primzahlen p mit vorgegebenem Wert s für das Legendresche Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ untersucht, und zwar mit der arithmetischen Methode des Verf. [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 17, 3—12 (1953)]. Ist $q < N$, q und N hinreichend groß und $0 < \sigma < 1$, so gilt für die Anzahl $\pi_\sigma(N)$ dieser $p < N$ aus den Restklassen mod q der natürlichen Zahlen $< \sigma q$, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$: $\pi_\sigma(N) = \sigma \pi_1(N) + O(N^{1+\varepsilon} F)$ mit $F = \frac{1}{2} |1 - q/N - N^{-1/6}|$. Verf. erwähnt, daß die gleiche Abschätzung für die Primzahlen mit vorgegebenem Index mod q gilt. H. L. Schmid-G. Beyer.

● **Chowla, S. and W. E. Briggs:** On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus. Boulder (Colorado): University of Colorado 1954. 11 p. (hektographiert).

Um die Frage zu klären, ob es bei den positiven binären quadratischen Formen außer den bekannten Fällen noch weitere Diskriminanten mit einklassigen Geschlechtern geben kann, untersuchen die Verf. L -Reihen $L_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$, wobei $\chi(n)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener reeller Charakter modulo k ist und s positiven Realteil hat, und beweisen: Wenn stets $L_k\left(\frac{53}{54}\right) \neq 0$ für $k \leq 10^{14}$, so gibt es keine derartigen Diskriminanten $\Delta < -10^{14}$; ohne diese Annahme gibt es für $\Delta < -10^{60}$ höchstens eine Stammdiskriminante mit einklassigen Geschlechtern. H. Brandt.

Goldberg, Karl, Morris Newman, E. G. Straus and J. D. Swift: The representation of integers by binary quadratic rational forms. Arch. der Math. 5, 12—18 (1954).

Die diophantische Gleichung $f(x, y) = (a x^2 + b x y + c y^2)/(p + q x y) = m$ besitzt Lösungen für $m = a s^2/p$, $c s^2/p$ ($s = 1, 2, \dots$). Wenn $a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2$

$= p + q x_0 y_0 = 0$ eine ganzzahlige nichttriviale Lösung besitzt mit der Eigenschaft (ax_0, qy_0) teilt (c, qy_0) bzw. (cy_0, qx_0) teilt (a, qx_0) , so gibt es eine arithmetische Progression $m = m_0 + s d$, ($s = 1, 2, \dots$), und $f(x, y)$ stellt alle m aus dieser mit höchstens einer Ausnahme dar. Gibt es indessen solche x_0, y_0 nicht, und sind außerdem a und c Teiler von (b, q) , sowie $(p, q) = 1$, so gibt es höchstens endlich viele $m \neq a s^2/p$, $c s^2/q$, welche von $f(x, y)$ dargestellt werden. *M. Eichler.*

Oppenheim, A.: On indefinite binary quadratic forms. *Acta math.* **91**, 43—50 (1954).

Ist D^2 die Diskriminante der indefiniten, binären, quadratischen Form Q und $L = \min \{ \max(|Q(x, y)|, |Q(u, v)|) \}$ mit $xv - yu = 1$, so gilt $L \leq \frac{1}{2} D$. Das Gleichheitszeichen tritt nur für eine Klasse von Formen ein, die die Null nicht trivial darstellen. Das Minimum ($\frac{1}{2} D$) ist nicht isoliert, denn es gibt unendlich viele nicht äquivalente Formen, die $\frac{1}{2} D - \varepsilon < L < \frac{1}{2} D$ befriedigen. *N. Hofreiter.*

Swinnerton-Dyer, H. P. F.: The inhomogeneous minima of complex cubic norm forms. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 209—219 (1954).

Let K_1 be a real cubic field with complex conjugates K_2 and K_3 . Let $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ be a basis for the integers of K_1 . Then for all real x'_1, x'_2, x'_3 there can be found $x''_i \equiv x'_i \pmod{1}$ such that

$$(*) \quad |\text{Norm}(x''_1 \omega_{11} + x''_2 \omega_{12} + x''_3 \omega_{13})| < 2^{-13/3} |d|^{2/3},$$

where the norm is taken in an obvious sense, and d is the discriminant of the field, provided that $|d|$ is large enough. This statement would become false if the exponent $2/3$ were decreased or the constant $2^{13/3}$ increased. It is remarked however that (in contrast to the quadratic case) the right hand side of $(*)$ can be improved to $2^{-13/3} |d|^{2/3} - C |d|^{1/2}$ for some $C > 0$. Results in this direction had been obtained by Davenport (this Zbl. **51**, 35) and Clarke (this Zbl. **45**, 163). *J. W. S. Cassels.*

Swinnerton-Dyer, H. P. F.: Inhomogeneous lattices. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 20—25 (1954).

Mahler's compactness theorem for homogeneous lattices in R_n [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **187**, 151—187 (1946)] has an obvious analogue for inhomogeneous lattices (see the lecture notes of the Seminar on Geometry of Numbers 1949, Princeton Institute for Advanced Study). This may be used to derive necessary and sufficient conditions for a point set to have inhomogeneous critical lattices, and it can also be applied to the closer study of such critical lattices when e. g. the set is invariant under a group of linear transformations. The author reports on some of his results in this domain and refers to some further work done jointly with E. S. Barnes which has not yet appeared. *K. Mahler.*

Churchhouse, R. F.: An extension of the Minkowski-Hlawka theorem. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 220—224 (1954).

Es sei R ein Bereich in der (x, y) -Ebene, begrenzt von der Kurve $|y| = g(|x|)$ (also symmetrisch in allen vier Quadranten) mit folgenden Eigenschaften: 1. symmetrisch in bezug auf $y = x$, 2. $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, 3. $g(x)$ nicht wachsend und konvex für $0 < x < 1$. Ist $V(R)$ der Flächeninhalt, $A(R)$ die Grenzdeterminante von R , $Q(R) = V(R)/A(R)$, α die eindeutig bestimmte Lösung von $\alpha = g(\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$, dann zeigt der Verf. folgendes: Ist $V(R) > 2\alpha$ (dies ist stets der Fall, wenn $\alpha < 1/4$), so ist $Q(R) > 4$. (— Zeichen für $x, y, 1$). Anwendung auf $|x|^p + |y|^p \leq 1$ ($0 < p < 1$). *E. Hlawka.*

Bambah, R. P.: Lattice coverings with four-dimensional spheres. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 203—208 (1954).

Verf. zeigt für die Dichte Θ_4 der gitterförmigen Überdeckung des R_4 durch Kugeln die Abschätzung $4/15 \leq \Theta_4 \leq 2.5$ und vermutet, daß die obere Abschätzung der wahre Wert ist. Der Beweis benützt natürlich die Theorie der Wabenzellen. *E. Hlawka.*

Rogers, C. A.: A note on theorem of Macbeath. J. London math. Soc. 29, 133—143 (1954).

Let R be an open convex set not a cylinder in n -space; let Γ , of determinant $d(\Gamma)$, be any grid (i. e. a non-homogeneous lattice); and let $V(S)$ and $d(S)$, for any point set S , denote the volume and lattice determinant of S . By means of a long and involved proof, A. M. Macbeath (this Zbl. 47, 49) showed: If $D = \Gamma \cap R$ is not empty, then a point $x \in D$ exists such that (1) $d((R-x) \cap (-R+x)) \leq d(\Gamma)$. The author gives a new proof in a few lines for the stronger result: If $D \neq \emptyset$, then D has at least one exterior point; further every exterior point of D satisfies (1). Here $x \notin G$ is called an exterior point of the arbitrary closed set G if there is a half-space containing x and no other point of G . — The author further proves: Assume that R is unbounded, $D \neq \emptyset$, and that D contains only finitely many exterior points. Then the following three properties hold. (1): There is a closed polyhedral cone C with vertex at o , bounded by finitely many hyperplanes, a point a , and a sphere Ω with centre at o , such that $C + a \subset R \subset C + \Omega + a$. (2): The lattice $A = \Gamma - \Gamma$ has a point on each of the edges of C . (3): $D = F + (A \cap C)$ where F is a finite subset of D . — Next, if (1)–(3) hold, and if $k > 0$ is arbitrary, then $d((R-x) \cap (-R+x)) \leq k d(\Gamma)$ for only finitely many $x \in D$. — In a last section, the author considers the lower bound $V(R, \Gamma)$ of the volume

$$V(R, x) = V((R-x) \cap (-R+x))$$

extended over all $x \in D$. From lemmas in Macbeath's paper, he deduces: There is a positive constant $\lambda_n > 1$ independent of R and Γ such that x is necessarily an exterior point of D if $V(R, x) < \lambda_n^{-1} V(R, \Gamma)$. K. Mahler.

Sawyer, D. B.: The lattice determinants of asymmetrical convex regions. J. London math. Soc. 29, 251—254 (1954).

Let \mathfrak{K} be a bounded convex body in R_n containing the origin O as an inner point, of volume $V(\mathfrak{K})$ and lattice determinant $d(\mathfrak{K})$. Any line through O meets the boundary of \mathfrak{K} in two points P, P' ; let $\lambda(\mathfrak{K}) = \sup_{P, P'} P'O/P'O$ be the coefficient of asymmetry of \mathfrak{K} , and let $\gamma(\lambda, n)$ denote the upper bound $\gamma(\lambda, n) = \sup_{\mathfrak{K}} V(\mathfrak{K})/d(\mathfrak{K})$ extended over all $\mathfrak{K} \subset R_n$ for which $\lambda(\mathfrak{K}) = \lambda$.

In a paper not yet published, the author determined $\gamma(\lambda, 2)$ explicitly, obtaining a rather complicated value. He shows in the present note that, for general n , $\gamma(\lambda, n) \leq (\lambda + 1)^n \cdot \{2^n - (\lambda - 1)^n\}/\lambda^n$ for all $\lambda \geq 1$, but that $\gamma(\lambda, n) \geq (\lambda + 1)^n \cdot n(\lambda - 1)$ if $\lambda \geq 2$. The second result follows easily from an example; the first one is due to the existence of a symmetric convex subset \mathfrak{K} of $\mathfrak{K} \cup (-\mathfrak{K})$ satisfying $V(\mathfrak{K}) \geq [(2\lambda)^n (\lambda + 1)^n \{2^n - (\lambda - 1)^n\}]^{-1} V(\mathfrak{K})$. K. Mahler.

Few, L.: The critical determinant of a displaced convex cylinder. J. London math. Soc. 29, 26—30 (1954).

Let K be a closed convex region in the (x, y) -plane containing the origin O as an inner point and having a point Q as a centre of symmetry. Let C be the convex cylinder of all points (x, y, z) for which $(x, y, 0)$ is in K and $|z| \leq 1$. It is shown that the critical determinants $d(K)$ and $d(C)$ have the same value. The proof is a generalization of the method used by J. H. H. Chalk and C. A. Rogers (this Zbl. 34, 26) to prove the result in the case when $Q = O$. The result was also proved in this special case by Y. Yeh (this Zbl. 34, 26). C. A. Rogers.

Kneser, Martin: Zur Theorie der Kristallgitter. Math. Ann. 127, 105—106 (1954).

Ein sehr kurzer Beweis des von dem Ref. (dies. Zbl. 47, 31) erstmalig bewiesenen Satzes, daß ein Gitter in einem Raume mit definiter Metrik in eindeutiger Weise als eine direkte Summe nicht weiter zerlegbarer Teilgitter geschrieben werden kann. Konstruktive Durchführung der Zerlegung. M. Eichler.

Rogers, C. A.: The product of n non-homogeneous linear forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 50—83 (1954).

Es seien (1) $x_i = a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n$ ($i = 1, \dots, n$) reelle Linearformen mit der Determinante $\Delta > 0$ und es seien b_1, \dots, b_n reelle Zahlen. Die Arbeit befaßt sich mit der Frage, wann die Ungleichungen (2) $|(x_1 + b_1) \dots (x_n + b_n)| \leq 1$, (3) $(x_1 + b_1)^2 + \dots + (x_r + b_r)^2 \leq \epsilon^2$ ($1 \leq r \leq n$), bzw. (2), (3) und (4) $x_1 + b_1 \leq 0, \dots, x_n + b_n \leq 0$ für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen u_1, \dots, u_n haben. Es sei A_n bzw. Γ_n die untere Grenze der Determinanten Δ der Linearformen (1) mit der Eigenschaft, daß die Ungleichung $|x_1 \dots x_n| \leq 1$ bzw. $|(x_1 + b_1) \dots (x_n + b_n)| \leq 1$ keine nicht-trivialen Lösungen hat. Aus der großen Anzahl von Sätzen, die teilweise Verallgemeinerungen von Ergebnissen von Chalk (dies. Zbl. 35,

316) oder des Kroneckerschen Approximationssatzes sind, mögen folgende angeführt werden: I. Ist $0 < A < \min(l_1, \dots, l_n)$, so gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungen von (2), es sei denn, daß $x_i + b_i = \lambda_i(a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n + c_i)$ ($i = 1, \dots, n$), (λ_i reell, a_{ik} ganz, c_i nicht ganz) darstellbar ist. II. Ist $0 < A < \min(l_1, \dots, l_n)$, so haben (2), (3) dann und nur dann unendlich viele Lösungen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Bedingung A. Die Zahl $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r$ ist für alle solchen reellen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ganz, für die die Linearform $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r$ in den u_k ganzzahlige Koeffizienten hat. III. Ist $0 < A < 1$ und gibt es keine reellen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r = 0, \dots, 0$, so daß die Koeffizienten der Linearform $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r$ in den u_k ganz sind, so haben (2), (3), (4) unendlich viele Lösungen. — Diesen arithmetischen Sätzen entsprechen Sätze über Gitterpunkte. Den Linearformen (1) entspricht ein Gitter A mit der Determinante $d(A) = 1$. Ist A_0 ein fester Punkt, so ist die Menge F aller Punkte X von der Gestalt $X = A_0 + A$, $A \in A$ ein Raster (nicht-homogenes Gitter). Es sei $d(F) = d(A)$. Ist S eine Punktmenge, so sei $d(S)$ bzw. $\Gamma(S)$ die untere Grenze der Determinanten $d(A)$ der zulässigen homogenen bzw. inhomogenen Gitter. Es sei $\Omega = \Omega(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die lineare Transformation, die den beliebigen Punkt X in ΩX überführt. Dabei sei $\omega_1 \dots \omega_n = 1$, $\omega_i > 0$. Es sei Σ das System der Mengen S , für die $\Omega S = S$ gilt und die in der Menge $|x_1 \dots x_n| < k$ für alle hinreichend großen k enthalten sind. Hauptgegenstand der Untersuchung ist, wann ein Raster F für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte X in einer Menge S von Σ hat, für die (5) $x_1^2 + \dots + x_r^2 < \varepsilon^2$ ($1 \leq r < n$) gilt. Der Bedingung A entspricht die Bedingung B: Es gibt einen Punkt von F in der kleinsten linearen Mannigfaltigkeit M , die durch Punkte von A erzeugt wird und die Punkte X enthält, für die (6) $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ gilt. Den Sätzen I, II, III entsprechen die Sätze: I*. Enthält die Menge S aus Σ den Punkt 0 und ist $d(F) < \min(d(S), \Gamma(S))$, dann gibt es unendlich viele Punkte von F in S , es sei denn, daß jede Koordinatenachse Punkte $\neq 0$ aus A enthält, während keine $(n-1)$ -dimensionale Koordinatenebene einen Punkt aus F enthält. II*. Enthält die Menge S aus Σ den Punkt 0 und ist $d(F) < \min(\Gamma(S), \Delta(S))$, dann und nur dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte X aus F in S , so daß (5) gilt, wenn die Bedingung B erfüllt ist. III*. Es sei $d(F) = \min(\Gamma(S), \Gamma(S))$ und M sei die lineare Mannigfaltigkeit wie in der Bedingung B. Ist $M = R$, oder enthält M einen Punkt von F und S einen Punkt X , der (6) befriedigt, so gibt es unendlich viele Punkte X aus F in S , die (5) befriedigen. — Der Beweis dieser Sätze ergibt sich mittels einer Reihe von Hilssätzen über homogene und inhomogene Gitter. N. Hofreiter.

Cassels, J. W. S.: Über $\lim_{x \rightarrow \infty} x |\vartheta x + \alpha - y|$. Math. Ann. 127, 288—304 (1954).

Die Ungleichung (1) $x |\vartheta x + \alpha - y| < \frac{1}{11}$, $x > 0$ hat nach Jogin [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski. Mat. 73, 41—44 (1944)] für jedes irrationale ϑ und jedes reelle α unendlich viele Lösungen in ganzen x, y . Es wird ein Verfahren mitgeteilt, das in einer spezifizierten Untersuchung der Kettenbruchnäherungen von ϑ besteht, und das für den Fall $\alpha = m\vartheta + n$, m, n ganz, die kleinst-mögliche Konstante auf der rechten Seite von (1) liefert. Genauer wird folgender Satz bewiesen: Sei ϑ irrational, $\alpha \neq m\vartheta + n$, dann folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} x |\vartheta x + \alpha - y| \leq \frac{4}{11}$, außer wenn $\vartheta = (A\omega + B)/(C\omega + D)$ mit $\omega = \sqrt{7}$, A, B, C, D ganz; $AD - BC = \pm 1$ und $(AD - BC)\alpha = (-3\omega - 7 + 14E + 14F\omega)/14$ $|C\omega + D|$ mit E, F ganz. Für solche ϑ, α ist $\lim_{x \rightarrow \infty} x |\vartheta x + \alpha - y| = \frac{27}{28\sqrt{7}} > \frac{4}{11}$. Das Verfahren ist auch auf verwandte Fragen anwendbar. Th. Schneider.

Pipping, Nils: Über die Elemente der Diagonalkettenbrüche. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 19, Nr. 6, 8 S. (1954).

This is the fourth of a series of studies of diagonal continued fractions by the author (this Zbl. 29, 346; 40, 307; 42, 296). Here are given necessary and sufficient conditions which the elements of a semi-regular continued fraction must satisfy if it is to be a diagonal continued fraction. Illustrative examples are also given.

E. Frank.

Mikusiński, J.: Sur la méthode d'approximation de Newton. Ann. Polon. math. 1, 184—194 (1954).

Let c, a, b be positive integers. The approximants x_n to the solution of the equation $x^2 - c = 0$ are found by Newton's formula (1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, where x_0 is the largest integer contained in \sqrt{c} . The approximants r_n to \sqrt{c} are the approximants of the periodic continued fraction expansion for \sqrt{c} . Then $x_n = r_{2^n - 1}$ if and only if $c = a^2 + 2ab$. In this

case the continued fraction is $a + 1/b + 1/2a + 1/b + 1/2a + \dots$. However, formula (1) always gives the approximants of the continued fraction expansion for $|c|$ if x_0 is chosen as follows: Let a be the largest integer contained in $|c|$ and let the p -th partial denominator of the continued fraction for $|c|$ be $2a$. The p first partial denominators of this continued fraction constitute a period. This period is primitive when the number $2a$ does not appear before the p -th partial denominator. Then, if x_n is taken as the $(p-1)$ -st approximant of $|c|$, $x_{n+1} = x_{2p-1}$. If the primitive period of $|c|$ is $2k$, then all the iterations obtained from (1) with x_0 equal to the $(k-1)$ -st approximant of $|c|$ are also approximants of the continued fraction expansion for $|c|$.

E. Frank.

Mikusiński, J.: Sur certaines fractions continues finies. *Ann. Polon. math.* **1**, 203—206 (1954).

Let each of the $n-1$ fractions $1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$ be developed into a continued fraction, and designate by $K(n)$ the largest number of terms in the finite expansion thus obtained. Then $1/2a < K(n) \log n < 1/a$, $n = 2, 3, \dots$, where $a = \log \left((1 + \sqrt{5})/2 \right)$. Furthermore, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup K(n) \log n = 1/a$. *E. Frank.*

Kuipers, L. and B. Meulenbeld: On a certain classification of the convergents of a continued fraction. II. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. **2**, 32—39 (1954).

Continuing the investigation of the first part (this Zbl. **51**, 37) the authors show that to every $\varepsilon > 0$ there are infinitely many rational irreducible approximations P/Q to every irrational x such that $|x - P/Q| < (3\sqrt{5} - \varepsilon)Q^{-2}$, in every residue class modulo 3 except $P \equiv Q \equiv 0(3)$; where Q may be positive or negative. Further, $3\sqrt{5}$ is the least constant with this property. For more general results cf. R. Descombes, this Zbl. **51**, 284. *J. W. S. Cassels.*

Oppenheim, A.: Criteria for irrationality of certain classes of numbers. *Amer. math. Monthly* **61**, 235—241 (1954).

Wie G. Cantor gezeigt hat, ist die durch die Reihe $x = a_0 + a_1/b_1 + a_2/b_1b_2 + a_3/b_1b_2b_3 + \dots$ dargestellte reelle Zahl x irrational, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind: (1) Die Zahlen a_i ($i \geq 0$) und b_i ($i \geq 1$) sind ganzzahlig und genügen den Ungleichungen $b_i \geq 2$, $0 < a_i < b_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots$); (2) zu jeder natürlichen Zahl q gibt es ein n , so daß q die Zahl $b_1b_2 \dots b_n$ teilt; (3) für unendlich viele i ist $a_i > 0$; für unendlich viele i ist $a_i < b_i - 1$. Verf. stellt verschiedene Verallgemeinerungen dieses Irrationalitätskriteriums auf. Vor allem wird gezeigt, daß man Voraussetzung (2) durch gewisse Voraussetzungen über die Folge $\{a_i/b_i\}$ ersetzen kann. Beispiel (Th. 2): x ist irrational, wenn (1) gilt und einer der Häufungspunkte von $\{a_i/b_i\}$ irrational ist. Ferner werden entsprechende Kriterien für den Fall angegeben, daß die a_i verschiedene Vorzeichen haben.

F. Kasch.

Günther, Alfred: Über transzendente p -adische Zahlen. I. Ein Satz über algebraische Abhängigkeit p -adischer Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise p -adischer Zahlen. *J. reine angew. Math.* **192**, 155—166 (1954).

Let \mathfrak{K} be a fixed field of finite degree over the rational field \mathbb{R} , \mathfrak{p} a prime ideal of \mathfrak{K} dividing the rational prime p , $v_{\mathfrak{p}}$ the \mathfrak{p} -adic value normed such that $|p|_{\mathfrak{p}} = 1/p$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ the \mathfrak{p} -adic completion of \mathfrak{K} , and $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ the ring of \mathfrak{p} -adic integers. Let further $K = \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ be a field of finite degree s over \mathbb{R} , and J the ring of algebraic integers in K . If $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ is a basis of J so that every $x \in K$ can be written as $x = \sum_{\sigma=1}^s a_{\sigma} \omega_{\sigma}$ with $a_{\sigma} \in \mathbb{R}$, $||x|| = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_s|)$ serves as a measure for the size of x . The author shows the following analogue to a theorem by Th. Schneider (this Zbl. **34**, 317): Let $f_{\nu}(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_{\nu h} \frac{x^h}{h!}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) be n power series with coefficients $a_{\nu h} \in J_{\mathfrak{p}}$, and $\{l_m\}$ a sequence of \mathfrak{p} -adic integers such that $|l_m|_{\mathfrak{p}} \leq p^{-3}$ for all m ; $\liminf_{m \rightarrow \infty} |l_m|_{\mathfrak{p}} = 0$. Of its first m elements, let x_{κ} ($\kappa = 1, 2, \dots, k$) be the distinct ones, and let $l_{\kappa} + 1$ be the number of times x_{κ} occurs. Put $\max(l_1, l_2, \dots, l_k) = l$ and assume that

$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log l}{\log m} < 1$. Let there be rational integers $H_\nu(x_\kappa)$ such that the products $H_\nu(x_\kappa) f_\nu^{(\lambda)}(x_\kappa)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, k$; $\lambda = 0, 1, \dots, l_\kappa$; $\nu = 1, 2, \dots, n$) belong to J . Finally write

$$M_\nu = \max_{\kappa, \lambda} \{ \|f^{(\lambda)}(x_\kappa)\|, H_\nu(x_\kappa) \} \text{ and assume that } \sum_{\nu=1}^n \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_\nu}{\log m} < n - 1.$$

Then the functions $f_1(x), \dots, f_n(x)$ are algebraically dependent. — This theorem contains, as very special examples, earlier results due to K. Mahler (this Zbl. 6, 11; 12, 53) and G. R. Veldkamp (this Zbl. 27, 162). The method is essentially that of Schneider's paper, apart from the changes due to the p -adic valuation. K. Mahler.

Analysis.

Mengenlehre:

Brouwer, L. E. J.: Points and spaces. Canadian J. Math. 6, 1--17 (1954).

Lucid exposition of some fundamental notions of intuitionistic mathematics and of a proof of the „Hauptsatz der finiten Mengen“. H. Freudenthal.

Finsler, P.: Die Unendlichkeit der Zahlenreihe. Elemente Math. 9, 29--35 (1954).

Verf. geht von seiner Theorie der „reinen“ Mengen (kurz „Mengen“ genannt) aus. Die Mengen sind ideelle Dinge, die durch eine Relation $x \beta y$ (statt $y \in x$) verknüpft sind, so daß gilt: (a) Jede Menge x bestimmt ihre Elemente, d. h. die Mengen y mit $x \beta y$. (b) Zwei Mengen sind identisch immer, wenn möglich. (c) Ein ideelles Ding ist Menge immer, wenn möglich. — Gewisse Mengen sind „zirkelfrei“, so daß gilt: (d) Eine Menge ist zirkelfrei, wenn ihre Elemente zirkelfrei sind, und sie selbst nicht vom Begriff zirkelfrei abhängt. (e) Eine Menge ist zirkelfrei nur, wenn notwendig. — Es gibt eine Nullmenge 0 mit (f) $0 \beta x$ für kein x . $n = \{m\}$ heißt: $n \beta x$ genau dann, wenn $x = m$. Gewisse Mengen sind „natürliche Zahlen“, so daß gilt: (g) $\{0\}$ ist eine natürliche Zahl. (h) Wenn m eine natürliche Zahl und $n = \{m\}$, dann ist n eine natürliche Zahl. (i) Eine Menge ist eine natürliche Zahl nur, wenn notwendig. — Es ist ersichtlich, daß hier kein Axiomensystem im üblichen Sinne vorliegt. Das Ziel des Verf. ist der Satz, daß es unendlich viele Zahlen gibt. Dazu ist zu zeigen, daß für jede natürliche Zahl m eine Menge n mit $n = \{m\}$ existiert. Dies ergibt sich daraus, daß (1) jede natürliche Zahl eine zirkelfreie Menge ist, (2) jede Gesamtheit zirkelfreier Mengen eine (evtl. nicht zirkelfreie) Menge ist. — Der Beweis von (2) stützt sich wesentlich auf (c), wonach von der „Möglichkeit“ auf die „Existenz“ — es handelt sich ja um ideelle Dinge! — geschlossen wird. Viele Einzelheiten der Beweisführung erscheinen dem Ref. nicht zwingend. P. Lorenzen.

Bernays, Paul: A system of axiomatic set theory. VII. J. symbolic Logic 19, 81—96 (1954).

(Teil VI, dies. Zbl. 30, 115.) Dieser VII. Teil der Bernays'schen Untersuchungen zur Axiomatik der Mengenlehre enthält einen Nachtrag zu Teil II (dies. Zbl. 25, 205), indem gewisse, dort angekündigte mengentheoretische Modelle näher beschrieben werden. Die Hauptergebnisse sind die folgenden: Mit Hilfe eines Modells wird gezeigt, daß die Existenz einer sich selbst enthaltenden Menge mit den Axiomen I—III und V verträglich ist. Ein zweites Modell genügt den Axiomen I—III und VII, aber nicht Va. Dadurch kann gezeigt werden, daß ohne Va die Transitivität einer Menge und die Eigenschaft, daß jede ihrer eigentlichen transitiven Untermengen ein Element von ihr ist, nicht ausreichen, sie als Ordinalzahl zu charakterisieren, ebenso wenig wie die in Teil II angegebene Zermelosche Definition der Ordinalzahl. Für das aus den Axiomen I—III und VII bestehende Grundsystem kann ein zahlen-theoretisches Modell im Rahmen des Systems Z der „Grundlagen der Mathematik“ konstruiert werden. Ferner wird gezeigt, daß das Axiom IIIb(1) überflüssig ist, da es aus den anderen Axiomen abgeleitet werden kann. W. Ackermann.

Schwabhäuser, Wolfram: Zur Definition des geordneten Paares von Mengen beliebiger Stufe. Math. Nachr. 11, 81—84 (1954).

Der n -stellige Stufenkalkül ist so spröde, daß man einen Aufbau vorziehen wird, der, ausgehend von dem leicht zu übersehenden einstelligen Fall, schrittweise an den n -stelligen Fall heranrückt. Dann ist entscheidend der Übergang vom einstelligen zum zweistelligen Fall mit Hilfe der mengentheoretischen Kuratowski-Charakteristik des geordneten Paares x, y durch $[x, y] =_{\text{Dr}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Hier ergibt sich im Stufenkalkül als zusätzliche Aufgabe noch die

Homogeneisierung von x^i, y^k durch Stufenerhöhung für $i \neq k$. Sie muß, wie K. Schröter zutreffend bemerkt hat, so angesetzt sein, daß die ursprünglichen Stufen aus den homogenisierten zurückgewonnen werden können. Im Anschluß an eine seiner Vorlesungen hat Verf. ein hierfür geeignetes Verfahren in dieser Mitteilung ausgeführt. Man setze für eine vereinfachte Anschreibung der erforderlichen Klammerpaare $K_0 x^i =_{\text{Def}} x^i$, $K_{n+1} x^i =_{\text{Def}} \{K_n x^i\}$. Der leitende Gedanke in der zweiten, vereinfachten Konstruktion des Verf. ist dann der folgende. Man definiere eine der Stufenzahl der homogenisierten Komponenten gleichzusetzende Funktion f von i und k mit $f(i, k) = \max(i, k)$ so, daß i und k durch $f(i, k)$ eindeutig bestimmt sind, also z. B. $f(i, k) =_{\text{Def}} 2^i (2k + 1) - 1$. Die zugehörigen Umkehrfunktionen seien g und h mit $g(f(i, k)) = i$, $h(f(i, k)) = k$. Ersetzt man nun $\max(i, k)$ durch $f(i, k)$, so gehen die zu homogenisierenden Komponenten x^i, y^k über in $K_{f(i, k)} x^i, K_{f(i, k)} y^k$. Dann hat die definierende Kuratowski-Menge die Stufenzahl $f(i, k) + 2$, und man erhält aus den homogenisierten Komponenten x^m, y^m die ursprünglichen zurück, indem man bei x^m $m = g(m)$, bei y^m $m = h(m)$ Klammerpaare streicht.

H. Scholz.

Riguet, Jacques: Systèmes de coordonnées relationnels. II. Applications à la théorie des groupes de Kaloujnine. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 435—437 (1954).

(Teil I. dies. Zbl. 50, 51). Verf. skizziert, wie die Resultate über „produits complets“ von M. Krasner und L. Kaloujnine (dies. Zbl. 41, 158; 45, 303) aus der Theorie der 2-stelligen Relationen gewonnen werden können. P. Lorenzen.

Riguet, Jacques: Systèmes de coordonnées relationnels. III. „ τ “, fermetures et systèmes symétriques. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1763—1765 (1954).

(Teil II. s. vorsteh. Referat.) Für eine Menge E sei R_1, \dots, R_n ein System \mathfrak{R} von Äquivalenzrelationen (also $R_i \subseteq E \times E$, $\Delta \subseteq R_i = R_i \bar{R}_i$) mit

(1) $R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n = \Delta$. (2) $R_i(R_1 \cap \dots \cap R_{i-1} \cap R_{i+1} \cap \dots \cap R_n) = E \times E$

für $i = 1, \dots, n$. Ist $M \subseteq E$ eine gemeinsame Vertretermenge aller R_i , dann heißt \mathfrak{R}, M ein „symmetrisches relationelles Koordinatensystem“ und $A_M R_i(x)$ heißt die „ i -te Koordinate“ von $x \in E$. Für $\Sigma \subseteq E \times E$, $\tau \subseteq J \times J$ (mit $J = \{1, \dots, n\}$) sei $\Sigma^\tau = \bigcap_{j,k} R_j \Sigma R_k$. Die Abbildung, die Σ auf Σ^τ abbildet, ist eine Hüllenoperation.

Als „Bewegungsgruppe“ von (\mathfrak{R}, M) wird die Gruppe aller Permutationen Σ^τ von E definiert, für die Σ bzw. τ Permutationen von M bzw. J sind. P. Lorenzen.

Howson, A. G.: Divisibility closure operations. J. London math. Soc. 29, 368—373 (1954).

According to Graham Higman (this Zbl. 47, 34) a set S with a closure operation has the finite basis property with respect to this closure operation, if every closed subset of S is the closure of a finite set. For his closure operation derived from a quasi-order in S he proves: If S has the finite basis property, then so has the set $V(S)$ of all finite sequences of elements of S with respect to a closure operation naturally induced by that in S . The present author extends this theorem to all those closure operations which satisfy: (i) To any $a \in S$ there are only a finite number of distinct closed sets containing a ; (ii) for any two elements $a, b \in S$, $\text{cl}\{a\} \cap \text{cl}\{b\} \neq \emptyset$.

Hanna Neumann.

Popadić, Milan S.: On ordered sets with finite chains. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 5 (1952), Nr. 1, 3—6 und engl. Zusammenfassg. 6—8 (1954) [Serbokroatisch].

Let S be an ordered (not necessarily totally ordered) set; then the author's aim is to prove the equivalence of following statements A and B (cf. this Zbl. 45, 170) A : Each non void subset of S has a point without any predecessor in S , as well as a point having no successor in S ; B : For any set M one has $M \supseteq S$ provided that: 1. there is a segment of S contained in M ; 2. if s is any segment of S so that $s \subseteq S$, $s \subseteq M$, then there exists a segment f of S so that $s \subseteq f \subseteq M$. (Rev. might remark that this equivalence does not hold; however if in A one adds still the conditions that S has a 0-point as well as a 1-point i. e. that S is a segment then one has an equivalence).

G. Kurepa.

Dwinger, Ph.: On the ascending chain condition of cardinal powers of partially ordered sets. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 188—193 (1954).

Zu teilweise geordneten Mengen X, Y bildet man als Kardinalpotenz Y^X die teilweise geordnete Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen von X in Y , in welcher $f \leq g$ als „ $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ “ erklärt ist. Y^X erfüllt genau dann die aufsteigende Kettenbedingung (d. h. alle aufsteigenden Ketten endlich), wenn aus $y, y' \in Y$, $y \leq y'$ stets $y = y'$ folgt oder Y die aufsteigende, X die absteigende Kettenbedingung erfüllt und in keiner unendlichen Teilmenge von X aus $x \leq x'$ stets $x = x'$ folgt. Dieses Ergebnis gestattet, eine ähnliche Aussage über die Ordinalpotenz abzuleiten, die man auch leicht aus den Ergebnissen von P. W. Car-ruth (dies. Zbl. 48, 23) gewinnen kann.

G. Pickert.

Slupecki, J.: Sur la multiplication des types ordinaux. Colloquium math. 3, 41—43 (1954).

Seien η, ω, ω^* die Ordnungstypen der rationalen, der natürlichen und der invers geordneten natürlichen Zahlen. Für jeden Ordnungstypus $\alpha \neq 0$ gibt es Ordnungstypen $\alpha' \neq \alpha$, $\alpha'' \neq \alpha$, so daß

$$(\omega^* + \omega) \cdot \eta \cdot \alpha = (\omega^* + \omega) \cdot \eta \cdot \alpha'; \quad \alpha \cdot (\omega^* + \omega) \cdot \eta = \alpha'' \cdot (\omega^* + \omega) \cdot \eta.$$

Nach Angabe des Verf. stammt der Satz selbst sowie ein Teil des Beweises von W. Sierpiński. Abschließend wird ein von Sierpiński gestelltes Problem betr. eine verwandte Darstellung von Ordnungstypen angehen.

G. H. Müller.

Tarski, Alfred: Theorems on the existence of successors of cardinals and the axiom of choice. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 26—32 (1954).

Die Aussage, daß jede Kardinalzahl m einen Nachfolger hat, läßt folgende, auf Grund des Auswahlaxioms äquivalente Formulierungen zu: (S_1) Zu jedem m gibt es ein n mit $m < n$, so daß $m < g < n$ für kein g gilt. — (S_2) Zu jedem m gibt es ein n mit $m < n$, so daß für jedes g gilt: $m < g \Rightarrow n \leq g$. — (S_3) Zu jedem m gibt es ein n mit $m < n$, so daß für jedes g gilt: $g < n \Rightarrow g \leq m$. — Verf. zeigt, daß (S_1) ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann, und zwar findet er $n = m + \aleph(m)$. Dabei bedeutet $\aleph(m)$ die Mächtigkeit der Menge aller Ordnungszahlen λ mit $\alpha \leq m$, unter λ die Kardinalzahl von λ verstanden. — Aus der Annahme, daß (S_2) gilt, folgert Verf. ohne Auswahlaxiom die Gültigkeit der Relation $m^2 = m$ für jedes $m \geq \aleph_0$. Nach einem vom Verf. in Fundamenta Math. 5, 147—154 (1924) bewiesenen Satz ist daher jedes solche m ein Alef, woraus sich ergibt, daß jede Kardinalzahl entweder endlich, d. h. $< \aleph_0$, oder ein Alef ist. Damit ist gezeigt, daß (S_2) dem Wohlordnungssatz und somit dem Auswahlaxiom gleichwertig ist. — Noch ungelöst ist das Problem, in welchem Verhältnis (S_3) zum Auswahlaxiom steht.

W. Neumer.

Fodor, G. und I. Ketskeméty: Über eine Eigenschaft der singulären Kardinalzahlen. Colloquium math. 3, 39—40 (1954).

Verff. geben einen nur die Cantorsche Ungleichung $2^{\aleph_n} > \aleph_n$ benützenden Beweis des aus der verallgemeinerten Königschen Ungleichung folgenden Satzes: Ist \aleph_n singulär und ω_p die kleinste mit ω_n konfinale Anfangszahl, dann ist $\aleph_n^{\aleph_p} > \aleph_n$.

G. H. Müller.

Rado, R.: The minimal sum of a series of ordinal numbers. J. London math. Soc. 29, 218—232 (1954).

Verf. bestimmt den kleinstmöglichen Wert $s(x)$ bzw. $s(x, y)$, den die Summe aus den sämtlichen Ordnungszahlen $r \in [0, x)$ bzw. $r \in [x, y)$, $x < y$, bei geeigneter Ordnung der Summanden annimmt. Sei p eine beliebige Ordnungszahl, $0 < k < \omega_{p+1}$, $n \leq p$. Dann befindet sich jedes $x \geq \omega_0$ in genau einem Intervall der Form $I_{pk} = [\omega_p^k, \omega_p^k + \omega_0)$ oder $I_{pkn} = [\omega_p^k + \omega_n, \omega_p^k + \omega_{n+1})$, $n < p$, oder $I_{pkp} = [\omega_p^k + \omega_p, \omega_p^{k+1})$. — 1. $s(x) = \omega_p^k (-\omega_p^k + x + 1)$ für $x \in I_{pk}$; $s(x) = \omega_p^k \omega_n$ für $x \in I_{pkn}$, $n \leq p$. — 2. $s(x, y) = x(-x + y)$ für $-x + y < \omega_0 \leq x$; $s(x, y) = x \omega_p$ für $\omega_p \leq -x + y < \omega_{p+1}$, $y \leq x \omega_p$; $s(x, y) = s(y)$, wenn x und y , $y \geq \omega_0$, nicht demselben Intervall I_{pk} oder I_{pkn} angehören. — Bei unendlicher Differenz $-x + y$ gibt es keinen größten Wert für die Summe aller Zahlen $r \in [x, y)$, aber der Limes aller möglichen Summenwerte bei beliebiger Anordnung der Summanden läßt sich leicht bestimmen; er ist z. B. gleich ω_{p+1} für $x + \omega_p \leq y < \omega_{p+1}$ (allgemein gleich $y \omega_{p+1}$ für $\omega_p \leq -x + y < \omega_{p+1}$; Ref.).

W. Neumer.

Neumer, Walter: Über Mischsummen von Ordnungszahlen. Arch. der Math. 6, 244—248 (1954).

Sei S ein System geordneter Mengen und U die Vereinigungsmenge derselben; jede totale Ordnung von U wird die Mischsumme von S genannt und mit $\mathbf{M}X$ ($X \in S$) bezeichnet, falls jedes $X \in S$, als Teil von U betrachtet, dieselbe Ordnung wie früher aufweist. Eine Mischsumme von Ordnungszahlen versteht sich von selbst. Es wird bewiesen: Die Mischsummen $\mathbf{M}(x_1, \dots, x_n)$ von endlich vielen Ordnungszahlen x_1, \dots, x_n haben die Hessesbergsche natürliche Summe $x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n$ resp. die Summe $x_1 \dot{-} x_2 \dot{-} \dots \dot{-} x_n$ als ihr Maximum resp. Minimum; die Operation $\dot{+}$ wird folgendermaßen definiert: wenn $\alpha = \omega \alpha' + a$, $\beta = \omega \beta' + b$ mit $0 < a < \omega$, $0 < b < \omega$, dann sei $\alpha \dot{+} \beta = \sup \{x, \beta\}$ resp. $= \omega \alpha' + a + b$, je nachdem $\alpha \neq \beta$ oder $\alpha = \beta$. Verf. bemerkt, daß i. a. die Mischsumme von x_1, \dots, x_n nicht jeden Wert zwischen diesen extremalen Werten einnehmen kann; so z. B. falls $n = 2$, $x_1 = x_2 = \omega^v$, hat man $\mathbf{M}(\omega^v, \omega^v) \in \{\omega^v, \omega^v \cdot 2\}$, $\omega^v \dot{+} \omega^v = \omega^v$, $\omega^v \dot{-} \omega^v = \omega^v \cdot 2$. Es wird bewiesen, daß die Operation $\dot{+}$ kommutativ und assoziativ ist.

G. Kurepa.

Bachmann, Heinz: Normalfunktionen und Hauptfolgen. Commentarii math. Helvet. 28, 9—16 (1954).

Die Note behandelt die ordinalen Normalfunktionen und das Problem der Hauptfolgen für Ordnungszahlen $[O. Z.] < \omega_1$ (s. dies. Zbl. 41, 21). Jedem geordneten Paar (α, β) von O. Z. sei eine O. Z. $f(\alpha, \beta)$ zugeordnet; dann heiße f eine arithmetische Operation, falls für $\alpha > 1$, $\beta > 1$ und jedes feste α die Funktion $f(\alpha, \beta)$ eine Normalfunktion von β und für festes β f eine monotone Funktion von α ist so, daß $f(\alpha, \beta) > \alpha$. Wenn zu einer O. Z. ξ eine O. Z. α_0 existiert, so daß $f(\alpha, \xi) = \xi$ für $\alpha_0 \leq \alpha < \xi$, so heiße ξ eine Hauptzahl bezüglich f ; wenn noch dazu ξ Limeszahl > 2 ist, so heiße ξ eine eigentliche Hauptzahl. Der Satz 5 lautet: „Damit die Werte einer Normalfunktion ψ mit dem Argumentbereich W genau die eigentlichen Hauptzahlen einer arithmetischen Operation sein können, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Zahl 1. Art ξ (einschließlich $\xi = 0$) $\psi(\xi)$ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl ist“. (W = Klasse aller O. Z.; additive Hauptzahlen sind von der Form ω^ξ). In bezug auf das Problem der ausgezeichneten Folgen (cf. loc. cit.) werden sieben mit demselben Problem äquivalente Aussagen dargestellt.

G. Kurepa.

Schütte, Kurt: Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Math. Ann. 127, 15—32 (1954).

Verf. entwickelt zunächst mit einer etwas andersartigen Symbolik das von O. Veblen [Trans. Amer. math. Soc. 9, 280—292 (1908)] eingeführte System von Funktionen, das feste Bezeichnungen für die Ordnungszahlen eines weitgehenden Abschnitts der II. Cantorsche Zahlenklasse liefert. Anschließend werden Rekursionen zur Größenvergleichung von Ordnungszahlen gegeben, die den Übergang von der nichtkonstruktiven Veblenschen Methode zu einer konstruktiven Behandlung ermöglichen. Nahe verwandte Systeme geben die Verbindung zu Systemen mit eindeutig bezeichneten Ordnungszahlen, z. B. zu dem des Ref. (dies. Zbl. 42, 50). Dabei ergibt sich unmittelbar eine Abbildung des betreffenden durch die Bezeichnung erfaßten Abschnitts auf die natürlichen Zahlen unter Benutzung der Primzahlzerlegung. Der Nachweis der Wohlordnung durch einen konstruktiven Beweis läßt sich in ähnlicher Weise wie in der letztgenannten Arbeit durchführen.

W. Ackermann.

Rado, R.: Direct decomposition of partitions. J. London math. Soc. 29, 71—83 (1954).

Als Zerlegung \mathcal{A} einer Menge A von natürlichen Zahlen wird eine Darstellung von A als Vereinigung von sich nicht überdeckenden Teilmengen A_e verstanden (e durchläuft eine Indexmenge von beliebiger Kardinalzahl $\leq \infty$). Sie wird durchweg als binäre, reflexive, symmetrische und transitive Relation in A angesehen. Die Kongruenz $a \equiv a' (\mathcal{A})$ bedeutet, daß die Elemente

a, a' von A derselben Klasse A_0 von A angehören. Ist $A = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_l$, d. h. die Menge aller l -tupel (b_1, b_2, \dots, b_l) mit $b_\lambda \in B_\lambda$, so heißt eine Zerlegung Δ von A das direkte Produkt der Zerlegungen Δ_λ von B_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$), falls die Relation $(b_1, \dots, b_l) \equiv (b'_1, \dots, b'_l) (\Delta)$ dann und nur dann gilt, wenn $b_\lambda \equiv b'_\lambda (\Delta_\lambda)$ ist. Das Problem, um das es sich in Fortführung früherer Untersuchungen (gemeinsam mit P. Erdős, dies. Zbl. 38, 153; 48, 282) handelt, lautet: Für eine Zerlegung Δ von $B_1 \times \dots \times B_l$ werden „große“ Teilmengen B'_λ von B_λ gesucht derart, daß die durch Δ in $B'_1 \times \dots \times B'_l$ bestimmte Zerlegung das direkte Produkt passender Zerlegungen Δ_λ der B'_λ wird. Verf. erhält hierüber sehr allgemeine Sätze, die vielfacher Spezialisierung fähig sind. Als einfachste Beispiele seien genannt (mittels Matrizen formuliert): A. Zu jeder natürlichen Zahl r gibt es eine natürliche Zahl k_r derart, daß jede Matrix α vom Typus (k_r, ∞) eine Teilmatrix α' vom Typus (r, ∞) mit einer der folgenden Eigenschaften enthält: (1) Alle Elemente von α' stimmen überein. (2) Je zwei Elemente derselben Zeile von α' sind gleich, in verschiedenen Zeilen verschieden. (3) Analog für die Spalten von α' . (4) Je zwei Elemente von α' sind verschieden. B. Jede unendliche Matrix, deren Elemente nur Nullen oder Einsen sind, enthält eine unendliche Teilmatrix, die (1) nur Nullen oder (2) nur Einsen oder (3) bzw. (4) oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen (bzw. Einsen), in und unterhalb der Hauptdiagonale nur Einsen (bzw. Nullen) als Elemente hat.

H. Rohrbach.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Hadwiger, H.: Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration. Arch. der Math. 5, 115–122 (1954).

Der abstrakte Raum R sei Wirkungsraum einer abelschen Gruppe Γ von Operationen α, β, \dots ; αx bezeichne das Bildelement von x bezüglich der Operation α . Im Raum R werde eine nichtleere Teilmenge E mit charakteristischer Funktion $E(x)$ ausgezeichnet; \mathfrak{B} bedeute die Klasse aller auf R definierter reeller Funktionen $F(x)$, die einer Ungleichung $|F(x)| \leq$

$\sum_{i=1}^n E(\alpha_i x)$ mit geeigneten n und $\alpha_i \in \Gamma$ genügen. Zwei Funktionen $F \in \mathfrak{B}$ und $G \in \mathfrak{B}$ heißen deckungsäquivalent, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n, m und Operationen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Gamma$ so finden lassen, daß

$$\left| \sum_{i=1}^n F(\alpha_i x) - \sum_{i=1}^m G(\gamma_i x) \right| < \sum_{i=1}^m E(\gamma_i x) \quad \text{mit} \quad \frac{m}{n} < \varepsilon \text{ gilt;}$$

sie heißen zerlegungsäquivalent, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n, m , Funktionen $F_i, G_i \in \mathfrak{B}$ und Operationen $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$ so finden lassen, daß

$$F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x), \quad G(x) = \sum_{i=1}^m G_i(x), \quad \left| \sum_{i=1}^n F_i(\alpha_i x) - \sum_{i=1}^m G_i(\beta_i x) \right| < \varepsilon E(x)$$

gilt. Es wird bewiesen, daß Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz gleichwertige Äquivalenzrelationen sind. Anwendungen auf axiomatische Integrationstheorie werden gegeben.

A. Császár.

Hadwiger, H.: Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder. Math. Ann. 127, 170–174 (1954).

A bezeichnet ein beliebiges k -dimensionales Polyeder des euklidischen R_k . $V(A)$ das k -dimensionale Volumen von A . Ein nicht identisch verschwindendes Polyederfunktional q heißt homogen vom Grade j , wenn $q(\lambda A) = \lambda^j q(A)$ für jedes A gilt. Satz: Die einzigen möglichen Homogenitätsgrade für ein bewegungsinvariantes additives Polyederfunktional im R_k sind $j = k - 2i$, mit $i = 0, 1, \dots, [(k-1)/2]$. \mathfrak{H}_i^k bezeichnet die Klasse der bewegungsinvarianten, additiven, vom Grade $k - 2i$ homogenen Polyederfunktionalen im R_k . $\mathfrak{H}^k = \bigcup \mathfrak{H}_i^k$. Rekursiver Aufbau der Funktionalen von \mathfrak{H} : $q_0(A) = V(A)$, $q_1(A) = \sum f(\alpha) q'_{i-1}(A')$. Die Summation erstreckt sich über alle $(k-2)$ -dimensionalen Kanten A' von A , q'_i ist ein beliebiges Funktional aus \mathfrak{H}_{i-1}^{k-2} . $\alpha = \pi -$ (Maß des Innenwinkels der in A' anstoßenden $(k-1)$ -dimensionalen Seitenflächen von A). f ist eine beliebige Cauchy-Hamelsche Funktion, d. h. eine Lösung der Funktionalgleichung $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ mit der Nebenbedingung $f(\pi) = 0$. — Engere Klassen \mathfrak{H}_i^k : Es sei $\{\omega_\tau\}$ eine Hamelsche Basis für die reellen Zahlen mit $\{\omega_0\} = \pi$. Der ω_τ -Koeffizient $p_\tau(\alpha)$ für $\tau \neq 0$ in der Hamelschen Darstellung von α ist eine sogenannte Hamelsche Grundfunktion. \mathfrak{H}^* ist die Klasse der Funktionalen, die man durch den oben erklärten rekursiven Aufbau beim i -ten Schritte erhält, wenn für f lediglich Hamelsche Grundfunktionen herangezogen werden. Hauptsatz: Für die Zerlegungsgleichheit $A \sim B$ zweier Polyeder im R_k sind die folgenden $[(k+1)/2]$ Bedingungen notwendig: $V(A) = V(B)$, $q_1(A) = q_1(B)$, wobei q_i Funktional aus \mathfrak{H}_i^k (erst recht aus \mathfrak{H}^*) sind. Satz: Falls $k \geq 3$, sind ein reguläres Simplex S und ein volumgleicher Würfel W nicht zerlegungsgleich. Andeutung zum Beweis: $i = 1$, $\vartheta = \pi -$ (Maß der k -dimensionalen Innenwinkel von S), s bzw. $w =$ ein bis auf eine Kongruenz definiertes $(k-2)$ -dimensionales Randsimplex bzw. Randwürfel von S bzw. W . Eine Hamelsche Grundfunktion f wird gewählt, derart, daß $f(\vartheta) \neq 0$ ist, was auf Grund der Irrationalität von ϑ/π möglich ist.

Chr. Pauc.

Denjoy, Arnaud: La mesure des ensembles géométriques. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 753—756 (1954).

Definitionen p -dimensionaler Maße für Punktmengen E im n -dimensionalen kartesischen Raum U_n bzw. Riemannschen Raum R_n , wo $1 \leq p \leq n$. — (1) Die orthogonale Projektion von E auf jeden U_p sei eine Borelsche Menge in U_p mit dem Maß $m(E; U_p)$; setze $m(E; p) = \sup(m(E; U_p); U_p \subset U_n)$. Ist dann $t = (E^r)$ eine δ -Einteilung von E , d. h. $E = \bigcup E^r$ mit paarweise fremden E^r vom Durchmesser $d(E^r) < \delta$, derart daß $m(E^r; p)$ existiert, so werde $m_p(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_t \sum m(E^r; p) \right)$ als p -dimensionales euklidisches Maß von E bezeichnet. Änderung: Statt $d(E^r) < \delta$ werde $m(E^r; p) < \delta$ gefordert. — (2) Es sei $f(x)$ eine reelle, positive endliche Funktion der reellen Variablen x . Ferner sei $E \subset \bigcup O_k$, wobei O_k einfach-zusammenhängend und offen im U_n ist, also $m(O_k; p)$ existiert. Analog wie in (1) erklärt man $m_p(E; f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_t \sum f[m(O_k; p)] \right)$. — (3) Es sei (x_i) ein festes kartesisches Koordinatensystem im U_n ,

erner $F = \sum a_{ij} x_i x_j$ eine positiv-definite quadratische Form und $\sum a_{ij} (x'_i - x''_i)(x'_j - x''_j)$ als das Quadrat der „ F -Entfernung“ $(X'X'')_F$ der Punkte $X' = (x'_i)$, $X'' = (x''_i)$ erklärt. Wird U_p durch die Geraden g_1, \dots, g_p aufgespannt, wobei überdies für g_r und alle zu ihr parallelen Geraden die zur Festlegung der Koordinaten u_r auf ihnen dienende Einheitsstrecke (beliebig) vorgebeschrieben sei, so erhält man für das Quadrat von $(X'X'')_F$, falls $X' = (u'_i) \in U_p$, $X'' = (u''_i) \in U_p$, eine Form $\sum b_{rs} (u'_r - u''_r)(u'_s - u''_s)$, deren Diskriminante $D = D(u)$ sei. Als p -dimensionaler Inhalt eines Parallelepipeds mit zu g_r paralleler Kante u_r wird dann erklärt $|D u_1 \dots u_p|$. Damit kann ein Maß in U_p in üblicher Weise erklärt werden, welches bei der Definition in (1) [oder (2)] an Stelle des Borelschen Maßes zur Erklärung von $m(E; p)$ benutzt werden kann; die Definition des Durchmessers und der orthogonalen Projektion ist jetzt natürlich auf die Entfernungsdefinition $(X'X'')_F$ zu beziehen. — (4) Durch Lokalisation der Betrachtungen in (3) gelangt man zu einer entsprechenden Definition eines p -dimensionalen Maßes im Riemannschen R_n .

Otto Haupt.

Marstrand, J. M.: The dimension of Cartesian product sets. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 198—202 (1954).

Bezeichnungen. Es seien: E Teilmenge der (x, y) -Ebene; E_a Schnitt von E mit der y -Parallelen $x = a = \text{konst}$; A bzw. B Teilmenge der x - bzw. der y -Achse und $A \times B$ kartesisches Produkt von A und B ; s, t, p reelle, positive Zahlen; $I^s E$ das äußere, s -dimensionale Hausdorffsche Maß von E . (Betr. Definition von Maß und Dimension vgl. Eggleston, dies. Zbl. 38, 37.) — Ergebnis. Vor.: Es seien s und t vorgegeben. Ferner sei $L^t E_x > p$ für jedes $x \in A$. — Beh.: Es gibt eine, von p, E und A unabhängige, positive Konstante k derart daß $k p I^s A \leq I^{s+t} E$. — Corollar: (1) Ist $I^s A > 0$, $I^t B > 0$, dann gilt $(I^s A) \cdot (I^t B) \leq I^{s+t}(A \times B)$. — (2) Die (Besicovitch-)Dimension von $A \times B$ für beliebige A, B ist nicht kleiner als die Summe der Dimensionen von A und B . — Beim Beweis wird der Begriff der (Maß-)Dichte nicht herangezogen im Gegensatz zu anderen einschlägigen Arbeiten.

Otto Haupt.

Volkman, Bodo: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. IV. Math. Z. 59, 425—433 (1954).

(Teil II, III, dies. Zbl. 51, 297). In Verallgemeinerung sowohl des Satzes I aus Teil II als auch zweier Sätze von Eggleston (dies. Zbl. 31, 208; 45, 166, Theorem 14 und Korollar) wird ein „Ziffersatz“ bewiesen. H.-E. Richert.

Krickeberg, Klaus: La nécessité de certaines hypothèses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extrême de fonctions d'intervalle. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 764—766 (1954).

Dans une note précédente (ce Zbl. 50, 60; les notations de cette analyse sont utilisées systématiquement dans ce qui suit) le rapporteur avait énoncé quelques résultats essentiels de la théorie des fonctions d'intervalle en postulant seulement un filtre t de partitions d'un ensemble mesuré R , les ensembles de ces partitions („cellules“) étant regardés comme „intervalles abstraits“; grâce à l'emploi d'intégrants et de L -dérivés („ U -Dérivierte“ selon O. Haupt) à la place des dérivés classiques définis ponctuellement aucune hypothèse vitale n'était nécessaire. Adoptant le même cadre (noter la rectification signalée à la fin de l'analyse citée plus haut) l'A. ayant introduit le L -dérivé supérieur en finesse de partition Df énonce le Théorème: Si pour toute fonction d'intervalle non négative et lipschitzienne f la m -intégrale de Df sur R n'excède pas l'intégrale supérieure de Burkil de f en finesse de partition sur R , alors t vérifie (V^0). Cette

propriété (V^0), trop compliquée pour être reproduite ici, est une propriété vitalienne forte, entendant par là qu'elle implique l'existence d'une famille approximante (ou distinguée) disjointe alors que jusqu'à présent les propriétés vitaliennes déduites d'hypothèses d'égalité mod n' entre dérivés et intégrants (de Possel, Hayes-Pauc) étaient faibles, c'est-à-dire comportaient un petit empiètement pour les ensembles de la famille approximante. Dans le cas actuel il s'agit de l'égalité mod n (ou n') entre $\bar{D}f$ et un m -(m' -) intégrant correspondant à l'intégrale supérieure selon Burkill (cf. loc. cit. (I)). Faisant appel à l'hypothèse de l'existence de partitions de norme N arbitrairement petite, l'auteur transfère aux notions en finesse de norme et en signale l'équivalence aux précédentes quand est vérifié un axiome (U) (cf. loc. cit. (IV)). La mesurabilité des dérivés extrêmes indispensable pour leur intégration n'est établie avec la définition ponctuelle que dans le cas de la contraction en finesse de norme et au prix d'une hypothèse vitalienne (O. Haupt, ce Zbl. 47, 290) ou prévitalienne (Haupt-Aumann-Pauc, Integralrechnung, 9. 6. 2., en cours d'impression), alors que les L -dérivés moins sensibles aux variations locales sont d'emblée mesurables. L'A. élucide complètement la situation relative de ces dérivés en affirmant qu'une condition prévitalienne (L_N) est nécessaire et suffisante pour l'égalité mod n' entre le L -dérivé supérieur $\bar{D}_N^* f$ et le dérivé ponctuel $\bar{D}_N f$ définis tous deux en finesse de norme pour toute fonction d'intervalle f finie. Chr. Pauc.

James, R. D.: Generalized n th primitives. Trans. Amer. math. Soc. 76, 149—176 (1954).

Wieder ein neuer Integralbegriff! Verf. hat früher (dies. Zbl. 37, 175) das P^2 -Integral definiert, das jetzt zum P^n -Integral ausgedehnt wird. Bei geradem $n = 2m$ werden zunächst für eine Funktion $F(x)$ die „verallgemeinerten symmetrischen Derivierten“ gerader Ordnung definiert durch die Formel

$$(1) \quad \frac{1}{2} [F(x+h) + F(x-h)] - \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{2k} \frac{h^{2k}}{(2k)!} = o(h^{2m-2}).$$

Es ist dann $D^{2k} F(x) = \beta_{2k}$ für $k = 1, 2, \dots, m-1$. Der obere und untere Limes des Ausdrucks (1) für $h \rightarrow 0$ wird mit $\Delta^{2m} F(x)$ bzw. $\delta^{2m} F(x)$ bezeichnet. Dann werden für eine Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) Oberfunktionen $Q(x)$ und Unterfunktionen $q(x)$ definiert durch Forderungen, deren wesentlichste so lauten: $Q(a) = q(a) = 0$, $\delta^{2m} Q(x) \geq f(x) \geq \Delta^{2m} q(x)$; von den andern mag hier abgesehen werden. Es wird gezeigt, daß die Differenz $Q(x) - q(x)$ stets ≥ 0 und „ $2m$ -konvex“ ist, was besagt, daß die Koeffizientensumme in der Lagrangeschen Interpolationsformel für jede Verteilung von $2m+1$ Zwischenwerten ≥ 0 ist (2-konvex ist gewöhnlich-konvex). Die Funktion $f(x)$ heißt dann P^{2m} -integrierbar, wenn die untere Grenze aller Oberfunktionen gleich der oberen Grenze aller Unterfunktionen ist, und diese Grenze wird das P^{2m} -Integral $\int f(x) d_{2m} x$ genannt. Ähnlich wird das P^{2m+1} -Integral definiert, wobei an Stelle von (1) die analoge Formel für $F(x+h) - F(x-h)$ tritt. Es wird dann gezeigt, daß eine P^n -integrierbare Funktion stets auch P^{n+1} -integrierbar ist und daß es Funktionen gibt, die nicht P^n -integrierbar, wohl aber P^{n+1} -integrierbar sind. Zum Schluß kommt noch eine weitere Modifikation, das \mathfrak{P}^n -Integral, wobei an Stelle von (1) die analoge Formel für $F(x+h) = F(x)$ tritt. Das \mathfrak{P}^n -Integral wird dann auch zum sog. $C_n P$ -Integral in Beziehung gesetzt. O. Perron.

Lane, Ralph E.: The integral of a function with respect to a function. Proc. Amer. math. Soc. 5, 59—66 (1954).

L'A. propose de remplacer dans la définition de l'intégrale de Stieltjes $\int u dv$ la somme $\sum u(\xi_i) [v(x_{i+1}) - v(x_i)]$ (avec $x_{i+1} \leq \xi_i \leq x_i$) par $\sum \frac{1}{2} [u(x_{i+1}) + u(x_i)] [v(x_{i+1}) - v(x_i)]$. Si la 1^{re} somme a une limite, la 2^e en a une qui lui est égale. Mais l'inverse est faux comme le montre l'exemple $u(x) = v(x) = 0$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $= 2$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, pour lequel la 2^e somme a pour limite 2 alors que la 1^{re} n'en a pas (l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est ici égale à 4). — Le principal intérêt de cette définition est que la formule d'intégration par parties est toujours vraie, sans hypothèse relative aux points où u et v sont toutes deux discontinues:

on a toujours $\int_a^b u dv + \int_a^b v du = [uv]_a^b$. — Supposant v à variation bornée, l'A. démontre

plusieurs propriétés de cette intégrale: 1° Si les u_n intégrables par rapport à v (au sens de l'A.) convergent uniformément vers u , alors u est intégrable et $\int u_n dv \rightarrow \int u dv$. — 2° Supposons que u ait pour tout x une limite à droite et une limite à gauche (classe (A)); alors u est intégrable, et, si les v_n sont à variation bornée dans leur ensemble et convergent uniformément vers v , $\int u dv_n \rightarrow \int u dv$. — 3° Supposons $u, v \in (A)$, w à variation bornée; si, parmi les fonctions u, v, w , il en existe une continue à droite, et une continue à gauche, alors $\int u d(\int v dw) = \int u v dw$. R. de Possel.

Schwartz, J.: The formula for change in variables in a multiple integral. Amer. math. Monthly **61**, 81—85 (1954).

Bekanntlich (vgl. z. B. Haupt-Aumann-Paue, Differential- und Integralrechnung, 3. Bd., 2. Aufl., Berlin 1955, Nr. 11, 2. 3. 3.) gilt folgender Satz: Ist $U' = F(U)$ eine ein-eindeutige, lokal-dehnungsbeschränkte Abbildung der offenen Menge D des euklidischen Raumes E_n in den E_n mit der Umkehrung $U = F^{-1}(U')$, so hat man für jede Lebesgue-meßbare Teilmenge V von D und ihr Bild $F(V) = V'$ die Beziehung
$$\int_{V'} h(F^{-1}(U')) dL_n = \int_V h(U) \cdot |D(F; U)| dL_n,$$

wobei L_n das Lebesguesche (n -dimensionale) Maß bedeutet und $D(F; U)$ L_n -fast überall gleich der Funktionaldeterminante von $F(U)$ ist, wobei ferner aus der Existenz des einen der beiden Integrale die des anderen folgt. — Für den speziellen Fall, daß die Abbildung und ihre Umkehrung stetig differenzierbar sind, vereinfacht Verf. den Beweis bei C. Jordan, Cours d'analyse, 3. Aufl., Bd. 2, S. 87 (Paris 1913), bzw. den (diese Stetigkeitsvoraussetzungen nicht benötigenden) bei Haupt-Aumann-Paue, indem er die Konstruktion eines (passenden) Parallelepipeds umgeht, das innerhalb des Bildes $F(C)$ einer beliebig kleinen Rechtecksumgebung C eines Punktes $x \in D$ liegt (in welchem F differenzierbar ist).

Otto Haupt.

Green, John W.: Note on the smoothness of integral means. Arch. der Math. **5**, 53—55 (1954).

Beweis folgenden Satzes: Ist $f(x)$ Lebesgue-integrierbar und besitzt $M_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ für $h = 0$ und beliebiges x eine stetige Ableitung, so ist $f(x)$ fast überall einer stetigen Funktion gleich. Benutzt wird folgendes interessantes Lemma: Ist $g(x)$ meßbar und ist für $h = 0$ $g(x+h) - g(x)$ stetig, so ist $g(x)$ stetig.

A. Császár.

Racine, C.: A note on the theory of the Riemann integral. Math. Student **21**, 97—103 (1954).

Folgender Satz wird ohne Benutzung der Lebesgueschen Theorie bzw. des Arzelaschen Satzes bewiesen: Ist $f(x, y)$ im Rechteck $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ beschränkt, für $a \leq x \leq b$ im Intervall $c \leq y \leq d$ als Funktion von y Riemann-integrierbar und in den Punkten (x_0, y) ($c \leq y \leq d$), mit Ausnahme einer Menge vom linearen (Lebesgueschen) Maße Null, als Funktion von zwei Variablen stetig,

so ist $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ an der Stelle x_0 stetig. Als Anwendung wird ein Beweis

von S. Minakshisundaram für die Parsevalsche Formel bezüglich der Fourier-schen Reihe Riemann-integrierbarer Funktionen mitgeteilt. — Sowohl in der Formulierung der Behauptungen als in den Beweisen findet man Nachlässigkeiten; im Wortlaut des obigen Satzes wird z. B. die Beschränktheit von $f(x, y)$ nicht postuliert, im Beweise wird sie jedoch benutzt.

A. Császár.

Rademacher, Hans: On the condition of Riemann integrability. Amer. math. Monthly **61**, 1—8 (1954).

Ohne Heranziehung des Borelschen Überdeckungssatzes wird das bekannte Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit einer im beschränkten abgeschlossenen (1-dimensionalen) Intervall $J = [a, b]$ beschränkten reellen Funktion $f(x)$ bewiesen: Es ist f Riemann-integrierbar über J genau dann, wenn für beliebiges $\epsilon > 0$ die Menge $S(\epsilon)$ aller x , in denen die Punktschwankung von f nicht kleiner als ϵ ist, mit endlich vielen Intervallen von höchstens der Gesamtlänge ϵ überdeckbar ist. Daraus folgt die Integrierbarkeit der in J stetigen Funktionen f ohne Zurückgreifen auf die gleichmäßige Stetigkeit von f .

Otto Haupt.

San Juan, Ricardo: Ein Satz über einfach konvergente uneigentliche Integrale. *Revista mat. Hisp. Amer.*, IV. Ser. **14**, 74—75 (1954) [Spanisch].

Es sei $\varphi(x) \geq 0$ eine nichtabnehmende Funktion, $\varphi(\delta)$ eine positive Funktion mit $\varphi(\delta) = o(\delta^{-1})$ für $\delta \rightarrow +0$, und $\varphi(x+\delta)/\varphi(x) \leq \varphi(\delta)$ für $x > x_0$. Wenn $f(x)$ für $x > x_0$ stetig ist und seine vier Derivierten $O(\varphi(x))$ für $x > x_0$ sind (außer in einer abzählbaren Menge), so folgt aus der Konvergenz von $\int_0^\infty f(x) dx$ die Relation $f(x) = o(\varphi(x))$ für $x \rightarrow +\infty$. G. Doetsch.

San Juan, R.: Angabe eines Kriteriums über uneigentliche Doppelintegrale. *Gac. mat.*, Madrid **6**, 68—70 (1954) [Spanisch].

Es sei $f(x, y)$ eine im Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$ definierte reelle Funktion, für welche $\int_0^X \int_0^Y f(x, y) dy dx$ für alle $0 \leq X \leq +\infty$ und $0 \leq Y < +\infty$ existiert sowie unabhängig von der Reihenfolge der Integrationen ist. Die von Verf. angegebene Bedingung, unter welcher $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dy dx$ existiert und von der Integrationsfolge unabhängig ist, gewinnt man durch triviale Umformung der Behauptung. Es werden einfache hinreichende Bedingungen formuliert, unter welchen das Vertauschbarkeits-Kriterium anwendbar ist. H. Bauer.

Marín Tejerizo, J. A.: Verallgemeinerung der Integrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Gac. mat., Madrid **6**, 64—67 (1954) [Spanisch].

Verf. beweist mittels Reihenentwicklung eine Übung aus Bromwich „An introduction to the theory of infinite series“ [2. Aufl., London 1926]: Für jede ungerade bzw. gerade reelle Funktion $f(u)$, $-1 \leq u \leq 1$, gilt

$$\int_0^\infty \frac{f(\sin x)}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{\sin x} dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty \frac{f(\sin x)}{x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{\sin^2 x} dx,$$

falls nur die auftretenden Integrale konvergieren.

H. Bauer.

Livingston, A. E.: A necessary condition for the convergence of $\int_a^\infty f(x) dx$.

Amer. math. Monthly **61**, 250—251 (1954).

Morse, Anthony P.: Dini derivatives of continuous functions. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 126—130 (1954).

Si rileva qualche proprietà dei numeri derivati di Dini, tra le quali citiamo la seguente: Se $f(x)$ è una funzione continua per ogni x reale, e se l'insieme degli x per i quali è $D^+ f(x) > 0$ è denso, allora o $f(x)$ è crescente in senso stretto o l'insieme degli x per i quali è $D^+ f(x) = 0$ ha la potenza del continuo. S. Cinquini.

Corominas, Ernest et Ferran Sunyer i Balaguer: Sur les conditions pour qu'une fonction infiniment dérivable soit un polynome. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 558—559 (1954).

Mitteilung (ohne Beweise) einiger Verallgemeinerungen des klassischen Satzes,

daß aus $f^{(n)}(x) = 0$ für $a \leq x \leq b$ $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ folgt. Folgende Behauptungen sind typisch: Existiert $f^{(n)}(x)$ für $a \leq x \leq b$ und $n = 1, 2, \dots$ und gibt es eine solche Menge $L \subset [a, b]$, daß man zu jedem $x \in L$ ein $r(x) > 0$ mit $f^{(r(x))}(x) = 0$ finden kann, so kann $f(x)$ dann und nur dann kein Polynom sein, wenn $[a, b] - L$ eine perfekte Teilmenge enthält. Existiert $f^{(n)}(x)$ für $a \leq x \leq b$ und $n = 1, 2, \dots$ ist H eine abzählbare Menge von reellen Zahlen und gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $r(x) > 0$ mit $f^{(r(x))}(x) \in H$, so ist $f(x)$ ein Polynom.

Á. Császár.

Vituškin, A. G.: Hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit der linearen Variation einer Funktion von drei Veränderlichen. Mat. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 307—322 (1954) [Russisch].

Sowohl diese Arbeit als auch die drei nachfolgenden stützen sich auf die Arbeiten von Kronrod (dies. Zbl. **36**, 170; **39**, 54; **40**, 316). Fundamentalsatz: Sei $t = f(P) = f(x_1, x_2, x_3)$ ($P \in I^3$) eine im abgeschlossenen Kubus I^3 zweimal differenzierbare Funktion; falls die Derivierten der zweiten Ordnung von t der Lipschitzschen Bedingung genügen, so ist die „lineare Variation“ von f endlich. Die Lipschitzsche Bedingung ist dabei unentbehrlich. Die „Niveaumengen“ $f^{-1}(t) = E_t$ (t veränderlich) spielen eine wichtige Rolle, ebenso die Komponenten (K.) derselben. Die typischen Komponenten von E sind diejenigen, die weder einen Randpunkt von I^3 noch eine Nullstelle von df enthalten; sei $\xi_1(t)$ die Anzahl solcher K.-en; sei $\xi_2(t)$ die Anzahl der K.-en von E , die mindestens einen Punkt von dem Rand von I^3 enthalten; $\xi_3(t)$ bezeichne die Anzahl der übrigen K.-en von E . Sei $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t)$; dann wird $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) dt$ die lineare Variation von f genannt. Sei Ω die Vereinigungsmenge aller nicht-typischen K.-en; die Menge $I^3 - \Omega$ ist offen; deren K.-en werden: „Ringoide“ (kolcoidy) genannt, mit K_i bezeichnet und mit dem Kronrodschen Baume T_i (dies. Zbl. **40**, 116) in Zusammenhang gebracht. Der Beweis des Hauptsatzes stützt sich auf 6 Sätze von Kronrod und dazu noch auf 6 Lemmata, von denen Nr. 3—6 folgendermaßen lauten: Die Begrenzung I_i von K_i besteht aus 2 K.-en; die eine separiert die andere von ∞ ; f ist konstant auf jeder derselben und ist gleich dem oberen bzw. unteren Limes von f an K_i (Lemma 3). Die innerliche Begrenzung von K_i enthält eine Nullstelle O_i von f (Lemma 4). Wenn h_i die Schwankung von f in K_i bezeichnet, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t) dt = \sum_i h_i$ (L. 5). Sei S_i die Kugel mit O_i als Zentrum und $r_i = \frac{1}{2} \overline{h_i}$ als Radius; wenn $S_i - S_j = \emptyset$, $h_i > h_j$, so ist $r_i/r_j \geq k^{1/3} - 1$, und K_i ist von ∞ durch K_j abgetrennt (L. 6; dabei ist k die Lipschitz-Konstante, von der im Hauptsatze die Rede ist). G. Kurepa.

Vituškin, A. G.: Einige Abschätzungen für die Variation von Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 433—434 (1954) [Russisch].

Sei E bzw. G eine abgeschlossene bzw. offene Menge aus R^m ; sei R_i^r ($i = 1, \dots, \binom{m}{v}$) das System aller r -dimensionalen, durch r Koordinatenachsen bestimmten Unterräume von R^m . Für $q \in R_i^r$ sei $R_i^{m-v}(q)$ der zu R^r normale und den Punkt q enthaltende Unterraum der Dimension $m - r$; $\xi_i^r(q)$ bezeichne die Komponentenanzahl von $E \cap R_i^{m-v}(q)$. Die Variation v -ter Ordnung von E rel. G wird durch $W_v(E, G) = \sum_i \binom{m}{v} \int_{R_i^v} \xi_i^v(q) dq$ definiert; die Summe $W(E, G) = \sum_{v=1}^{m-1} W_v(E, G)$ heiße Variation von E rel. G . Verf. verschärft einen Satz von Kronrod (Th. 2). Handelt es sich um eine polynomische Koordinaten-Abbildung $y_i = P_i(z_1, \dots, z_q)$ von R^q in R^m vom Grad r bezüglich jeder der Koordinaten z_1, \dots, z_q ; ist dazu Ω ein beliebiger m -dimensionaler Kubus mit der Seite a , mit Kanten parallel zu den Achsen von R^m , dann hat man $W_v(E, \Omega) \leq a^r \binom{m}{v} (6r)^{2q}$ ($v = 1, 2, \dots, m-2$) (Th. 2). G. Kurepa.

Vituškin, A. G.: Definition der Variationen einer Menge und metrisches Dualitätsgesetz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 893—896 (1954) [Russisch].

L'A. généralise la notion de variation, au sens de Kronrod, de fonction à 2 variables et énonce sans démonstration 5 théorèmes. Il définit „la M_{n-1} -mesure“ pour ensembles extraits de l'espace sphérique S^{n-1} (celui-ci ayant un point, O , de R^n comme centre et le nombre 1 comme rayon). Cela permet, par induction relativement à $k = 0, 1, \dots, n$, d'introduire „la (V_k) -mesure“ et la „ k -tuple variation“ $V_k^n(E)$ de $E \subset R^n$, en définissant $V_0^n(E)$ comme le nombre des composants de E ; $V_k^n(E)$ est définie par une intégrale sur S^{n-1} . D'autre part, l'A. définit la (V_k) -mesure de E et „la variation d'ordre k “, soit $V_k(E)$, de E ; celle-ci est une intégrale sur l'espace v_k^n composé des plans (de R^n) de k dimensions et dans lequel on introduit la topologie euclidienne. Si E est fermé, alors E est (V_k^n) -mesurable (Th. 1) et (V_k) -mesurable (Th. 2). Si E est à la fois (V_k^n) -mesurable et (V_k) -mesurable, alors $V_k^n(E) = V_k(E)$ (Th. 3). Soient: Y_n un cube fermé à n dimensions dont l'arête, a , est ≤ 1 et $E \subset Y_n$; si E est (V_k^n) -mesurable et $V_k^n(E) = 0$ ($k = v+1, \dots, n$; $v < n$), alors $Y_n - E$ contient un cube E' à n dimensions dont l'arête est $\geq A(n, v) a^{n(n-v)} B$, $A(n, v) = \frac{1}{2} v^{n(n-v)}$, $B = \sqrt{1 + \sum_{k=0}^v V_k^n(E)}$; de plus, les arêtes de E' sont parallèles à celles de E (Th. 5: „théorème de dualité“). G. Kurepa.

Vituškin, A. G.: Die Variationen von Funktionen mehrerer Veränderlicher und hinreichende Bedingungen für ihre Beschränktheit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 1089—1091 (1954) [Russisch].

A function $t = f(x_1, \dots, x_n)$ defined in a $E \subseteq R^n$ is called (V_k) -measurable, provided both:
(1) For almost each t the set E_t is (V_{k-1}) -measurable, (II) $V_{k-1}(E_t)$ is a Lebesgue measurable

function of t . If f is (V_k) -measurable, the k -tuple variation of f is defined as $\int_{-\infty}^{\infty} (E_t) dt$ and

denoted $V_k^t(f)$ or $V_k(f, E)$; here $k = 1, 2, \dots, n$. If f is continuous and E = a segment, then $V_1^t(f)$ equals the fluctuation of f on E ; analogously, $V_1^t(f(x_1, x_2))$ equals the linear variation of f in the sense of Kronrod (v. supra). The results reviewed above for $n = 3$ are now enounced for any n ; in particular the last theorem (Th. 8) reads: Let f be defined in I^n (= unit closed cube in R^n) having all derivatives of order $\leq n - k$ and satisfying all — so does in particular f — to the Lipschitz condition with a same constant L_1 ; then $V_k(f, E)$ is bounded by a number depending only on n and L_1 . For $n = 1$, if f is continuously derivable on I_1 possessing all derivatives of order $\leq l - 1$ satisfying the Lipschitz condition with a same constant L_1 , then

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i^{n/l} \leq l \sqrt[l]{L_1} \text{ (Th. 6; as to notations v. above).}$$

G. Kurepa.

Vituškin, A. G.: Zu Hilberts dreizehntem Problem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 701—704 (1954) [Russisch].

Das dreizehnte Problem von Hilbert (dies. Zbl. **13**, 56, insbes. S. 313), eine analytische Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ von 3 Veränderlichen anzugeben, die durch keine endliche Superposition von stetigen Funktionen von 2 Veränderlichen darstellbar ist, ist noch offen. Nun beweist Verf. folgenden Satz: Für irgendwelche $n > 2$, $l \geq 1$ gibt es eine Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$ mit stetigen Ableitungen von der Ordnung $\leq l$, so daß alle ihre Derivierten der l -ten Ordnung der Lipschitzschen Bedingung genügen und daß F durch keine endliche Superposition von Funktionen von $n - 1$ Veränderlichen entstehen kann. Der Beweis stützt sich auf folgendes Fundamentallemma: Seien (1) $y_i = P_i(z_1, \dots, z_q)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) Polynome der Ordnung $\leq r$ bezüglich jeder der Variablen z_j ; seien a_i beliebige Konstanten und (2) $2^m > [16(q+1)^q (6r)^{9q} q m^q]$. Dann kann man $\varepsilon_i = \pm 1/4$ ($i = 1, 2, \dots, m$) so wählen, daß für kein System z_1, \dots, z_q die Gleichungen $|y_i - a_i - \varepsilon_i| \leq 1/8$ ($i = 1, 2, \dots, m$) befriedigt sind. Dieser Satz folgt aus zwei Abschätzungen der Variation der durch (1) gewonnenen Bildmenge ε des Raumes R^q (cf. Vituškin, dies. Zbl. **55**, 55, 2. Referat). Die Funktion F stellt sich als

$\sum_{\eta=1}^{\infty} H_{\eta}(x_1, \dots, x_n)$ dar, mit besonderer Berücksichtigung der Argumentwerte $x_i = (a_{\eta} + 1/2) \cdot 1_{\xi}$, $1_{\xi} = 1/\mu_{\xi}$ (für jedes ξ ist μ_{ξ} fixiert; $a_{\eta} = 1, 2, \dots, \mu_{\xi}$). Für jedes ξ und beliebiges μ_{ξ} und $\varepsilon_i^{(\xi)} = \pm 1/4$ kann man $H_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$ so auswählen, daß $|H_{\xi}| \leq 1_{\xi}^{1/4} \cdot 32^{\xi}$ und daß ihre Derivierten der Ordnung $\leq l$ stetig sind und absolut genommen $\leq C \cdot 32^{\xi}$ (C ist eine Konstante) (Lemma 2). Um noch die Nicht-Superponierbarkeit von F zu sichern, genügt es, die Größen μ_{ξ} , $\varepsilon_i^{(\xi)}$ gemäß dem folgenden Hilfssatz zu wählen: Es gibt eine Folge $\mu_{\xi} \uparrow \infty$, sodaß für $k_{\xi} = [\mu_{\xi}^{1-1/(n-1)}]$ die Zahlen $m_{\xi} = \mu_{\xi}^{n-1}$, $q_{\xi} = q_{k_{\xi} \varepsilon_{\xi}}$ nicht (1) genügen und daß $\lim_{\xi \rightarrow \infty} 1_{\xi}^{1/4} k_{\xi}^{1/4} / 32^{\xi} = \infty$ (L. 3).

G. Kurepa.

Behnert-Smirnov, K. N.: Über eine notwendige und hinreichende Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit von Funktionenmengen. Math. Ann. **127**, 424—432 (1954).

Es bezeichne Π eine Familie von Funktionen u , erklärt in einem Gebiet G des n -dimensionalen euklidischen Raumes der Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ und mit verallgemeinerten Ableitungen

$u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ versehen in dem Sinne, daß $u(x') = u(x_0) + \int_{x_0}^{x'} \sum_{i=1}^n u^{(i)}(x) dx_i$ für jeden rekti-

fizierbaren Weg von x_0 nach x' in G . Von G selbst wird vorausgesetzt, daß jeder Randpunkt Spitze eines genügend kurzen Drehkegels mit positivem Öffnungswinkel ist, dessen Inneres ganz zu G gehört. Zur Charakterisierung der gleichgradigen Stetigkeit von Π ist jede gerade, konvexe, für $-\infty < \xi < +\infty$ erklärte Funktion $F(\xi)$ mit $F(0) = 0$ und $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = +\infty$ brauchbar,

für die $\Phi(u) = \sum_{i=1}^n \int G F(u^{(i)}(x))$ in G integrierbar ist mit $\sup_{u \in \Pi} \int \dots \int \Phi(u) dx_1 \dots dx_n < +\infty$.

Es wird bewiesen: Π ist dann und nur dann gleichgradig stetig in G , wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} [F'(\xi)]^{-1/(n-1)} d\xi$ divergiert. Von der Entwicklung dieses Satzes über die Varianten und Spezialfälle bei R. Courant, K. Friedrichs, H. Levy, S. L. Sobolev, Kondraschov, A. Khintchine, J. G. Petrowski wird berichtet.

G. Aumann.

Goffman, Casper: On a theorem of Henry Blumberg. Michigan math. J. 2, 21—22 (1954).

According to Blumberg [Trans. Amer. math. Soc. 24, 113—128 (1922)], to each real function f defined in $I = (0, 1)$, corresponds an everywhere dense set $E \subset I$ so that f be continuous relative to E . The author proves now that in this statement one can not replace „continuous“ by „homeomorphic“. D. Kurepa.

Videnskij, V. S.: Über normal wachsende Funktionen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 212—213 (1954) [Russisch].

Allgemeine Reihenlehre:

Newton, T. A.: A note on a generalization of the Cauchy-Maclaurin integral test. Amer. math. Monthly 61, 331—334 (1954).

Kreis, H.: Summation interpolierter Zahlenreihen. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 54, 111—116 (1954).

Agnew, Ralph P.: Mercer's summability theorem. J. London math. Soc. 29, 123—125 (1954).

A new proof (and some generalisation) of a Mercerian theorem of Love (this Zbl. 47, 302) is obtained from a more general theorem of the author (this Zbl. 47, 65).

W. W. Rogosinski.

Tatchell, J. B.: A theorem on absolute Riesz summability. J. London math. Soc. 29, 49—59 (1954).

The main theorem is that if $k \geq 0$, and if $\sum c_n$ is summable $|R, \lambda, k|$, then $\sum c_n \lambda_n^{-k}$ is summable $|R, l, k|$, where $l_n = e^{\lambda n}$. The case $k = 1$ was given by R. Mohanty (this Zbl. 35, 336). It follows from the theorem that for a Dirichlet series $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ the abscissa of summability $|R, \lambda, k|$ is the same as the abscissa of summability $|R, l, k|$.

K. Chandrasekharan.

Peyerimhoff, Alexander: Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. Math. Z. 59, 417—424 (1954).

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt C_α -summierbar [C_α -summierbar], wenn die durch

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n A_n^{\alpha-1}} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu, \quad (n \geq 1), \quad A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \quad (\alpha > -1)$$

erklärte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ konvergiert [absolut konvergiert]. Nachdem Bosanquet

(dies. Zbl. 32, 404) eine Charakterisierung sämtlicher Folgen $\{\varepsilon_n\}$ angegeben hatte,

die jede C_α -summierbare Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in eine C_β -summierbare Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$

überführen ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$), erledigt der Verf. hier das entsprechende Problem für absolute Summierbarkeit und beweist: Die Folge $\{\varepsilon_n\}$ führt genau dann jede $|C_\alpha|$ -

summierbare Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in eine $|C_\beta|$ -summierbare Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ über ($\alpha \geq 0,$

$\beta \geq 0$), wenn $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$ (für $\beta < \alpha$) bzw. $\varepsilon_n = O(1)$ (für $\beta \geq \alpha$), sowie

$\Delta^\alpha \varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\alpha-1} \varepsilon_\nu = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ gilt. Der Beweis ist erheblich schwieriger als bei

dem von Bosanquet [J. London math. Soc. 20, 39—48 (1945)] behandelten Spezialfall ganzzahliger α und β und wird über die Fälle $0 \leq \alpha \leq 1, \beta \geq 0$ und $0 \leq \beta \leq 1, \alpha \geq 0$ induktiv durchgeführt.

D. Gaier.

Basu, S. K.: On hypergeometric summability involving infinite limits. Proc. Amer. math. Soc. 5, 226—238 (1954).

Sind (L_1) und (L_2) zwei Matrizen, die Limitierungsverfahren L_1 und L_2 definieren, so heißt L_1 total stärker als (t.s.) L_2 , wenn aus $L_2\text{-lim } s_n = s$ stets $L_1\text{-lim } s_n = s$ folgt ($-\infty \leq s \leq +\infty$); im Falle $(L_2) = (E)$ (Einheitsmatrix)

heißt L_1 total regulär. Verf. untersucht die totale Regularität des durch $t_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k$ mit $\mu_0 = 1, \mu_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1) \cdot n!}$ ($n = 1, 2, \dots$) definierten $H(\alpha, \beta, \gamma)$ -Verfahrens ($\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$), das von Garabedian und Wall (dies. Zbl. 24, 106) eingeführt wurde. Wegen $H(\alpha, \beta, \gamma) = C_{\alpha-1}^{-1} C_{\beta-1}^{-1} C_{\gamma-1}$ werden zuerst die Verfahren $C_\alpha C_\beta$ und $C_{\alpha+\beta}$ verglichen ($\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \beta > -1$) und gezeigt: a) Für $\alpha\beta > 0$ ist $C_\alpha C_\beta$ t. s. $C_{\alpha+\beta}$, aber $C_{\alpha+\beta}$ nicht t. s. $C_\alpha C_\beta$; b) für $\alpha\beta < 0$ ist $C_{\alpha+\beta}$ t. s. $C_\alpha C_\beta$, aber $C_\alpha C_\beta$ nicht t. s. $C_{\alpha+\beta}$. Bezüglich $H(\alpha, \beta, \gamma)$ wird sodann z. B. bewiesen, daß $H(\alpha, \beta, \gamma)$ total regulär ist für $\gamma \geq \alpha + \beta - 1 > \alpha\beta$, aber nicht total regulär für $\alpha + \beta - 1 \leq \gamma \leq \alpha\beta$.
D. Gaier.

Rajagopal, C. T.: A generalization of Tauber's theorem and some Tauberian constants. II. Math. Z. 60, 142—147 (1954).

Die Arbeit schließt an den Satz 2b der gleichbetitelten 1. Mitteilung (dies. Zbl. 50, 285) an, der für die mit der Folge $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ gebildeten Transformation einer

Reihe $\sum a_n$ in eine Funktion vom Typus $\Phi_\lambda^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^* \left(\frac{\lambda_n}{x} \right)$ die Tauberschen Konstanten im Falle $\lambda_n/\lambda_{n-1} \sim 1$ lieferte, wobei über den Kern q^* vorausgesetzt wurde, daß $q^*(u) = \int_u^\infty \psi^*(x) dx, \psi^*(u) \geq 0, \int_0^\infty \psi^*(u) du = 1$ und $\int_0^\infty \psi^*(u) |\log u| du$ existiert. Auch ein von H. Delange (dies. Zbl. 39, 64) herrührender allgemeinerer Satz (Satz 4 der Arbeit von Delange) bezog sich nur auf den Fall $\lambda_n/\lambda_{n-1} \sim 1$. In der vorliegenden zweiten Mitteilung beweist der Verf. nun einen entsprechenden Satz für den interessanten Fall von „high indices“ λ_n , welche der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n/\lambda_{n-1} > 1$ genügen, und zwar gleich für die von Delange untersuchte allgemeinere Transformation

$$\Phi_\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right), \quad x > 0,$$

deren Kern $K(u)$ die Bedingungen $K(u) \equiv \int_u^\infty N(x) dx, K(0) = 1, N(x) \in L(0, \infty), N(x) \log x \in L(0, \infty)$ erfüllt. Die transformierte Funktion ist hierbei die Treppenfunktion

$$A(u) = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ für } \lambda_n \leq u < \lambda_{n+1} \text{ bzw. } = 0 \text{ für } 0 \leq u < \lambda_1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Der Satz lautet: Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n/\lambda_{n-1} = l > 1, a_n = O(1); x$ und n seien durch die Beziehungen $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n/x = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}/x = \beta$ miteinander verknüpft, wobei die endlichen positiven Konstanten α, β der Ungleichung $\beta \leq \alpha l$ genügen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq \left\{ \int_0^\alpha |N(u)| \cdot \left[1 + \frac{\log(x/u)}{\log l} \right] du + \int_\beta^\infty |N(u)| \cdot \left[1 + \frac{\log(u/\beta)}{\log l} \right] du \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Das Resultat wird insbesondere mit Ergebnissen von T. Vijayaraghavan [J. London math. Soc. 2, 215—222 (1927)] und N. Levinson (dies. Zbl. 26, 216, insb. S. 191, Theorem LIV und S. 188—189, Theorem LI dieses Buches) in Beziehung gesetzt.
V. Garten.

Korevaar, Jacob: A very general form of Littlewood's theorem. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 36—45 (1954).

Es sei $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nu}$ konvergent für $u > 0; s_n = \sum_{k=1}^n a_k; \alpha$ reell; $L(t)$ eine langsam oszillierende Funktion [d. h. eine positive, stetige, für $t > 0$ definierte Funktion derart, daß für jedes $c > 0$ gilt: $L(ct)/L(t) \rightarrow 1$ falls $t \rightarrow \infty$]; $\varphi(t) = t^\alpha L(t); \omega(u)$ eine für $u > 0$ definierte positive beschränkte Funktion, welche $\rightarrow 0$, falls $u \rightarrow 0$. Verf. beweist: Falls $a_n > -\varphi(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) und $|f(u) - s| < \omega(u)$ ($u > 0$), so ist $|s_n - s| \leq \varrho(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), wo: a) $\varrho(0) = K_1$;

$$\varrho(n) = \min_{p \geq K_0} \left\{ K_2 \frac{n \varphi(n)}{p} + K_3 p \omega\left(\frac{p}{n}\right) \right\} \quad (n \geq 1),$$

falls $\liminf_{u \downarrow 0} u \log \omega(u) > -\infty$ und b) $\varrho(n) = 0$, falls $\liminf_{u \downarrow 0} u \log \omega(u) = -\infty$.

Hier sind die K_i positive Zahlen, welche nur von q und ω abhängen und $K_3 > 1$. Verf. gibt Beispiele, die zeigen, daß die Abschätzung von $|s_n - s|$ nicht wesentlich verschärft werden kann.

H. D. Kloosterman.

Korevaar, Jacob: Another numerical Tauberian theorem for power series. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 46—56 (1954).

Verf. bemerkt, daß die früher von ihm gegebene Abschätzung (vgl. das vorstehende Referat) zu $|s_n - f(0)| \leq C q(n)$ verschärft werden kann, falls die Funktion $\sum a_n x^n$ in $x = 1$ regulär ist. Er beweist folgenden allgemeinen Satz (in dem auch seine früheren Resultate enthalten sind).

Es sei $a(t)$ in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ integrierbar und $s(t) = \int_0^T a(t) dt$; $F(u) =$

$\int_0^\infty a(t) e^{-ut} dt$ konvergent für $u > 0$; $G(u)$ regulär in $|u| \leq \delta$; $\psi(t) = t^\alpha L(t)$ stetig für $t > 0$,

wo $L(t)$ eine langsam oszillierende Funktion ist. Falls dann $|F(u) - G(u)| \leq \omega(u)$ ($0 < u \leq \delta$) und $a(t) = \psi(t)$ ($t > 0$), so gibt es Zahlen C_1 ($C_1 > 1$) derart, daß $|s(T) - G(0)| \leq \varrho(T)$

($T \geq C_1$), wo $\varrho(T) = \min_{C_2 \leq p \leq C_3 T} \left\{ C_4 \frac{T \psi(T)}{p} + C_5 \psi\left(\frac{p}{T}\right) \right\}$ ($T \geq C_1$). Falls $\omega(u)$ identisch 0

ist, falls also $F(u)$ selbst in $u = 0$ regulär ist, so ist $\varrho(T) = C_6 \psi(T)$ ($T \geq C_1$). Falls $\liminf_{u \rightarrow 0} u \log \omega(u) = -\infty$, so ist $F(u) = G(u)$.

H. D. Kloosterman.

Cooper, R.: The relative growth of some rapidly increasing sequences. J. London math. Soc. **29**, 59—62 (1954).

Es sei $a > 1$ und a_0 größer als die Wurzeln von $a^x = x$, falls diese Gleichung Wurzeln hat, sonst a_0 beliebig. Die durch $a_{n+1} = a^{a_n}$ definierte Folge $\{a_n\}$ strebt dann schnell nach ∞ . Die Folge $\{b_n\}$ werde ähnlich definiert mit Hilfe von Zahlen b_0 und $b > a$. Für jedes m werde $n = n(m)$ durch $a_n < b_m \leq a_{n+1}$ bestimmt. Verf. beweist, daß $n(m) = m$ für hinreichend großes m constant ist. Er gibt ein entsprechendes Resultat für allgemeinere Folgen $\{f_n\}$, die mit Hilfe von Parametern α, ϱ, f_0 und der Relation $f_{n+1} = \exp \{\alpha f_n^{\varrho}\}$ definiert sind. H. D. Kloosterman.

Henrici, P.: Bemerkung zu einer Aufgabe von Herrn van der Pol. Elemente Math. **9**, 82—84 (1954).

Mit $\prod_{r=0}^{n-1} (a + r) = (a)_n$ für $n = 1, 2, \dots$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{(1 - 2 - kn)_n} = \frac{2^{n-2} \pi}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right)^{n-1}. \quad W. Maier.$$

• **Worobjow, N. N.:** Die Fibonaccischen Zahlen. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, Bd. I.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 47 S.

Die Besprechung des Originals dieser Übersetzung s. dies. Zbl. **44**, 284 unter Vorob'ev.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Karanikolov, Chr.: Über eine Formel der mechanischen Quadratur. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 157—161 (1954) [Russisch].

Verf. behandelt die Aufgabe, eine Quadraturformel für ein Integral zwischen den Grenzen a und b zu finden, wenn Teilpunkte x_1, x_2, \dots, x_{n-1} benutzt werden, so daß $x_{k-1} - x_k = d = (b - a)/n$ für $k = 1, 2, \dots, n-2$ ist, wenn also wenigstens eins der Randintervalle $x_1 - a$ und $b - x_{n-1}$ eine von d verschiedene Länge hat. Die gesuchte Formel soll für Polynome möglichst hohen Grades exakt sein. W. Schultz.

Freud, Géza: Über die Konvergenz der Hermite-Fejérschen Interpolationsverfahrens. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5**, 109—127 und russische Zusammenfassg. 128 (1954).

Es seien $w(x)$ eine in $(-1, 1)$ definierte, nichtnegative Gewichtsfunktion und $\{p_n(x)\}$ die zugehörigen, normierten orthogonalen Polynome. Verf. untersucht für ein gegebenes $f(x)$ die

„zugeordnete“ Interpolationsfolge $H_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_{kn}) \cdot h_{kn}(x) + \sum_{k=1}^n d_{kn} \mathfrak{h}_{kn}(x)$. Hierbei sind x_{1n}, \dots, x_{nn} die Wurzeln von $p_n(x)$, $h_{kn}(x)$ und $\mathfrak{h}_{kn}(x)$ die ihnen entsprechenden Grundpolynome der Hermite-Fejérschen Interpolation, die d_{kn} sind den Stellen x_{kn} zugeordnete, bestimmte Zahlenwerte, und es handelt sich darum, sie einschränkenden Bedingungen bezüglich ihrer Größenordnung zu unterwerfen, um auf die Konvergenz der H_n gegen $f(x)$ schließen zu können [falls $f(x)$ ein Polynom von höchstens $(2n-1)$ -tem Grade ist, ergibt sich bekanntlich aus der Definition der Grundpolynome $d_{kn} = f'(x_{kn})$]. Unter den Voraussetzungen: $|p_n(x)| \leq k$ in einem Teilintervall (α, β) von $(-1, 1)$, $d_{kn} = o(n \log n)$ für $\alpha \leq x_{kn} \leq \beta$, $d_{kn} = o\{\min(n\sqrt{1-x_{kn}^2}, n^2)\}$ für alle x_{kn} gleichmäßig, werden zwei Konvergenzsätze bewiesen. I. „Ist $w(x)$ in $[-1, 1]$ positiv und stetig und genügt es in (α, β) gleichmäßig der Bedingung $w(x_1) - w(x_2) = o\{\log^{-1}|x_1 - x_2|^{-1}\}$, so konvergiert die Folge $H_n(f; \xi)$, $\alpha < \xi < \beta$, gegen $f(\xi)$, falls $f(x)$ für $x = \xi, -1, 1$ stetig und in $(-1, 1)$ beschränkt ist. Ist $f(x)$ in ganz (α, β) stetig, so ist die Konvergenz in jedem inneren Teilintervall von (α, β) gleichmäßig“. II. „Ist a) $0 < m \leq w(x) \leq M$ in $[-1, 1]$, und b) $f(x)$ daselbst stetig, genügt ferner $f(x)$ in (α, β) gleichmäßig der Bedingung $f(x_1) - f(x_2) = o\{\log^{-1}|x_1 - x_2|^{-1}\}$, so konvergiert $H_n(f; x)$ in jedem inneren Teilintervall von (α, β) gleichmäßig gegen $f(x)$ “. Unter den Voraussetzungen des Satzes I ergibt sich natürlich immer eine Ungleichung der Form a) im Satz II. Ausgangspunkte beim Beweis sind außer den Fejérschen Arbeiten Ergebnisse von N. S. Bernstein, G. Szegő und besonders eine interpolationstheoretische Arbeit von P. Erdős und P. Turán (dies. Zbl. 24, 391).

P. Heuser.

Stečkin, S. B.: Über die beste Annäherung gegebener Funktionenklassen durch beliebige Polynome. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 133–134 (1954) [Russisch].

Hewitt, Edwin: Remark on orthonormal sets in $L_2(a, b)$. Amer. math. Monthly 61, 249–250 (1954).

Morgenstern, Dietrich: Verschärfung eines Vollständigkeitskriteriums von Kaczmaz und Steinhaus. Math. Nachr. 11, 191–192 (1954).

Das System der Potenzen x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ist im Raume $\mathfrak{L}_w^p(-\infty, \infty)$ ($w(x) \geq 0$; $1 \leq p < \infty$) der Funktionen $f(x)$ mit $\|f\|^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p w(x) dx < \infty$ vollständig („Linearkombinationen dicht“ = „Nichtexistenz orthogonaler Elemente im dualen Raum“), wenn $\limsup n^{-1} \|x^n\|^{1/n} = A < \infty$. — Dieser Satz findet sich bei Kaczmaz und Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa 1935, S. 280 (dies. Zbl. 13, 9) nur für $A = 0$. Der elegante Beweis beruht auf der Entwicklung von $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x) w(x) dx$ für reelles y nach Potenzen von η ($f(x) \in \mathfrak{L}_w^q$; $1/q + 1/p = 1$ für $p > 1$ bzw. $q = \infty$ für $p = 1$); es folgt aus $f \perp x^n$ dann $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x) w(x) dx \equiv 0$ im Streifen $|\operatorname{Im} y| < 1/e A$ und damit $f(x) = 0$ w -fast überall. — Dies Kriterium ist z. B. für die (verallgemeinerten) Laguerreschen Polynome anwendbar. — Bem. d. Ref.: 1. Die Unterscheidung zwischen „vollständig“ und „abgeschlossen“ für den L_w^1 ist unnötig. 2. In der letzten Anmerkung muß 8π durch 2 ersetzt werden. 3. In den Koeffizientenintegralen der genannten Potenzreihe fehlt der Faktor x^n .

F. W. Schäfke.

Bhatia, A. B. and E. Wolf: On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 40–48 (1954).

In einer dem Besprecher unzugänglichen Abh. (dies. Zbl. 9, 281) stellt F. Zernike eine vollständige Gesamtheit \mathfrak{Z}_l von Polynomen Γ zweier Veränderlichen x, y auf, die auf der Kreisscheibe \mathfrak{f} vom Halbmesser 1 orthogonal sind und sich bei Drehung φ des Bezugskreuzes um die Mitte O von \mathfrak{f} nicht ändern. Besprecher bemerkt, daß Polynomsysteme \mathfrak{Z}_l orthogonaler Polynome auf \mathfrak{f} seit 1870 mehrfach aufgestellt worden sind, wenn sie auch durch Hermites glänzende Entdeckung zweier auf \mathfrak{f} biorthogonaler Polynomsysteme (1865) in den Schatten gestellt schienen; auf das in einer Arbeit des Referenten (dies. Zbl. 45, 181) gesammelte, \mathfrak{Z}_l betreffende Schrifttum nehmen Verf. nicht Bezug. Die Brücke zwischen der älteren Behandlung der Frage und ihrer neuartigen Bearbeitung durch die Verf. ist noch nicht geschlagen. — Verf. weisen darauf hin, daß es viele \mathfrak{Z}_l gibt, z. B. entsprechend verschiedenen Reihenfolgen, in denen man die Potenzprodukte $x^h y^j$ ($h, j \geq 0$) auf \mathfrak{f} nach E. Schmidt orthogonalisieren kann. Die geforderte Drehinvarianz kommt, wie sie durch Bestimmung der Funktion $g(\varphi)$ in dem Ansatz eines (nicht notwendig reellen) Polynomes n -ten Grades

$$P(x, y) = g(\varphi) P(x \cos \varphi + y \sin \varphi, -x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

zeigen, ihm gerade dann zu, wenn es die Gestalt hat $P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = R(r) e^{il\varphi}$, wo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, l ganz und $R(r)$ ein Polynom n -ten Grades in r ist, das keine niedere

als die $|l|$ -te Potenz von r enthält und gerade oder ungerade ist, je nachdem ob $l \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$. Von konstanten Faktoren der V abgesehen, gibt es nur eine \mathfrak{R}_l , deren Mitglieder auf \mathfrak{f} orthogonal und drehinvariant sind und die zu jedem Paare ganzer $n, l, n \geq |l|$ mit geradem Unterschiede $n - |l|$ ein Polynom enthält. Beweis: Die linear unabhängigen Produkte $r^{l'+2k} e^{i l' \varphi}$ (l' ganz; $k = 0, 1, 2, \dots$) führen, auf dem Verfahren von Schmidt unterworfen, zu Ausdrücken $R_{l'+2k}^{l'}(r) e^{i l' \varphi}$, die das Gewünschte leisten; es folgt Einzigkeitsnachweis. Nach dem Weierstraßschen Annäherungssatze ist \mathfrak{R}_l vollständig. — Zernikes Kreispolynome, reell, sind $R_n^m(r) \cos m \varphi$, $R_n^m(r) \sin m \varphi$, wo $m \leq |l|$. — Verf. bestimmen $R(r)$ auch ausdrücklich, nämlich bei der Normung $R_n^m(1) = 1$ zu

$$R_n^{\pm m}(r) = (-1)^{(n-m)/2} \binom{n+m/2}{(n-m)/2} r^m G_{(n-m)/2}(m+1, m+1, r^2)$$

mit G als Jacobischen Polynomen, und gewinnen daraus eine Erzeugende der $R_{m+2s}^m(r)$ [$s = 0, 1, 2, \dots$]. — Sie stellen weiter Gesamtheiten \mathfrak{R}_l drehinvarianter, auf \mathfrak{f} orthogonaler Polynome W von x, y und r auf. Es gibt nur eine \mathfrak{R}_l , die zu gegebenen ganzen n, l mit $n \geq |l|$ ein Mitglied W enthält. W wird in der Form $S(r) e^{i l \varphi}$ gefunden, wo

$$S_n^{\pm m}(r) = (-1)^{n-m} \binom{n+m+1}{n-m} r^m G_{n-m}(2m+2, 2m+2, r) = R_{2n+1}^{\pm(2m+1)}(\sqrt{r})/\sqrt{r}.$$

L. Koschmieder.

Titchmarsh, E. C.: Some properties of eigenfunction expansions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 59–70 (1954).

Das Problem $\psi'' + (\lambda - q(x))\psi = 0$, ($0 \leq x < \infty$), $\psi(0) \cos \alpha + \psi'(0) \sin \alpha = 0$, besitzt ein diskretes Spektrum von Eigenwerten $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$ mit den zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_n(x)$. Es heiße die Entwicklung $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$ mit $c_n = \int_0^{\infty} f(t) \psi_n(t) dt$

... (R, λ, p) -summierbar zu $f(x)$, wenn $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^p c_n \psi_n(x) = f(x)$. In Anlehnung an Methoden von E. Hilb [Math. Ann. 76, 333–339 (1915)] bewies Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 45, 342) mittels Konturintegration die $(R, \lambda, 1)$ -Summierbarkeit der obigen Entwicklung unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ von der Klasse $L^2(0, \infty)$ ist und daß

$\int_0^{\eta} |f(x-t) - f(x)| dt = o(\eta)$ für $\eta \rightarrow 0$. Dieser Satz wird nun verallgemeinert. ber $q(x)$

wird eine Anzahl Voraussetzungen gemacht, die, grob gesprochen, besagen, daß $q(x)$ ähnliche Wachstumseigenschaften wie ein Polynom k -ten Grades aufweist. Dann ist die obige Entwicklung für eine in jedem endlichen Intervall integrierbare Funktion $f(x)$ fast überall (R, λ, p) -summierbar,

wenn $\int_0^T |f(t)| dt = o(T^a)$ für $T \rightarrow \infty$ mit geeignetem a gilt. Weiterhin wird der Fischer-Riesz-sche und der Young-Hausdorffsche Satz auf das vorliegende Problem übertragen. E. Kreyszig.

Bari, N. K.: Eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von S. N. Berntejn und A. A. Markov. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 159–176 (1954) [Russisch].

Verf. Überträgt einige bekannte Ungleichungen (ber die entsprechende Literatur wird ausführlich berichtet) zwischen den Beträgen eines Polynoms bzw. trigonometrischen Polynoms und seiner Ableitung auf die Norm im Raum L^p , die durch

$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p}$ ($p > 1$) definiert ist. Neben den Beweisen für die bereits

in der Voranzeige (dies. Zbl. 50, 292) mitgeteilten Sätze zeigt Verf., daß die eine Ungleichung auch für gewöhnliche Polynome gilt: $\|P_n'(x)\|_{L^p(a,b)} \leq C n^2 \|P_n(x)\|_{L^p(a,b)}$. C hängt nur von a und b ab. Ferner vergleicht er die Normen in verschiedenen Räumen miteinander, z. B. gilt: Es sei T_n ein trigonometrisches Polynom n -ter Ordnung und $1 \leq p < q < +\infty$. Dann ist

$$\|T_n\|_{L^q(a,b)} \leq K(a,b) n^{2(1/p-1/q)} \|T_n\|_{L^p(a,b)}.$$

Am Beispiel des speziellen Polynoms $[(\sin nt) \sin t]^4$ zeigt Verf., daß die erhaltenen Ungleichungen hinsichtlich der Größenordnung genau sind. W. Hahn.

Rogosinski, W. W.: Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials. Arch. der Math. 5, 182—190 (1954).

$\pi(x)$ bedeute entweder ein reelles Polynom $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ höchstens vom Grad n oder ein reelles trigonometrisches Polynom $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ höchstens vom Grad n . Unter diesen Polynomen werden gewisse Klassen ausgezeichnet: (1) Es sei $1 \leq \alpha < \infty$, E eine reelle Menge positiven Maßes und $W(x)$ eine positive, über E Lebesgue-integrierbare Funktion. Betrachtet wird dann die Klasse aller Polynome $\pi(x)$ mit $\int_E W(x) |\pi(x)|^\alpha dx \leq 1$.

Dabei kann im Fall der gewöhnlichen Polynome E unbeschränkt und von endlichem Maß sein. Im Fall der trigonometrischen Polynome wird $E \subseteq (0, 2\pi)$ vorausgesetzt. (2) $W(x)$ ist eine nicht-negative, nicht identisch verschwindende stetige Funktion, und es wird die Klasse aller Polynome $\pi(x)$ mit $\max_{a \leq x \leq b} W(x) |\pi(x)| \leq 1$ betrachtet (Grenzfall $\alpha = \infty$). (a, b) ist hierbei ein endliches Intervall, das im trigonometrischen Fall ein Teilintervall von $(0, 2\pi)$ ist. Das Problem besteht darin, im Fall der gewöhnlichen Polynome für gegebene reelle Zahlen $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ über den angegebenen Klassen das Maximum von $|\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n|$ zu bestimmen; bei den trigonometrischen Polynomen handelt es sich entsprechend um das Maximum von $|\lambda_0 a_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k + \mu_k b_k|$ bei gegebenen reellen Zahlen λ_k, μ_k . Ausführlich wird diese Fragestellung bei den gewöhnlichen Polynomen behandelt; für die trigonometrischen Polynome werden die entsprechenden Resultate zusammengestellt. Es ergeben sich Kriterien für diese Maxima und für die Polynome, bei denen das Maximum angenommen wird. Hierbei müssen die Fälle $\alpha = 1$, $1 < \alpha < \infty$ und $\alpha = \infty$ unterschieden werden. Im zweiten Fall gibt es bei geeigneter Normierung genau ein Maximalpolynom, und auch in den übrigen Fällen kann die Menge aller Maximalpolynome weitgehend beschrieben werden. Zur Beweisführung wird entscheidend der Erweiterungssatz von Hahn-Banach herangezogen, indem die Polynome als Punkte eines geeignet normierten linearen Raumes aufgefaßt werden.

H.-J. Kowalsky.

Helson, Henry: Proof of a conjecture of Steinhaus. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 205—206 (1954).

Steinhaus has conjectured that if a trigonometrical series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ is such that (S) $\sum_{n=-N}^N a_n e^{inx} \geq 0$ for all x and all sufficiently large N , then $a_n = o(1)$ ($|n| \rightarrow \infty$). Partial results have been obtained by various authors. Recently Salem and Zygmund have proved that (S) implies $(a_1 + \dots + a_n)/n = O(1/\log n)$. The author proves the conjecture of Steinhaus replacing (S) by a more general hypothesis: $\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx} \right| dx < \infty$ ($N \rightarrow \infty$).

J. A. Siddiqui.

Mohanty, R. and M. Nanda: On the behavior of Fourier coefficients. Proc. Amer. math. Soc. 5, 79—84 (1954).

Sia $F(t)$ integrabile in $(-\pi, \pi)$ e periodica di periodo 2π , sia $f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} a_0 + \sum A_n(t)$ la serie di Fourier di $f(t)$ e sia $\Sigma (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \Sigma B_n(x)$ la relativa serie coniugata. Sia poi $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) = l$, ove l è un numero finito. È noto che se $\psi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, allora la successione $\{n B_n(x)\}$ è convergente (C, r) per ogni $r > 1$ al valore l/π , ma non è necessariamente convergente $(C, 1)$. L'A. dimostra nella presente nota che se $\psi(t) = o[(\log t^{-1})^{-1}]$ quando $t \rightarrow 0$ e $a_n = O(n^{-\delta})$, $b_n = O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < 1$, allora la successione $\{n B_n(x)\}$ è convergente $(C, 1)$ al valore l/π . L. Cesari.

Spezielle Funktionen:

Delerue, P. et J. M. Blondel: Sur des généralisations de la fonction de Mittag-Leffler. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 68, 42—52 (1954).

Die Mittag-Lefflersche Funktion $E_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha + 1)}$ und ihre Verallge-

meinerungen, wie z. B. $E_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+[\beta(n+1)-1]/\alpha} y^n}{\Gamma(m\alpha + (n+1)\beta) \Gamma(n\beta + 1)}$, haben sehr einfache eindimensionale bzw. zweidimensionale Laplace-Transformierte. Hieraus ergeben sich leicht viele Relationen für jene Funktionen. *G. Doetsch.*

Meyer, Burnett: On the symmetries of spherical harmonics. *Canadian J. Math.* **6**, 135—157 (1954).

Zu bestimmen sind alle Kugelfunktionen mit gegebener kristallographischer Symmetriegruppe. Mittels eines Satzes von Molien [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Berlin **2**, 1152—1156 (1897)] findet man zunächst die Anzahl der Elemente in einer Basis aller homogenen Polynome von gegebenem Grad mit gegebener Symmetrie. Mittels erzeugender Funktionen erhält man dasselbe für die Kugelfunktionen. Endlich bestimmt man eine gewünschte Basis für die Kugelfunktionen; diese hängt ab von den partiellen Derivierten des reziproken Abstandes vom Ursprung. In Tabellen werden die zu den einzelnen Gruppen gehörigen erzeugenden Funktionen, sowie die erzeugenden Matrizen ihrer zyklischen Untergruppen angegeben.

J. J. Burckhardt.

Cazenave, René: Sur une nouvelle expression intégrale de la fonction de Legendre de seconde espèce $Q_n(x)$ d'ordre n positif pour $-1 < x < +1$. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér.* **17**, 139—141 (1954).

Wenn $Q_n(x)$ die Legendresche Funktion 2. Art bedeutet, so gilt

$$Q_n(\cos \theta) = \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\cos^n \theta} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\cos^n \varphi \cos(n+1)\varphi}{(\cos 2\theta - \cos 2\varphi)^{1/2}} d\varphi,$$

$$n > 0, \text{ reell, } \varepsilon = \operatorname{sgn} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

K. Prachar.

Parodi, Maurice: Sur une propriété des fonctions de Bessel. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 195—196 (1954).

$$\text{Beweis für die Relation: } n 2^{-n} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} a_k J_1((n-2k)z \sin \vartheta) d\vartheta = (1 - \cos^n z) z^{-1}.$$

$$a_k = \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} (n-2k).$$

O. Volk.

Cooke, J. C.: Note on some integrals of Bessel functions with respect to their order. *Monatsh. Math.* **58**, 1—4 (1954).

Es sei Φ eine reelle Funktion. Verf. kann außer dem bekannten Integral $\int_{-a-i\infty}^{+a+i\infty} J_{\nu-i\xi}(z) J_{\nu+i\xi}(z) \cos \Phi \xi d\xi$ die weiteren Integrale $\int_{-a-i\infty}^{+a+i\infty} K_{\xi}(z) \zeta(\nu) (\xi-a) \Phi d\xi$, $\int_{-a-i\infty}^{+a+i\infty} K_{\xi}(z) \zeta(\nu) (\xi-a) \Phi d\xi$, $\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\xi}(z) \cos \Phi \xi d\xi$, $\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\xi}(z) \sin \Phi \xi d\xi$ | $I_{\xi}(z)$ $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\theta \xi - z \sin \theta) d\theta$] mit dem Sonderfall $\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\xi}(z) d\xi = 1$ auswerten.

O. Volk.

Toscano, Letterio: Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* **9**, 29—38 (1954).

Seien $D_{\nu}(x)$ die Funktionen des parabolischen Zylinders, welche so definiert sind:

$$D_{\nu}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-\nu))} 2^{\nu/2} e^{-x^2/4} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2}(1-\nu))} 2^{(\nu-1)/2} x e^{-x^2/4} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right).$$

Es wird gezeigt: $e^{x^2/4} D_\nu(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\nu/2} \Gamma(s)} {}_2F_1\left(-\nu, s+h+\nu; \frac{s+k+1}{2}; \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)$,
 ν, h, k beliebig. Davon werden verschiedene Anwendungen gemacht, indem
 ν, h, k spezialisiert werden. K. Prachar.

Carlitz, Leonhard: Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre. Math. Z. **59**, 474–483 (1954).

Seien $H_n(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $P_n(x)$ bzw. die Hermiteschen, Laguerreschen, Legendreschen Polynome. Gezeigt wird: Für $u_n = H_n(x)$ oder $u_n = n! L_n^{(\alpha)}(x)$ [α eine Unbestimmte oder α rational mit zu m teilerfremdem Nenner] ist (*) $\Delta^{2r} u_n \equiv 0$,

$$\Delta^{2r-1} u_n \equiv 0 \pmod{m^r}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 1, \quad r \geq 1, \quad \Delta^k u_n = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} u_{n+sm} u_{(k-s)m}.$$

Daraus wird z. B. gefolgert: $H_{n+m}(x) \equiv (2x)^m H_n(x) \pmod{m}$, $(n+m)! L_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m n! L_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}$ ($\alpha = a/b$, $(b, m) = 1$). Weiter gilt $n! P_{n+m}(x) \equiv n! P_n(x) P_m(x) \pmod{m}$, $n \geq 0$, m ungerade, $n! P_{m-n-1}(x) \equiv n! P_n(x) P_{m-1}(x) \pmod{m}$, $m > n \geq 0$, m ungerade. Zum Beweis von (*) wird benützt, daß für u_n eine Rekursion der Form

$$u_{n+1} = f(n) u_n + g(n) u_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

gilt (f, g ganzzahlige Polynome, $u_0 = 1$, $g(0) = 0$).

K. Prachar.

Palamà, Giuseppe: Relazioni tra i polinomi associati alle funzioni di Laguerre e di Hermite. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 64–66 (1954).

Für die Polynome $G_n(x)$ der Rekursion $G_n(x) - x G_{n-1}(x) + n G_{n-2}(x) = 0$, $G_0(x) = 1$, $G_1(x) = x$, die mit den Hermiteschen Polynomen $H_n(x)$ durch die Beziehungen

$$H_n(x) G_n(x) - H_{n+1}(x) G_{n-1}(x) = n!, \quad H_n(x) G_{n+1}(x) - H_{n+2}(x) G_{n-1}(x) = n! x$$

verbunden sind, werden die Formeln bewiesen: $G_{2n-1}(x) = (-2)^{n-1} n! P_{n-1}^{(1/2)}(x^2/2)$,

$$G_{2n}(x) = (-2)^{n-1} n! P_n^{(1/2)}(x^2/2) + x^{-1} H_{2n+1}(x), \quad (-1)^{n-1} G_{n-1}(x) n! = \lim_{h \rightarrow 0} (h^{n-1} P_n^{(1/2)}(x^2/2)) (x h + 1/h^2).$$

Die Polynome $P_n^{(\alpha)}(x)$ bestimmen sich aus der Rekursion

$$(n+1) P_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+\alpha+1-x) P_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha) P_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0, \quad P_0^{(\alpha)}(x) = 0, \quad P_1^{(\alpha)}(x) = 1.$$

O. Volk.

Bagchi, Hari Das and Bhola Nath Mukherjee: Note on the operational representations of some special functions. Math. Z. **60**, 88–93 (1954).

Beiträge zum Wörterbuch der Laplaceschen Abbildung in Carsons Form \mathfrak{C} , die hauptsächlich die Hermiteschen Funktionen zweiter Art $h_m(x)$ in ihrer von Palamà (dies. Zbl. **39**, 301) gegebenen Darstellung betreffen. Hilfsmittel: Faltungs- und Dämpfungssatz, eine auf zwei Funktionen und ihre \mathfrak{C} -Bilder bezügliche Integralgleichheit \mathfrak{Z} und eine Reihe von \mathfrak{C} -Entsprechungen, von denen einige nach Doetschs Tabellen zur Laplace-Transformation (Berlin 1947, dies. Zbl. **29**, 45) angeführt seien: S. 76, Nr. 15; S. 95, Nr. 91, 92. Wird $\lambda(n) = n! 2^{2n+1/2} \lfloor \pi$, $\mu(n) = n! 2^{2n+1/2} \rfloor \pi$, $\Phi(n) = (2n)! (2^n n!)^{-1} \lfloor \pi$, $\psi(n) = (2n+1)! (2^{n+1/2} n!)^{-1} \lfloor \pi$ gesetzt, so lauten die Hauptergebnisse

$$(1) h_{2n}(x^{1/2}) = (-1)^n \lambda(n) p^{-1/2} (1-p^{-1})^{n-1/2}, \quad x^{-1/2} h_{2n+1}(x^{1/2}) = (-1)^n \mu(n) p^{1/2} (1-p^{-1})^{n+1/2}.$$

Sind $H_n(x)$ die Hermiteschen Polynome, so ist $h_{2n}(\lfloor x) = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^x \frac{1}{t} H_{2n}(\lfloor t) L_{n-1/2}(x-t) dt$,

und nach \mathfrak{Z} : $\int_0^\infty x^{-1/2} (1-x^{-1})^n h_{2n}(x^{1/2}) dx = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^\infty x^{-2} (1-x^{-1})^{n-1/2} H_{2n}(x^{1/2}) dx$; entsprechende Formeln bei ungeraden Zeigern. Es gilt die Integralbeziehung

$$\int_0^1 e^{-t} t^{-1/2} h_{2n+1}(t^{1/2}) dt = 2 e^{-x} h_{2n}(x^{1/2}).$$

Wenn $\gamma(n+1, x)$ die unvollständige Gamma-Funktion bedeutet, so ist

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{3/4} J_{3/2}(2\sqrt{x}s) e^{-s} h_{2n}(\sqrt{s}) ds = (-1)^n \lambda(n) [\Gamma(n+1)]^{-1} \gamma(n+1, x).$$

Aus dem ausgeschriebenen Bilde (1) erhält man mit $p = x^2$, $x \neq 0$ eine Formel, die n -mal nach x abgeleitet, das Legendresche Polynom in der Gestalt liefert

$$\int_0^\infty h_{2n}(\sqrt{u}) \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} e^{-u/x^2} \right| \right] du = \lambda(n) 2^n n! P_n(x).$$

L. Koschmieder.

Lense, J.: Über die asymptotische Entwicklung der Hankelschen Funktionen für große positive Werte der Veränderlichen und des Zeigers. Z. angew. Math. Mech. **34**, 44—53 (1954).

Die Herleitung einer asymptotischen Formel für die Hankelfunktion aus der Sommerfeldschen Integraldarstellung $H_\nu^{-1}(x) = \pi^{-1} \int e^{i\tau} d\tau$ bei positiven x und ν mit $f(\tau) = i[\tau - (x/\nu) \sin \tau]$ bereitet nach dem Sattelpunktsverfahren bekanntlich für $x/\nu < 1$ Schwierigkeiten, weil die Wachstumsbeschränkungen des Watsonschen Lemmas auf den Falllinien als Integrationswegen nicht mehr erfüllt sind. Weyrich (Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig 1937, S. 57 bis 58) umgeht die Schwierigkeit, indem er in der w -Ebene mit $w = f(\tau_0) - f(\tau)$ (τ_0 Sattelpunkt) nicht über die reelle Achse, sondern über einen Halbstrahl integriert, der mit der reellen Achse einen spitzen Winkel bildet. Hier wird gezeigt, daß der von Weyrich verwendete Weg in der w -Ebene nicht auf den bei der Sommerfeldschen Integraldarstellung vorgeschriebenen Weg in der τ -Ebene führen muß. Weiter wird der Beweis erbracht, daß aber auch dann die von Weyrich angegebene asymptotische Formel richtig ist. — In der Arbeit wird eine zweite Möglichkeit vorgeschlagen, um das Watson-Lemma anwenden zu können. Hierzu wird der Integrationsweg in der Nähe des zweiten Sattelpunktes in passender Gestalt ausbuchtet, was nach dem Cauchyschen Satz erlaubt ist.

H. Unger.

Toscano, L.: Équation différentielle de la fonction hypergéométrique confluyente Ψ , considérée comme fonction d'une seule variable. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 164—170 (1954).

Es wird von der konfluenten hypergeometrischen Funktion mit zwei Veränderlichen u und v ausgegangen. Diese Funktion genügt bekanntlich einem Paar partieller Differentialgleichungen. In der Arbeit wird nun die eine oder die andere der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v als konstant angesehen und die Abhängigkeit von der jeweils anderen Veränderlichen untersucht. Es zeigt sich, daß dann die Funktion sowohl in dem einen wie in dem anderen Fall einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 4. Ordnung genügt. Als Anwendung wird insbesondere die Differentialgleichung aufgestellt, deren Lösung durch das Produkt zweier Hermite'scher Polynome gegeben ist.

H. Buchholz.

Höfinger, E.: Zur Theorie der verallgemeinerten Pochhammerschen Differentialgleichung. Monatsh. Math. **57**, 317—332 (1954).

Von einer Arbeit G. D. Birkhoffs [Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **49**, 521—568 (1913)] angeregt, behandelte Verf. früher die verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung (Dgl.) \mathfrak{S} (dies. Zbl. **46**, 297) und die (Laplace'sche) lineare Dgl. n -ter Ordnung \mathfrak{L} mit linearen Vorzahlen (dies. Zbl. **50**, 89), wobei in der Lösung von \mathfrak{S} Mellin'sche, in derjenigen von \mathfrak{L} Laplace'sche Faltungen auftraten. Hier untersucht er die verallgemeinerte Pochhammersche Dgl. \mathfrak{P} ,

$$\varphi_0(z) y^n + \sum_{h=1}^n (-1)^h \frac{(\lambda - n + 1) \cdots (\lambda - n + h - 1)}{(h-1)!} \left[\frac{\lambda - n}{h} \varphi_0^{(h)}(z) + \psi^{(h-1)}(z) \right] y^{(n-h)} = 0,$$

$$\psi(z) = \varphi_0(z) \left\{ \sum_{i=1}^q \left[- \sum_{q_i=0}^{k_i-1} \frac{(k_i - q_i) c_{k_i-q_i}^i}{(z - a_i)^{k_i+1-q_i}} + \frac{b_i + k_i}{z - a_i} \right] + \sum_{q=0}^{k-1} (q+1) c_{q+1} z^q \right\},$$

$$\varphi_0(z) = \prod_{i=1}^q (z - a_i)^{k_i+1}, \quad n = \sum_{i=1}^q k_i + k + q;$$

sie ist die einzige Dgl. n -ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, die die Punkte a_i ($i=1, \dots, q$), ∞ als singuläre Stellen (s. St.) besitzt und an a_i durch $n-1$ Potenzreihen in $z - a_i$ und durch eine Normalreihe mit dem bestimmenden Faktor $M_i = e^{p_i(z-a_i)^{b_i-1} \lambda (k_i+1)}$, $p_i(z - a_i) = \sum_{q_i=0}^{k_i-1} \frac{c_{k_i-q_i}^i}{(z - a_i)^{k_i+1-q_i}}$, nämlich durch $T_j^i(z) = Q_j^i(z - a_i)$ [$j=1, \dots, n-1$], $T_n^i(z) = M_i Q_n^i(z - a_i)$, befriedigt wird, wo Q_j^i, Q_n^i Potenzreihen in $z - a_i$. Wie sich diese Aussagen für $z = \infty$ abändern, sei hier übergangen. — Es gibt nur eine die Dgl. \mathfrak{P} erfüllende Funktionen-

schar G , zu der auch ihre bekannten Lösungen in der Form von Faltintegralen

$$y(z) = \int_L \prod_{i=1}^q [e^{p_i(u-a_i)} (u-a_i)^{b_i-1}] \left\{ \exp \left(\sum_{q=1}^k c_q u^q \right) \right\} (u-z)^{\lambda-1} du$$

Zugang bieten: Die Betrachtung der Integrationswege L , Doppelschleifen oder Schleifen, führt zu der anschließend an \mathfrak{P} angegebenen Reihengestalt der (n unabhängigen) Lösungen zurück. — Wegen einer Abwandlung \mathfrak{Q} von \mathfrak{P} , die an $z = a_i$ ($i = 1, \dots, q+1$) einfache s. St. der Unbestimmtheit vom Range k_i mit den bestimmenden Faktoren $e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{d_i-\lambda_i}$ hat und $z = \infty$ als s. St. der Bestimmtheit mit den Exponenten $-\lambda + j$ ($j = 1, \dots, n$) besitzt, sei auf die Abh. selbst verwiesen. — Ist $n = 2$, so hat \mathfrak{Q} entweder 3 s. St. der Bestimmtheit, oder eine s. St. vom Range 1 und eine s. St. der Bestimmtheit, oder eine s. St. vom Range 2, und ist demnach entweder Riemanns Dgl. R oder Kummer's Dgl. K oder Hermites Dgl. H. Bei K und H lassen sich Gestaltswandel \mathfrak{G} der Lösung G angeben, die bei K die Kummer'sche Verwandlung, bei H den Zusammenhang zwischen H und K liefern. Im besonderen führt \mathfrak{G} zu zwei bekannten Darstellungen der Laguerreschen (und zu vierten der Hermiteschen) Polynome, von Rodrigues'scher Art, mit den unabhängigen z, z^{-1} (z, z^2, z^{-1}, z^{-2}). [Auf S. 329, Z. 9 v. u. lies ∞ in zweiter Spalte von G .] — Bei R ist G die Riemann'sche P -Funktion. Auch die allgemeinen Lösungen der auf hypergeometrische Konfluenz zurückführbaren Kummer'schen, Besselschen, Whittakerschen und Weberschen Dgl. lassen sich durch die G -Funktion ausdrücken. L. Koschmieder.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -function. VI, VII. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 77–82, 83–91 (1954).

Fortsetzung der gleichbenannten Arbeiten MI–V des Verf. Berichte darüber BI–V in dies. Zbl. **48**, 307, 308; **50**, 294; **51**, 308. Da diese über Ziel und Mittel des Verf. Aufschluß bieten, darf es weiterhin bei kurzer Angabe der Ergebnisse bewenden. — In M VI beweist Verf. 5 Hilfssätze L, in denen $k \geq 0$ ganz, und in deren beiden ersten $\mu > 0$ beliebig ist.

L 1. Ist $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha_j) < 0$ ($j = 1, \dots, k$) und $\operatorname{Re}\left(\gamma + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \sum_{j=1}^k \beta_j\right) < 1$, so ist

$$\int_{-\infty i - \mu}^{\infty i - \mu} {}_k\mathcal{P}_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_k; -u) (-u)^{\gamma-1} du = 2\pi i \prod_{j=1}^k \Gamma(\alpha_j - \gamma) \prod_{j=1}^k \Gamma(1 - \gamma) \prod_{j=1}^k \Gamma(\alpha_j) \prod_{j=1}^k \Gamma(\beta_j - \gamma).$$

L 2. Ist auch $r \geq 0$ ganz, und sind $c_1, \dots, c_k; d_1, \dots, d_{k+1}$ so geartet, daß $\operatorname{Re}(c_j - 1) < 0$ ($j = 1, \dots, k$) und $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k+1} d_j - \sum_{j=1}^k c_j\right) < 1$, so gilt für alle λ

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty i - \mu}^{\infty i - \mu} {}_k\mathcal{P}_k(1 + d_{k+1} - c_1, \dots, 1 + d_{k+1} - c_k; 1 + d_{k+1} - d_1, \dots, 1 + d_{k+1} - d_k; -u) \left(1 - \frac{\lambda}{u}\right)^r (-u)^{-1+d_{k+1}} du \\ &= 2\pi i \prod_{j=1}^k \Gamma(1 - c_j) \left(\prod_{j=1}^k \Gamma(1 + d_{k+1} - c_j)\right)^{-1} {}_{k+1}\mathcal{P}_{k+1}\left(\begin{matrix} -r, 1 - c_1, \dots, 1 - c_k; \\ 1 - d_1, \dots, 1 - d_{k+1}; \lambda \end{matrix}\right). \end{aligned}$$

— Beweis mit Hilfe von L 1. — L 3. Es gelte BI(2), und $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; c_1, \dots, c_k; d_1, \dots, d_{k+1}$ mögen die Bedingungen BI(3) und $\operatorname{Re}(c_j - b_h - 1) < 0$ ($j = 1, \dots, k; h = 1, \dots, m$), $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k+1} d_j - \sum_{j=1}^k c_j - b_h\right) < 1$ erfüllen; ferner sei $\zeta \neq 0$ und μ , wenn $q > p$, beliebig > 0 , wenn aber $q = p$ ist, $\mu > |\zeta|$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty i - \mu}^{\infty i - \mu} {}_k\mathcal{P}_k(1 + d_{k+1} - c_1, \dots, 1 + d_{k+1} - c_k; 1 + d_{k+1} - d_1, \dots, 1 + d_{k+1} - d_k; -u) G_{p,q}^{m,n}\left(-\frac{\zeta}{u} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) (-u)^{-1+d_{k+1}} du \\ &= 2\pi i \left(\prod_{j=1}^k \Gamma(1 + d_{k+1} - c_j)\right)^{-1} G_{p+k, q+k+1}^{m, n+k}\left(\zeta \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_{k+1} \end{matrix} \right. \right). \end{aligned}$$

Den L_2, L_3 jeweils verwandt sind die folgenden L_4, L_5 , deren Wortlaut hier wegbleibe. — In M VII beweist Verf. folgenden zweiteiligen sechsten Hauptsatz (Hs.), bei dem $k \geq 0$ ganz, $w \neq 0, \lambda > 0$ ist, BI(3) gilt und $\operatorname{Re}(c_j - b_h - 1) < 0$ ($j = 1, \dots, k; h = 1, \dots, m$), $\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{k+1} d_j - \sum_{j=1}^k c_j - 2b_h\right) < \frac{3}{2}$ angenommen wird. Hs. 6A: Gilt BI(2) und ist $p < q$, so ist

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j=1}^k \Gamma(1 - c_j)\right)^{-1} G_{p+k, q+k+1}^{m, n+k}\left(\lambda w \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_{k+1} \end{matrix} \right. \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} {}_{k+1}\mathcal{P}_{k+1}\left(\begin{matrix} -r, 1 - c_1, \dots, 1 - c_k; \\ 1 - d_1, \dots, 1 - d_{k+1}; \lambda \end{matrix}\right) G_{p+1, q+1}^{m, n+1}\left(w \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, r \end{matrix} \right. \right). \end{aligned}$$

ervollständigungen z. B. für $q = p$. — Hs. 6B: Sind m, n, p ganz und $1 \leq m \leq p, 1 \leq n \leq p+1, m+n-p=1$, $\arg w = (m-n-p-1)\pi$, so ist

$$\left(\prod_{j=1}^k \Gamma(1-c_j) \right)^{-1} G_{p+k+1, p+k+1}^m \left(\lambda w \left| \begin{matrix} c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p, d_1, \dots, d_{k+1} \end{matrix} \right. \right) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_{k+1}\mathcal{P}_{k+1} \left(\begin{matrix} -r, 1-c_1, \dots, 1-c_k \\ 1-d_1, \dots, 1-d_{k+1} \end{matrix}; \lambda \right) G_{p+1, p+2}^{n, m+1} \left(\frac{1}{w} \left| \begin{matrix} 1-r, 1-b_1, \dots, 1-b_p \\ 1-a_1, \dots, 1-a_{p+1} \end{matrix} \right. \right).$$

ervollständigungen. — Beweismittel, etwa des Hs. 6A: Die Potenzreihe B I (7), mit Ersatz von λ durch $-\lambda u$, nach dem sie \mathfrak{P} heiße. Kenntnis des Verhaltens ihrer Vorzahlen $(r!)^{-1} G_{p+1, p+2}^{m, n+1}(w)$ für großen Werten von r . Integration der geeignet vervielfachten Reihe \mathfrak{P} mit Hilfe der Sätze L 2, 3 aus M VI (s. o.). — Wie Hs. 3 (M III) durch Hs. 6 ergänzt wird, so Hs. 4 (M IV) durch einen weiteren Hs. 7, von dessen Wiedergabe hier abgesehen sei. *L. Koschmieder.*

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G-function. VIII. Transformation formulae for generalized hypergeometric functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 273—279 (1954).

Fortsetzung der gleichbenannten Arbeiten M I, ..., VII des Verf.; Berichte darüber I—VII in dies. Zbl. **48**, 307, 308; **50**, 249; **51**, 308 und vorstehendes Referat. — Mit vorliegender Mitteilung M VIII verfolgt Verf. den Wandel der Gestalt hypergeometrischer Funktionen (h. F.) [und ihrer Entartungen], vor allem die beiden (bekannten) Grundformeln ${}_2\mathcal{F}_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} {}_2\mathcal{F}_1[c-a, b; c; z/(z-1)]$, $[w/(1+w)]^b {}_2\mathcal{F}_1[c-a, b; c; 1/(1+w)] = [\pi/\sin(b-a)\pi] \{ [w^a/\Gamma(b)\Gamma(c-a)] {}_2\mathcal{F}_1(a, 1+a-c; 1+a-b; -w) - [w^b/\Gamma(a)\Gamma(c-b)] {}_2\mathcal{F}_1(b, 1+b-c; 1+b-a; -w) \}$

aus den besonders in M IV, V gefundenen allgemeinen Entwicklungen herzuleiten. Die zweite Art, wie er zeigt, ein Sonderfall des Hs. 4 (s. B IV), die erste ein solcher des Hs. 5 (s. B V). — Verf. gibt eine aus Hs. 5 folgende Entwicklung der Funktion ${}_2\mathcal{F}_1$ an, die ihrerseits obige Poincarésche Transformation der allgemeinen (und eine Kummerische der entarteten) h. F. als Sonderfälle enthält. Noch zu zwei andern Kummerischen, auf ${}_1\mathcal{F}_1$ und ${}_2\mathcal{F}_1$ bezüglichen Formeln findet Verf. eine beide verallgemeinernde, aus Hs. 5 folgende Entwicklung. *L. Koschmieder.*

Funktionentheorie:

● **Valiron, Georges: Fonctions analytiques.** Paris: Presses Universitaires de France 1954. 236 S.

Ein erheblicher Teil des Buches ist der Untersuchung solcher eindeutiger analytischer Funktionen gewidmet, die Lösungen gewisser Funktionalgleichungen (Schrderische und Poincarésche Funktionalgleichung, algebraische Differentialgleichungen) sind. Diese Tatsache bringt es mit sich, daß Ergebnisse der Funktionentheorie dargestellt werden, die sonst in Lehrbüchern kaum Platz gefunden haben. Viele Beiträge zur Theorie der analytischen Funktionen, die man dem Verf. verdankt, sind in die Darstellung eingebaut. Eine knappe Inhaltsübersicht möge über den behandelten Stoff orientieren. 1. Grundbegriffe aus der Theorie der analytischen Funktionen, Analytische Fortsetzung, Konstruktion von Funktionen mit gegebenem Existenzgebiet, Polygonabbildung. 2. Schlechte Funktionen: Satz von Bieberbach und Faber, Verzerrungsstze, Koeffizientenabschtzung von Littlewood. 3. Sätze von Fatou und Riesz über Randwerte analytischer Funktionen. 4. Sätze über die Winkelableitung und Anwendung auf die Theorie der konformen Abbildung. 5. und 6. Iteration von rationalen und eindeutigen regulär analytischen Funktionen. 7. Funktionalgleichung von Poincaré. 8. Nicht fortsetzbare Funktionen, Studium der von diesen Funktionen erzeugten Riemannschen Flächen. 9. Untersuchungen über den Zentralindex von Viman und Valiron. 10. Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen. — Hinweise auf neuere einschlägige Arbeiten ergänzen die schöne und reizvolle Darstellung. *H. Wittich.*

Vekua, N. P.: ber eine Randwertaufgabe mit linearer Bindung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 173—176 (1954) [Russisch].

D^+ sei ein zusammenhängendes Gebiet der Klasse Ah der z -Ebene und L sein Rand. Gesucht sind n in D^+ meromorphe, in $D^+ \cup L$ H -stetige Funktionen $\varphi_i(z)$, die für $z = z(t) \in L$ den Bedingungen $\varphi_i(\alpha(t)) = \sum_{k=1}^n G_{ik}(t) \varphi_k(t) + g_i(t)$ genügen. Dabei soll $\alpha(t)$ eindeutig-umkehrbar und H -stetig sein und den Umlaufssinn auf L umkehren. Verf. behandelt den Fall, daß α der Funktionalgleichung $\alpha^m(t) = t$

genügt (m gerade positive Zahl und z. B. $\alpha^2(t) = \alpha\{\alpha(t)\}$). (Für $m = 2$ vergleiche Carleman, dies. Zbl. 6, 400.) Mittels eines Belegungsansatzes ergibt sich für die Belegungsfunktionen ein System von singulären Integralgleichungen. Durch Übergang von q_i zu $\Phi_i(z) = z^r q_i(z)$ ($r \geq 0$, ganz) kann stets erreicht werden, daß die Integralgleichungen im homogenen Falle ($g_i = 0$) lösbar sind. Im inhomogenen Falle sind Bedingungsgleichungen an g_i für die Lösbarkeit zu stellen.

Joachim Nitsche.

Walsh, J. L. and J. P. Evans: On approximation by bounded analytic functions. Arch. der Math. 5, 191—196 (1954).

J. L. Walsh hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 19, 404) u. a. folgendes bewiesen: Es sei C_1 der Rand eines schlichten Gebietes R_1 und bestehe aus endlich vielen punktfremden Jordankurven, $R_1 + C_1 = \bar{R}_1$. Greift man aus R_1 ein ebenso beschaffenes echtes Teilgebiet R_0 mit dem Rande C_0 heraus, und ist $R_1 - \bar{R}_0$ zusammenhängend, so kann eine in R_0 reguläre Funktion $f(z)$ durch reguläre analytische Funktionen $f_M(z)$ gleichmäßig und konvergent approximiert werden. Hierzu sucht man nach Wahl von $M > 0$ unter allen Funktionen, die in R_1 regulär und deren Beträge dort $\leq M$ sind, die (oder eine) heraus, für die $\max. |f(z) - f_M(z)|$, z in \bar{R}_0 möglichst klein wird. Für diese Funktionen ist $\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(z) = f(z)$ in R_0 . Falls R_0 aus mehreren, getrennten

Teilen besteht, darf $f(z)$ in jedem eine andere analytische Funktion sein. In der vorliegenden Arbeit dehnen die Verff. dieses Resultat auf den Fall aus, daß der Durchschnitt $C_1 \cdot C_2 = S$ der Ränder nicht leer ist, wie oben vorausgesetzt, vielmehr darf S nicht nur abzählbar viele Punkte, sondern sogar gemeinsame Bogen von C_1 und C_2 enthalten, wofür nur diejenigen Punkte von S , die Randpunkte von $R_1 - \bar{R}_0$ sind, abzählbar bleiben. Beim Beweis wird die eindeutig bestimmte Funktion $\Phi(x, y)$ benutzt, die in $R_1 - \bar{R}_0$ harmonisch und beschränkt, in $R_1 - R_0 - S$ stetig ist und die auf $C_0 - S$, $C_1 - S$ bzw. die Werte 0 und 1 hat, ferner der Nevanlinnasche Zweikonstantensatz in einer passenden Formulierung. Die Arbeit ist Herrn Ostrowski zum 60. Geburtstag gewidmet.

P. Heuser.

Erdős, Paul, Fritz Herzog und George Piranian: On Taylor series of functions regular in Gaier regions. Arch. der Math. 5, 39—52 (1954).

Die Verff. beschäftigen sich mit Funktionen $f(z) = \sum a_n z^n$, die in einem Kreis C_a : $|z + a| < 1 + a$ ($a > 0$) regulär sind; C_a wird als „Gaier disc“ (G. d.) bezeichnet. Der Ref. bewies (dies. Zbl. 47, 312, insbes. S. 327/328 der Arbeit): (1) Ist $f(z)$ in C_a regulär und beschränkt, so gilt $a_n = O(n^{-1/2})$; (2) existiert ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z)$ für $z \rightarrow 1$ in C_a , so gilt sogar $a_n = o(n^{-1/2})$. Daran anknüpfend beweisen die Verff. auf kunstvolle Art, daß O in (1) nicht allgemein durch o ersetzt werden kann, und behandeln dann den allgemeineren Fall, daß (3) $(1 - z)^k f(z)$ für reelles k in einem G. d. beschränkt ist. Es ergibt sich hier

(4) $a_n = O(n^{k-1})$ ($k > 1$); $a_n = O(\log n)$ ($k = 1$); $a_n = O(n^{(k-1)/2})$ ($k < 1$);

darin kann O nicht allgemein durch o ersetzt werden, jedoch sicher dann, wenn $k \leq 1$ ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z)^k f(z)$ für $z \rightarrow 1$ in C_a existiert. — Sodann werden, wieder unter der Voraussetzung (3),

Abschnitte der Form $S_n = \sum_{j=n}^{2n} |a_j|$ wie folgt abgeschätzt:

$S_n = O(n^k)$ ($k > 1/2$); $S_n = O(\sqrt{n \log n})$ ($k = 1/2$); $S_n = O(n^{k/2+1/4})$ ($k < 1/2$);

für $k \neq 1/2$ kann O nicht durch o ersetzt werden. — Auf ähnliche Weise werden einige Konvergenzaussagen gewonnen. Gilt (3) für ein $k > 1/2$ [d. h. es ist $f(z) = O((1 - z)^k)$ ($z \rightarrow 1$)], so ist $\sum a_n \cdot \infty$ und $\sum n a_n \cdot \infty$; die Aussage wird falsch für $k = 1/2$. Gilt (3) für ein $k < 0$, so konvergiert $\sum a_n z^n$ gleichmäßig auf $|z| = 1$, und auch dies wird falsch für $k = 0$. — Ist schließlich $(1 - z)^k f(z)$ ($k > 1$) in einem Gebiet regulär und beschränkt, das $|z| < 1$ enthält und dessen Rand den $|z| = 1$ in $z = 1$ von der Ordnung p berührt ($p \geq 1$), so gilt allgemeiner als in (4) stets $a_n = O(n^{(k-1)/p})$.

D. Gaier.

Schneider, Theodor: Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes. Math. Z. 60, 98—108 (1954).

Verf. zeigt mittels seiner Methode (vgl. dies. Zbl. 44, 43) eine Umkehrung des Eisensteinschen Satzes, und charakterisiert dadurch die algebraischen bzw. rationalen Funktionen einer Variablen. Für die genauere Formulierung muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

E. Hlawka.

Myrberg, P. J.: Über die Iteration von algebraischen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1 164, 9 S. (1954).

$P(x, y) = 0$ sei eine irreduzible algebraische Gleichung; es wird die Iteration der aus ihr hervorgehenden Funktion $y = q(x)$ behandelt. Die iterierten $q_n(x)$ von $q(x)$, die mit $q_0(x) = x$, $q_n(x) = q[q_{n-1}(x)]$, $q_n[q_n(x)] = x$ ($n = 1, 2, \dots$) definiert sind, stellen eine Gruppe \mathfrak{G} von Funktionen dar. Es soll nun die Häufungsmenge $\mathfrak{M}(x)$ derjenigen Punkte der komplexen Zahlenebene bestimmt werden, die aus einem beliebigen Punkt x durch die Elemente von \mathfrak{G} hervorgehen. Diese alte und meist schwierigere Aufgabe der Iterationstheorie wird hier für den speziellen Fall untersucht, daß es eine automorphe Funktion $x = f(z)$ und eine lineare Funktion $z' = S(z) = az + b$ ($cz + d$)⁻¹ gibt, so daß $y = q(x) = f[S(z)]$ ist. Der automorphen Funktion $f(z)$ sei dabei die Gruppe Γ gewisser linearer Transformationen $T_v(z)$ der z -Ebene zugrunde gelegt; von Γ und der transformierten Gruppe $\Gamma' = S\Gamma S^{-1}$ wird überdies angenommen, daß sie kommensurabel sind. Im wesentlichen wird also vorausgesetzt, daß sich das Problem durch Transformation vermittelt einer automorphen Funktion linearisieren läßt. — Mit funktionentheoretischen Mitteln gewinnt Verf. eine Reihe von Ergebnissen. Beispielsweise findet er eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß \mathfrak{G} eine endliche Gruppe ist. Bei einfach- und doppelt-periodischen, sowie bei Fuchsschen Gruppen Γ (da Γ und Γ' kommensurabel sind, kommen nach Poincaré nur diese Gruppen in Betracht!) kann $\mathfrak{M}(x)$ aus zwei von x unabhängigen Punkten, aus von x abhängenden Kurven oder der ganzen Ebene bestehen; ist insbesondere eine Fuchssche Gruppe, so ist \mathfrak{G} transitiv. H. Töpfer.

Smith, R. A.: On an analytic function having an infinite number of independent real periods. J. London math. Soc. **29**, 255—256 (1954).

It is well known that a non-constant single-valued analytic function can not have more than two independent fundamental periods and that one of these at least must be complex. The author proves: Let $F(Z)$ be an indefinite integral of the analytic function $f(Z)$ and let $Z = \Phi(\xi)$ be the inverse of $\xi = F(Z)$. If $f(Z)$ has a simple pole of residue R at $Z = a$ ($a = \infty$) then one of the branches of $\Phi(\xi)$ has period $2\pi i R$. By applying this theorem to the function $f(Z) = e^{(1+i\pi)Z} 2i \sin \pi Z$, the author constructs a many-valued analytic function having an infinity of independent real periods. K. Noshiro.

Denjoy, Arnaud: Une démonstration de l'identité fondamentale de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. J. Analyse math. **3**, 197—206 (1954).

Zu den vielen vorhandenen Beweisen für die Funktionalgleichung fügt diese Note eine interessante Variante, weil sie die beiden Quellen des Beweises klar herausstellt, nämlich die beiden Definitionen für die Zetafunktion durch eine Reihe und (bis auf Faktoren) durch das Integral $\int z^{s-1} (e^z - 1)^{-1} dz$. G. Hoheisel.

Apostol, T. M.: Some series involving the Riemann zeta function. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 239—243 (1954).

Es werden sechs rekursive Formeln mitgeteilt, die eine analytische Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ über die ganze s -Ebene ermöglichen. Zur Herleitung wird von einigen fundamentalen Eigenschaften wie Differenzengleichung, Multiplikationssatz usw. der Hurwitzschen Zetafunktion ausgegangen. Als Sonderfälle ergeben sich Formeln von V. Ramaswami (vgl. dies. Zbl. **9**, 348).

H. Unger.

Putnam, C. R.: On the non-periodicity of the zeros of the Riemann zeta-function. Amer. J. Math. **76**, 97—99 (1954).

Es wird bewiesen, daß aufeinander folgende positive Nullstellen von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ eine periodische Folge der Form $d, 2d, \dots$ ($d > 0$) besitzen. Dies Ergebnis gilt auch, wenn $\sigma = \frac{1}{2}$ allgemein durch $\sigma = \text{const}$ ersetzt wird, läßt sich aber in diesem Falle leicht aus einer Beziehung von Bohr-Landau folgern. H. Unger.

Ganelius, Tord: Sequences of analytic functions and their zeros. Ark. Mat. **3**, 1—50 (1954).

Die Arbeit befaßt sich mit dem Problem der in geeigneter Weise definierten „Gleichverteilung“ der Nullstellen von Funktionen einer gegebenen Funktionenfolge. Sie knüpft an die älteren Resultate von Jentzsch und eine Arbeit von Carlson von 1948 an. Wohl die in sich geschlossensten Ergebnisse werden in den Abschnitten 3.5—5.10 hergeleitet. Hier wird für einen Satz von Erdős-Turán (Verallgemeinerung der früheren Sätze von I. Schur und J. Schmidt) über die Verteilung der Nullstellen eines Polynoms in Winkelnräumen ein neuer Beweis gegeben, der sich auf den folgenden neuen Satz stützt: Ist $f(z) = u + iv$, $f(0) = 0$

regulär für $|z| < 1$ und gilt dort $u < H$, $\partial v / \partial \theta < K$, so gilt dort auch $|v| < 13 \sqrt{HK}$. Sodann wird aber der Erdős-Turánsche Satz in den Abschnitten 5. 1—5. 10 auf die „Exponentialpolynome“

$\sum_{v=0}^h a_v e^{\lambda_v z}$ verallgemeinert. Diese weittragende Verallgemeinerung ist wohl das wichtigste Ergebnis der Arbeit. Andere in der Arbeit hergeleitete Ergebnisse enthalten vor allem quantitative Verschärfungen des Satzes von Jentzsch über Nullstellen von Potenzreihenabschnitten (6. 3). Es ist ferner eine Verallgemeinerung eines Satzes von Lindward und Pólya von 1914 über Konvergenz von Polynomfolgen mit nullstellenfreier Halbebene zu nennen. Die Beweismethoden der Abhandlung knüpfen an die konformen Transformationen des Jensenschen Satzes an, vor allem für einen Winkelraum und einen Parallelstreifen. Die diesbezüglichen Formeln sind in den Abschnitten 2. 1—2. 2 zusammengestellt. A. Ostrowski.

Ahmad, Mansoor: A note on a theorem of Borel. *Math. Student* **21**, 105—106 (1954).

Let $f(z)$ be an integral function of positive integral order ρ . Borel's theorem states that the exponent of convergence of the a -points of $f(z)$ is equal ρ , except possibly for one value of a . The method of proof, based on the Hadamard factorisation of an integral function, is here adapted to obtain the theorem: There exists at most one integral function $f_1(z)$ of order less than ρ (including a constant) such that the exponent of convergence of the zeros of $f(z) - f_1(z)$ is less than ρ .

N. A. Bowen.

Ahmad, Mansoor: On exceptional values of entire functions of infinite order. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **18**, 19—21 (1954).

Eine ganze Funktion $g(z)$ wachse so an, daß $\lambda_j(g) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\log_{j+1} M(r, g) \log r) = \infty$, $\lambda_{j+1}(g) < \infty$ gilt; $\log_{j+1} x = \log(\log_j x)$ und $\log_1 x = \log x$. Mit einer ganzen Funktion $h(z)$, $\lambda_j(h) < \infty$, wird mit den Nullstellen von $g(z) - h(z)$ das kanonische Produkt $H(z)$ gebildet. Verf. zeigt, daß es höchstens eine Funktion $h(z)$ gibt, welche zu einem kanonischen Produkt $H(z)$ mit $\lambda_j(H) < \infty$ führt. H. Wittich.

Brunk, H. D.: On the growth of functions having poles or zeros on the positive real axis. *Pacific J. Math.* **4**, 1—19 (1954).

Let $f(z)$ be holomorphic, with the possible exception of simple poles on the positive real axis, in a region Δ whose boundary is Γ and which contains a right half of the real axis. A Dirichlet series, whose coefficients are the residues a_n of $f(z)$ at its poles λ_n , is generated by $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) e^{-zs} dz$. The theory of asymptotic Dirichlet series is applied in order to relate the growth of leading coefficients in the Laurent developments about $z = \lambda_n$ to the growth of $f(z)$ in Δ . Theorem: Let $f(z)$ be continuous on Γ , $f(z) = O(e^{\lambda x})$ as $z \rightarrow \infty$ on $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, $|f(z)| < M_n$ on a rectifiable curve Γ_n joining Γ^+ and Γ^- such that $x \rightarrow \lambda_n$, where $M_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), satisfies $\int e^{-\sigma s} \sup_{n \geq 1} (\lambda_n \sigma - \log M_n) d\sigma = \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Further, let

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \lambda_n^{-1} = D < \infty$, where $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, and $A_n = \prod_{k \neq n} \left| \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2} \right|$. Then, for every $\delta > 0$, $|a_n| = o(\lambda_n A_n \exp \{(\alpha + \delta + D) \lambda_n\})$ as $n \rightarrow \infty$. If also $\inf_{n \geq 1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, then

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \log |a_n| < \infty$. — Generalisations to cover cases in which $f(z)$ has multiple poles (or zeros) are given, and the following form of Carlson's theorem is seen as a corollary: If $f(z)$ is holomorphic in $x \geq 0$, except for poles of maximum order p at $z = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), if $f(z) = O(e^{\alpha |z|})$ in $x \geq 0$ for some real number α , and $f(iy) = O(e^{-\beta |y|})$ as $|y| \rightarrow \infty$ for some $\beta > \max(0, \pi p)$, then $f(z) \equiv 0$. N. A. Bowen.

Hiong, King-Lai: La normalité d'une famille de fonctions holomorphes en liaison avec le défaut d'une valeur de leurs dérivées. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 2279—2281 (1954).

Lemmas are given which, in conjunction with previous lemmas (this Zbl. **51**, 59), lead the author to a proof, based on R. Nevanlinna's second fundamental inequality, of the following theorem: Let $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ($c_0, c_1, c_2 \neq 0$, $c_0 \neq 1$) be holomorphic in $|z| < 1$, where it has p zeros and where $f'(z)$ has 1 for a deficient value with absolute defect $> l > 0$, (1).

Suppose $f(z)$ is devoid of extraordinary intervals. Then, for every z in $|z| \leq r$ with $0 < \delta_0 \leq r < R < 1$,

$$\log |f(z)| \leq (1-r)^{-2} \{H(l) \Omega(r_0, \delta_0, \delta_r, \delta_\mu) + K(l) \log 2(1-r)^{-1}\} \quad \text{where} \\ 2(c_0, \delta_0, \delta_r, \delta_\mu) = \log |c_0| + (p + n_1(R)) \log \delta_0^{-1} + \sum_{\mu}^r \log \delta_\mu^{-1} + \sum_{\mu}^r \log \delta_\mu^{-1} n_1(R) \leq n_1(R, 1)$$

n = number of 1-points of $f(z)$ in $|z| \leq R$; $\mu = 1, 2, 3, \dots, n_1(r, 1)$; $r = 1, 2, 3, \dots, n(r, 0)$ = number of zeros of $f(z)$ in $|z| \leq r$; δ_μ, δ_r = radii of circles enclosing the 1-points and zeros respectively of $f(z), f(z)$ resp. — Criteria of normality or quasi-normality for a family of functions $f(z)$ satisfying (1) are announced, as well as a theorem analogous to one of Landau's. N. A. Bowen.

Cin. Jań-šin: Über die Argumente der Koeffizienten in der Entwicklung einer schlichten Funktion. Acta math. Sinica **4**, 81–85 und russische Zusammenfassg. 86 (1954) [Chinesisch].

Wenn $W = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ eine im Kreise $|z| < 1$ holomorphe Funktion ist und $a_N = N^{-1}$ für ein gewisses ganzzahliges $N \geq 2$ gilt, dann gibt es reelle Zahlen φ_1 und φ_2 , so daß

$$g_1(z) = z + e^{i\varphi_1} \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad g_2(z) = z + \sum_{n=2}^{N-1} a_n z^n + e^{i\varphi_2} a_N z^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

im Kreise $|z| < 1$ nicht schlicht sind.

Autoreferat.

Sun, Kung: The sections of schlicht functions. Acta math. Sinica **4**, 105–111 und engl. Zusammenfassg. 112 (1954) [Chinesisch].

Let the k -symmetric function $f_k(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} z^{nk+1}$ be regular and schlicht in the unit circle $|z| < 1$. Write $\sigma_n^{(k)}(z) = z + \sum_{r=1}^n a_r^{(k)} z^{kr+1}$, $\sigma_n^{(1)}(z) = \sigma_n(z)$. Szegő [Math. Ann.

100, 188–211 (1928)] proves that all $\sigma_n(z)$ are schlicht in the circle $|z| < 1/4$. The present author [Mat. Sbornik **36**, 91–98 (1929); Sci. Record **4**, 333–341 (1951)] establishes that all $\sigma_n^{(k)}(z)$ are schlicht in the circle $|z| < 1/3$. The last result has been conjectured by Joh [Proc. phys.-math. Soc. Japan **21**, 191–208 (1939)]. As for $\sigma_n^{(3)}(z)$, the problem has been studied by Tief (this Zbl. **21**, 637), and is solved completely in this note. We prove the following theorems:

Theorem 1: All $\sigma_n^{(k)}(z)$ are schlicht in the circle $|z| < \frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$. The number $\frac{1}{2} \sqrt[3]{3}$ can not be replaced by any larger one. Combining the above results, we can state Theorem 2. All $\sigma_n^{(k)}(z)$ are schlicht in the circle $|z| < \sqrt[k]{k \cdot 2(k+1)}$, where $k = 1, 2, 3$. The number $\sqrt[k]{k \cdot 2(k+1)}$ can not be replaced by any larger one. Let $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ be regular and schlicht in the domain

$1 < |z| < \infty$. Denoting $q_n(z) = z + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{a_r}{z^r}$, we can establish the following Theorem 3. (i) If $n \geq 12$, $q_n(z)$ is schlicht in the domain $\infty > |z| \geq (1 - (5n^{-1} \ln n))^{-1/2}$. (ii) All $q_n(z)$ are schlicht in the domain $\infty > |z| \geq 3/2$. Autoreferat.

Garabedian, P. R. and H. L. Royden: The one-quarter theorem for mean univalent functions. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 316–324 (1954).

Unter einer in $|z| < 1$ im Mittel schlichten Funktion $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ wird nach Spencer (dies. Zbl. **25**, 259) eine Funktion verstanden, die eine Riemannsche Fläche R erzeugt,

für die für jedes $r > 0$ gilt: $\int_0^r \{ \int d\varphi - 2\pi \} \rho d\rho \leq 0$, wo $\int d\varphi$ das Maß der von R auf $|w| = \rho$ überdeckten Bogen bedeutet, unter Berücksichtigung mehrfacher Bedeckungen. Verff. verschärfen diesen Begriff zu dem der „mittel schlichten Funktionen“, die durch

$\int_0^r \{ \int d\varphi - 2\pi \} \frac{1}{\rho} d\rho \leq 0$ gekennzeichnet sind. Die Bedingung findet eine anschauliche Deutung in der Ebene $t = \log w$. Es wird in Verschärfung einer Spencerschen Vermutung (die sich auf die erste Klasse bezog) bewiesen, daß auch für die Funktionen der zweiten Klasse der Koebe'sche 1/4-Satz gilt. — Der Beweis beruht auf dem Pólyaschen Symmetrisierungsprinzip und der Hadamardschen Variationsformel; Ref. konnte ihm im einzelnen nicht folgen. H. Grunsky.

Kolbina, L. I.: Einige Extremalprobleme in der konformen Abbildung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 865–868 (1952) [Russisch].

Mittels der Variationsmethode bei schlichter Abbildung wird, gestützt auf ein Ergebnis von Goluzin, folgendes Problem behandelt: Zwei schlichte Funktionen $f_1(z), f_2(z)$ in $|z| < 1$ mögen den Einheitskreis in einander nicht überdeckende Gebiete um $f_\alpha(0) = a_\alpha$, $a_1 \neq a_2$, abbilden. Es wird nach dem Extremum von $J = |f'_1(0)^\alpha \cdot f'_2(0)^\beta|$ für feste $\alpha, \beta > 0$ gefragt; das Extremum existiert und wird explizit angegeben, zusammen mit Funktionen, die es verwirklichen. Die Bilder des $|z| < 1$ überdecken dann zusammen die volle Ebene. — Ist $f_3(z)$ schlicht in $|z| > 1$ $f_3(\infty) = \infty$, $a_1 = a$, $a_2 = 0$, so wird ähnliches für das Extremum von $J = |f'_1(0)^\alpha f'_2(0)^\beta f'_3(\infty)^{-\gamma}|$ angedeutet ($\alpha, \beta, \gamma > 0$). *E. Ullrich.*

Jenkins, James A.: A recent note of Kolbina. Duke math. J. 21, 155—162 (1954).

Die im vorstehenden Referat aufgeführten Extremalprobleme lassen sich besser unmittelbar behandeln unter Verwendung quadratischer Differentiale. Verf. führt das durch für alle obigen Aufgaben, und dazu für eine weitere von Kufarev und Fales (dies. Zbl. 44, 304). Er unterstreicht, daß schon 1933 Grötzsch verwandte Fragen behandelt hat; die Bedeutung der besonderen Probleme von Kolbina liege darin, daß hier Extrema und Extremalen explizit zugänglich zu machen seien.

E. Ullrich.

Flett, T. M.: Note on a function-theoretic identity. J. London math. Soc. 29, 115—118 (1954).

Nouvelle démonstration de la formule de Spencer (qui généralise la formule de Poisson-Jensen-Nevanlinna). *J. Dufresnoy.*

Flett, T. M.: A note on conformal mapping. J. London math. Soc. 29, 118—121 (1954).

Démonstration d'un résultat classique (continuité à la frontière dans la représentation conforme d'un domaine limité par une courbe de Jordan). *J. Dufresnoy.*

Stallmann, Friedemann: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I. Math. Z. 60, 187—212 (1954).

Verf. erweitert eine frühere Untersuchung (dies. Zbl. 47, 80) über die konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen, indem er einfach zusammenhängende Riemannsche Flächenstücke betrachtet, die durch endlich viele Kreisbogen und evtl. durch endlich viele logarithmische Windungspunkte berandet sind. Während Verf. bisher nur solche Abbildungen zuließ, deren zugehörige Differentialgleichung vom Fuchssehen Typ ist, werden hier Differentialgleichungen $(1) y'' + \frac{1}{2} R(x) y = 0$ behandelt, wobei $R(x)$ eine beliebige reelle rationale Funktion sein kann. Verf. approximiert die Lösungen von (1) durch asymptotische Integration für große Werte eines Parameters q^2 bei $R(x) = r(x) + q^2 q(x)$. Durch die Liouvillesche Transformation ergibt sich aus (1): $u''/u = 1 + Q(\xi)/q^2$. Ist k die Ordnung von $q(x)$ an der Stelle $x = x_0$, so ergeben sich für $Q(\xi)$ unterschiedliche Entwicklungen um die zugehörige Stelle $\xi = \xi_0$ für $k \geq 2$. Die bekannten Lösungen einer Hilfsdifferentialgleichung $v'' v = 1 + P(\xi) q^2$ werden als erste Annäherung benutzt, wobei $q(\xi) = Q(\xi) - P(\xi)$ in gewissem Sinne klein mit $q^2 \rightarrow \infty$ werden muß. Jetzt wird mit Hilfe Volterrascher Integralgleichungen u abgeschätzt: $u(\xi) = v_1(\xi) \cdot (1 + O(q^{-\gamma}))$ bei $-1 \leq \gamma < 0$. Diese Untersuchung wendet Verf. auf die Lamésche Differentialgleichung und ihre Konfluenzgrenzfälle an. *W. Haacke.*

Meschkowski, Herbert: Beiträge zur Theorie der Orthonormalsysteme. Math. Ann. 127, 107—129 (1954).

An frühere Arbeiten des Verf. anschließend, behandelt die Arbeit vor allem die Darstellungssätze für die Familie der analytischen Funktionen, die in einem endlich vielfach zusammenhängenden Gebiet samt ihren Integralen eindeutig und bis auf innerhalb gelegene Pole mit vorgelegten Hauptteilen einschließlich des Randes regulär sind. Jeder Darstellung liegt ein vollständiges Orthonormalsystem für die im Gebiet regulären Funktionen zugrunde, wobei die Orthogonalitäten mittels Randintegralen nach Bergman sowie nach Szegő in Betracht gezogen sind. Der meromorphe Teil an jedem Pol wird mittels einer gewissen Funktion erledigt, die mit kanonischen konformen Abbildungen des Grundgebiets in engem Zusammenhang steht und zu allen Funktionen des Systems orthogonal ist. Ferner werden extremale Eigenschaften

der Funktionen der letztgenannten Art aufgestellt. Es werden einige Verfahren für wirkliche Konstruktion der vollständigen Orthonormalsysteme erklärt. Zum Schluß wird ein Abbildungsproblem für einen Kreisring in explizierter Weise gelöst.

Y. Komatu.

Graeb, W.: Über die schwächste Uniformisierende. Math. Z. 60, 66—78 (1954).

Une surface de Riemann abstraite au sens de Weyl-Rado est-elle toujours conformément équivalente à la surface de Riemann d'une „fonction analytique“ (fonction pouvant être obtenue à partir d'un élément par prolongement analytique, ou „Analytisches Gebilde“ (A. G.)) ? La considération de fonctions Θ -fuchsienues permettait de considérer la réponse à cette question comme affirmative, bien qu'aucune démonstration n'en ait probablement été publiée. Le présent mémoire a pour but d'en donner une, et de préciser en même temps certaines notions intéressantes. L'A. définit le recouvrement non ramifié et ramifié, puis la „relation analytique multiforme“ entre deux surfaces de Riemann: un A. G. équivaut à une telle relation entre deux domaines des plans complexes. Il donne une définition d'une surface de Riemann „uniformisante“ d'une telle relation, et de „la plus faible uniformisante“. — Le problème proposé s'énonce ainsi: trouver une relation analytique entre deux domaines plans dont la plus faible uniformisante soit conformément équivalente à une surface de Riemann donnée R . — L'A. démontre d'une manière assez compliquée que cet énoncé se ramène au suivant: soit z_v une suite divergente sur R , et x_v une suite bornée de nombres complexes; construire une fonction méromorphe g sur R telle que $g(z_v) = x_v$. — Dans le cas où R est hyperbolique, la construction donnée pour g fait appel à l'existence de la fonction de Green de R .
R. de Possel.

Myrberg, Lauri: Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c(P) u$ auf offenen Riemannschen Flächen. Math. Scandinav. 2, 142—152 (1954).

Verf. betrachtet auf einer offenen Riemannschen Fläche eine nichtnegative, mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige reelle Funktion $c(P)$, die nicht identisch verschwindet und sich bei der konformen Abbildung $z_h \rightarrow z_k$ gemäß der Formel $c(z_k) = c(z_h) \cdot \text{grad } x_k(x_h, y_h)^2$ transformiert. Unter diesen Voraussetzungen existieren auf der Fläche F immer nichtkonstante, nichtnegative, mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Lösungen der Gleichung $\Delta u = c(P) u$. Diese Gleichung wurde früher für offene Flächen auch von Ozawa untersucht.

H. P. Künzi.

Myrberg, Lauri: Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(P) \cdot u$ auf Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 170, 8 S. (1954).

Es wird als Fortsetzung der oben besprochenen Arbeit die Existenz der zur Gleichung $\Delta u = c(P) u$ gehörigen Greenschen Funktion auf der offenen Riemannschen Fläche F untersucht. Verf. beweist, daß auf jeder offenen Riemannschen Fläche für jede Funktion $c(P) \geq 0$ ($\neq 0$) eine eindeutig bestimmte Greensche Funktion $G(P, Q)$ der oben erwähnten Differentialgleichung mit beliebigem Pol Q existiert. Diese ist die kleinste unter allen Funktionen u , die bestimmten Bedingungen genügt. Verf. zeigt weiter, wie sich dieser Satz auch auf geschlossene Riemannsche Flächen übertragen läßt, und gibt zum Schluß mit Hilfe der oben angegebenen Greenschen Funktion ein Konstruktionsverfahren für Lösungen der Diff. Gleichung, die sich überall auf der gegebenen Fläche regulär und nichtnegativ verhalten. H. P. Künzi.

Royden, H. L.: A property of quasi-conformal mapping. Proc. Amer. math. Soc. 5, 266—269 (1954).

W_1 und W_2 stellen zwei offene Riemannsche Flächen dar, welche durch eine quasikonforme Abbildung im Sinne Ahlfors' aufeinander bezogen werden. Pfluger zeigte (dies. Zbl. 30, 252), daß durch eine solche Abbildung die Klasse O_G von Flächen, welche keine Greenschen Funktionen besitzen, erhalten bleibt. Verf. beweist, daß durch die erwähnte Abbildung auch die Flächenklasse O_{HD} (Flächen, die keine harmonischen Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral aufweisen) erhalten bleibt. Mit der Beweismethode des Verf. ergibt sich auch das angegebene Pfluger'sche Resultat. Die Vermutung, daß auch die Klasse O_{HB} (Flächen ohne beschränkte harmonische Funktionen) durch quasikonforme Abbildungen erhalten bleibt, konnte bis jetzt noch nicht bewiesen werden.

H. P. Künzi.

Huckemann, Friedrich: Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten. Math. Z. **59**, 383—387 (1954).

Es ist bekannt, daß bei quasikonformer Abbildung mit beschränktem Dilatationsquotienten der Typus einer Fläche F nicht geändert wird. Die Frage, ob eine Verschiebung unendlich vieler Windungspunkte den Typus einer Fläche beeinflussen kann, ist zu bejahen, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Die Fläche F_∞ ist nur über den Punkten $0, \pm 1, \infty$ verzweigt, und zwar liegen über $w = \infty$ nur logarithmische Windungspunkte, über 0 und ± 1 nur zweiblättrige algebraische Windungspunkte. Keiner dieser Punkte wird schlicht überdeckt. F_∞ ist vom hyperbolischen Typus, wie die Konstruktion der Fläche zeigt oder wie aus der Defektrelation folgt. Durch Verschiebung der algebraischen Windungspunkte über ± 1 in solche über $\pm p_n$, $p_n \geq 1$ monoton gegen ∞ für $n \rightarrow \infty$, werden aus F_∞ Flächen $F(p_n)$ gewonnen, die bei hinreichend starkem Anwachsen der p_n vom parabolischen Typus sind.

H. Wittich.

Huckemann, Friedrich: Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche. Math. Z. **59**, 375—382 (1954).

Verf. zeigt, wie man aus der von $\Gamma(z)$ erzeugten Fläche F die Anzahlfunktionen $n(r, 1/(I - a))$ für beliebige a und die Charakteristik $T(r, \Gamma)$ gewinnen kann. In $T(r, \Gamma) = C \cdot r \cdot \log r (1 + \varepsilon(r))$, $\lim \varepsilon(r) = 0$, bleibt dabei die positive Konstante C (ihr Wert ist $C = 1$) unbestimmt, was durch die Anwendung eines Verzerrungssatzes aus der Theorie der quasikonformen Abbildung bedingt wird. Für die Bestimmung der Defekte und Indizes von $\Gamma(z)$ ist dieser Umstand bedeutungslos.

H. Wittich.

Sario, Leo: Capacity of the boundary and of a boundary component. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 135—144 (1954).

Verf. erweitert die von Nevanlinna eingeführten Begriffe der Kapazität einer Randpunktmenge auf offenen Riemannschen Flächen. Sei R eine beliebige offene Riemannsche Fläche mit der idealen Berandung β und $\{S\}$ eine Familie analytischer Funktionen, gegeben auf R mit $S = s + i s$ in einem Parametersystem $|z| \leq 1$. Dann existiert eine Hauptfunktion $S_\beta = s_\beta + i s_\beta$ in $\{S\}$, so daß

$$\min_{\beta} \int s d\bar{s} = \int_{\beta} s_{\beta} ds_{\beta} \quad \text{mit} \quad \int s ds - \int_{\beta} s_{\beta} ds_{\beta} = D(s - s_{\beta}),$$

wo D das Dirichletintegral über R angibt. Als logarithmische Kapazität c_{β} des Randes β bezüglich R bezeichnet Verf. den Ausdruck $c_{\beta} = e^{-k_{\beta}}$ mit $k_{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} s_{\beta} ds_{\beta}$. Verf. zeigt, daß für die

Klasse $\{U\}$ der analytischen Funktionen U auf R mit $\lim_{z \rightarrow \infty} U = 1$ bez. der Parameterdarstellung $|z| \leq 1$ eine Hauptfunktion U_{β} existiert, für die gilt: $\min D(U) = D(U_{\beta}) = \pi c_{\beta}^2$ sowie $\min (\sup |U|) = \sup |U_{\beta}| = c_{\beta}^{-1}$. Für eine feste Randkomponente γ betrachtet Verf. weiter die Klasse $\{T\} \subset \{S\}$ mit $\int_{\gamma} dt = 2$ und bezeichnet mit c_{γ} die Kapazität einer Randkomponente durch $c_{\gamma} = e^{-k_{\gamma}}$ mit $k_{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} dt$, wo t_{γ} das Integral $\int dt$ minimisiert. Entsprechend gilt für

die Klasse $\{V\} \subset \{U\}$ mit $\int d \arg V = 2\pi$ die Beziehung $\min D(V) = D(V_{\gamma}) = \pi \cdot c_{\gamma}^2$. Zum Schluß benützt Verf. die eingeführten Begriffe zur Aufstellung neuer Hebbbarkeitskriterien offener Flächen im Zusammenhang mit den Klassen C_{β} bzw. C_{γ} (Flächen mit verschwindender Kapazität c_{β} bzw. c_{γ}).

H. Künzi.

Polak, A. I.: Anwendungen der Theorie der offenen Abbildungen auf die Untersuchung analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 187—188 (1954) [Russisch].

Einfache Folgerungen aus dem klassischen Satz der Gebietsinvarianz der analytischen Funktionen mit Benutzung eines früheren von Verf. und anderen bewiesenen Satzes über offene Abbildungen der Kompakten. Die seit 1927 publizierten Arbeiten des Ref. über die Topologie der komplexen Funktionentheorie, sowie anderer Autoren scheinen dem Verf. vollständig unbekannt zu sein. S. Stoilow.

See, Michele: Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. natur., VIII. Ser. **16**, 30—35 (1954).

L'A. indica condizioni affinché le funzioni totalmente derivabili in un'algebra, supposta per semplicità dotata di modulo, siano anche monogene.

G. Scorza Dragoni.

See, Michele: Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse.

II. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 188—193 (1954).

L'A. prosegue le sue ricerche (v. la recens. preced.) sulle funzioni monogene e totalmente derivabili in un'algebra, reale o complessa, dotata di modulo. Quelle ricerche lo avevano condotto a introdurre le algebre, reali o complesse e dotate di modulo, solenoidali (dotate di unità le cui basi soddisfacevano a relazioni del tipo $uPP_{-1}u_{-1} = 0$ con P matrice non degenera) e bisolenoidali (algebre solenoidali con unità soddisfacenti a ulteriori relazioni del tipo $uPP_{-1}u_{-1}u_{-1} = 0$); e l'A. aveva già dimostrato che le funzioni totalmente derivabili destre (sinistre) in un'algebra reale o complessa dotata di modulo sono monogene destre o sinistre se e soltanto se l'algebra è bisolenoidale e che la somma diretta di due algebre bisolenoidali era ancora tale e che tale era il prodotto diretto di due algebre, se uno almeno dei fattori era bisolenoidale. Nella Nota attuale l'A. determina quali fra le algebre, reali o complesse, del secondo, terzo e quarto ordine siano solenoidali e quali bisolenoidali; e dimostra che una somma diretta di algebre reali è bisolenoidale, soltanto se sono tali le sue componenti. L'A. considera anche alcuni casi di algebre di ordini eventualmente superiori; per esempio, le algebre reali con divisione e d'ordine maggiore di 1 sono solenoidali, al pari di quelle regolari e di quelle di Clifford, reali o complesse, e delle algebre reali o complesse semplici; le algebre regolari e quelle di Clifford, sempre reali o complesse, non sono bisolenoidali; le algebre reali semisemplici degli ordini 1, 3, 5 e 7 non sono solenoidali.

G. Scorza-Dragoni.

Behnke, H. und K. Stein: Der Severische Satz über analytische Fortsetzung von Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Kontinuitätssatz. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 297—313 (1954).

Der Kontinuitätssatz für analytische Flächen wird zum Beweise des Satzes von F. Severi über die Fortsetzung holomorpher Funktionen reeller und komplexer Veränderlichen vom Rande eines Gebietes ins Innere benutzt. Dazu wird der Satz auf meromorphe Funktionen übertragen. Schließlich werden mit der gleichen Methode ähnliche Sätze für normale Scharen usw. formuliert und bewiesen. Die obige Arbeit gibt gleichzeitig einen schönen Bericht über die Entwicklung des Kontinuitätssatzes.

W. Saxer.

Will, Herbert: Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Über den Satz von Hammerstein. Math. Ann. 127, 175—180 (1954).

Im Jahre 1939 veröffentlichten H. Behnke und K. Stein eine Arbeit, in der sie den Begriff der holomorphen Ausdehnung von Holomorphiegebieten G auf umfassende Holomorphiegebiete \tilde{G} einführten. Sie zeigten, daß die holomorphen Funktionen von G durch in \tilde{G} holomorphe Funktionen approximiert werden können, wenn eine solche Ausdehnung möglich ist. Dadurch gewann ein Satz von A. Hammerstein erneutes Interesse, in dem eine Aussage über die Approximierbarkeit der quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen gewisser schlichter Gebiete G des Raumes von n komplexen Veränderlichen durch Polynome gemacht wird. Dem Verf. der vorliegenden Arbeit gelingt es, diesen Satz im Anschluß an die Ergebnisse von H. Behnke und K. Stein zu beweisen. Hierbei braucht er nicht, wie es bei dem älteren Hammersteinschen Beweise notwendig ist, den Satz auf die Klasse der in G quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen zu beschränken. Die Durchführung der Beweise in der vorliegenden Arbeit scheint dem Ref. an manchen Stellen etwas ungenau zu sein.

H. Grauert.

Thimm, Walter: Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildungen. Math. Ann. 127, 150—161 (1954).

Verf. setzt seine in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 48, 62; 51, 64) begonnenen Untersuchungen über meromorphe Abbildungen analytischer Mengen fort. Es sei $m_x(p)$ ($x = 1, \dots, k$) ein System meromorpher Funktionen auf einer irreduziblen, $2s$ -dimensionalen analytischen Menge M des C^n ; sei N die Menge derjenigen Punkte von M , in denen wenigstens ein m_x unbestimmt wird. Durch $t_x = m_x(p)$ wird eine analytische Abbildung T von $M - N$ in das Produkt $C_k^k =$

$C_{l_1}^1 \times \cdots \times C_{l_k}^1$ der (geschlossenen) Ebenen $C_{l_\infty}^1$ der komplexen Veränderlichen t_∞ gegeben. Sei p_0 ein fester Punkt von N . Ein Punkt $t^{(0)} \in C_i^{d_i}$ heißt ein singulärer Bildpunkt von p_0 vermöge T , wenn eine gegen p_0 strebende Punktfolge p_v in $M - N$ existiert, so daß die Folge $t^{(v)} = T(p_v)$ gegen $t^{(0)}$ strebt. $t^{(0)}$ heißt konstant erreichbar, wenn $t^{(0)} \in T(M - N)$ gilt und p_0 zur abgeschlossenen Hülle der in $M - N$ analytischen Menge $T^{-1}(t^{(0)})$ gehört. Die Abbildung T werde verallgemeinerter Normalfall in p_0 genannt, wenn $T(M - N)$ in der Menge S_{p_0} der singulären Bildpunkte von p_0 enthalten ist. (S_{p_0} ist nach einem früheren Resultat des Verf. stets eine algebraische Menge.) Als Verallgemeinerung eines früheren Satzes wird bewiesen: Ist T der verallgemeinerte Normalfall in p_0 , so hängt jede von den m_∞ auf M analytisch abhängige meromorphe Funktion sogar algebraisch von den m_∞ auf M ab. Es werden Bedingungen für das Eintreten des Normalfalles angegeben: U. a. muß jeder singuläre Bildpunkt von p_0 konstant erreichbar oder Häufungspunkt konstant erreichbarer singulärer Bildpunkte von p_0 sein. Von der abgeschlossenen Hülle H_{p_0} der Menge der konstant erreichbaren singulären Bildpunkte von p_0 wird gezeigt, daß sie stets algebraisch ist, auch dann, wenn nicht der Normalfall vorliegt. Abschließend werden weitere Eigenschaften von H_{p_0} angegeben und an Beispielen erläutert. K. Stein.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Herrmann, Oskar: Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen Math. Z. 60, 148—155 (1954).

Verf. verknüpft die Methode von Klein und Fricke, Fundamentalbereiche für Hilbertsche Modulgruppen durch Konstruktion von sogenannten Normalpolyedern zu gewinnen, mit einem Grenzprozeß und gelangt so zu Fundamentalbereichen, die durch Ungleichungen in sehr übersichtlicher Weise beschrieben werden können. Im einfachsten Fall, wo die Idealklassenzahl des zugrunde liegenden total reellen algebraischen Zahlkörpers K vom Grad n gleich 1 ist, wird folgendes ausgeführt. Man bestimme im Raum der komplexen Variablen $\tau = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)})$ mit $\tau^{(v)} = x^{(v)} + i y^{(v)}$, $y^{(v)} > 0$ ($v = 1, 2, \dots, n$) und der Metrik $ds^2 = S y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ (S und später N werden als Spur- und Normzeichen in der üblichen Weise verwendet) das Normalpolygon $\mathfrak{P}(N)$ zum Punkt $\tau^{(v)} = iN$ ($v = 1, 2, 3, \dots, n$) bezüglich der Hilbertschen Modulgruppe Γ des Körpers K und bilde die abgeschlossene Hülle des Durchschnitts aller $\mathfrak{P}_t = \bigcup_{N=t}^\infty \mathfrak{P}(N)$ ($t = 2, 3, \dots$), d. h. also den Bereich $\mathfrak{P} = \bigcap_{t=2}^\infty \bigcup_{N=t}^\infty \mathfrak{P}(N)$. Es zeigt sich, daß \mathfrak{P} einen Fundamentalbereich bezüglich Γ darstellt, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird: $N |\gamma \tau + \delta| \geq 1$ für alle teilerfremden ganzen Zahlen $\gamma, \delta \in K$, $S \log \varepsilon (\log \varepsilon - 2 \log y) \geq 0$ für alle total positiven Einheiten $\varepsilon \in K$, $S \mu (\mu + 2\sigma) \geq 0$ für alle ganzen Zahlen $\mu \in K$. Endlich viele Ungleichungen dieser Art reichen zur Beschreibung von \mathfrak{P} aus. Die Übertragung der Methode auf die Siegelsche Modulgruppe wird angezeigt. H. Maaß.

Rankin, R. A.: On horocyclic groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 219—234 (1954).

Verf. konfrontiert die Begriffe: Fuchsche Gruppe erster Art nach Ford (Ford, Automorphic Functions, Chelsea 1951) und Grenzkreisgruppe (erster oder zweiter Art) nach Petersson (dies. Zbl. 17, 306); in beiden Fällen wird ein beliebiger Hauptkreis zugelassen. Er beweist die Äquivalenz der Definitionen beider Begriffe auf Grund der folgenden Sätze: (1) Ist Γ eine Fuchsche Gruppe erster oder zweiter Art und ist S eine beliebige lineare Transformation, so ist $\Gamma_1 = S^{-1}\Gamma S$ eine Fuchsche Gruppe der gleichen Art. (2) Bezeichnet $\mathfrak{G}(z, \Gamma)$ die Menge der Bildpunkte z bei allen Abbildungen der Gruppe Γ , so ist $\mathfrak{G}^*(z, \Gamma)$, die Menge der Häufungspunkte von $\mathfrak{G}(z, \Gamma)$, von z unabhängig. Für die so auf zwei Arten übereinstimmend erklärten Gruppen schlägt der Verf. die philologisch wohlwogenere und zweifellos glücklich gewählte englische Bezeichnung „horocyclic group“ vor. — Hierauf wird für Grenzkreisgruppen, welche einen parabolischen Fixpunkt besitzen, untersucht, wie der nichteuklidische Inhalt $I(\Gamma)$ eines nach Ford konstruierten Fundamentalbereiches mit der Anzahl seiner Ecken im geometrischen Sinne zusammenhängt. Es wird angenommen, daß die reelle Achse der Grenzkreis und ∞ parabolischer Fixpunkt ist (in diesem Falle ist der Fordsche Fundamentalbereich Normalpolygon zu einem geeignet gewählten Punkt). Bezeichnet N_1 die Anzahl der endlichen Spitzen, N_2 die Anzahl der Ecken und ist $N = N_1 + N_2$, so gilt $N\pi \leq I(\Gamma) \leq N_1\pi + \frac{1}{3}N_2\pi \leq \frac{2}{3}N\pi$. Hieraus lassen sich die folgenden Sätze ableiten: (3) Ist Γ^* eine Obergruppe von Γ vom Index μ und ist N^* analog N definiert, so ist $(\mu\pi)I(\Gamma^*) \leq N \leq (3\mu\pi)I(\Gamma^*) \leq 3\mu N^*$. (4) Ist Γ eine Untergruppe der Modulgruppe $\Gamma(1)$ vom Index μ , so ist $\mu/3 \leq N \leq \mu$. (5) Der nichteuklidische Inhalt des Fundamentalbereiches einer Grenzkreisgruppe mit einem parabolischen Fixpunkt ist mindestens $\pi/3$, und eine Gruppe mit minimalem Inhalt ist zur Modulgruppe $\Gamma(1)$ äquivalent. (Hinweis d. Ref.: H. Petersson, dies. Zbl. 18, 63.) Für die Hauptkongruenzgruppen $\Gamma(N)$ werden die reziproken Radien c der Randbogen des Fordschen Fundamentalbereichs durch $|c| < \frac{1}{3}N^3(N+1)^{1/2}(N+2)^2$ abgeschätzt. O. Herrmann.

Fourès, Léonce: Groupes fuchsien et revêtements. Ann. Inst. Fourier 4, 49—71 (1954).

Soit G un groupe discontinu de transformations conservant le cercle-unité C , homographiques, ou ayant les caractères topologiques des transformations homographiques. Désignons par C_G l'espace topologique quotient obtenu en identifiant entre eux les points de chacune des classes d'intransitivité de G . On sait que l'application canonique de C sur C_G définit un revêtement régulier de C_G (voir par exemple H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig 1913, p. 151 où se trouve une proposition équivalente). Ce revêtement est ramifié aux points de C_G sur lesquels se projettent des points doubles de transformations elliptiques de G et en ces points seulement. Le groupe K engendré par ces transformations elliptiques est sous-groupe invariant de G ; par suite, le revêtement correspondant C_K est lui-même un revêtement régulier de C_G , et le groupe G^* des transformations continues qui amènent l'un sur l'autre les points de C_K qui se projettent en un même point de C_G est isomorphe à G/K . Mais C_K , étant revêtement maximum non ramifié de C_G , en constitue le revêtement universel; par suite G^* n'est autre que le groupe de Poincaré de C_G . — Ce sont ces différents résultats que l'A. démontre sans faire explicitement appel à la notion d'espace-quotient, et en utilisant un certain nombre de lemmes relatifs aux polygones fondamentaux.
R. de Possel.

Hervé, Michel: Fonctions fuchsienues relatives à un groupe d'automorphismes du bicercle-unité. J. Analyse math. 3, 59—80 (1954).

Verf. behandelt die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 49, 66) gelösten Probleme erneut mit etwas modifizierten Methoden, die er früher bereits skizziert hatte (dies. Zbl. 46, 312). Als Gebiet Ω wird jetzt der Dizylinder $|x| < 1, |y| < 1$ genommen. Ist $\alpha(z)$ eine beliebige „f. f.“, so bezeichnet man eine in Ω holomorphe Funktion $\Theta(z)$ als funktion α -fuchsienne („f. α -f.“) der Dimension m , wenn $\Theta(f(z)) = \Theta(z)[Df(z)]^{-m} \bmod \alpha(z)$ für alle f aus γ ist, es wird also gefordert, daß $\Theta(f(z)) - \Theta(z)[Df(z)]^{-m}$ auf $\alpha(z) = 0$ mit mindestens der gleichen Vielfachheit verschwindet wie $\alpha(z)$ selbst. Die Klasseneinteilung wird jetzt natürlich dadurch erreicht, daß man zwei „f. α -f.“ äquivalent nennt, wenn sie $\bmod \alpha(z)$ kongruent sind. Das bedeutet einerseits eine gewisse Verschärfung des Begriffes der „f. α -f.“, andererseits entfällt die Notwendigkeit der Konstruktion einer „f. f.“ $\alpha(z)$ mit nur einfachen Nullstellen. Der Beweis von (a) und (2), (3) verläuft wie vorher, bis auf den Nachweis, daß (h) eine „f. f.“ enthält. Beim Beweis von (b) und (c) macht sich allerdings die schärfere Bedingung für die „f. α -f.“ und die Willkürlichkeit von $\alpha(z)$ bemerkbar. Man zeigt zunächst, daß jede Klasse von „f. α -f.“ für hinreichend großes m eine „f. f.“ enthält, indem man die Darstellung (2) benutzt und ein Θ als Poincarésche Reihe darstellt. Um die Konvergenz dieser Reihe zu sichern, zeigt man, daß jede Klasse eine Funktion $\omega(z)$ enthält, die einer Ungleichung der Form $|\omega(z)| < K[(1 - |x|)(1 - |y|)]^{-m/5}$ genügt. Diese Funktion wird zunächst lokal konstruiert, die globale Fortsetzung erfolgt mittels einer Methode von Cousin. Ist man so weit, dann folgen (b) und (c) sofort. Es ergibt sich weiter, daß jede „f. f.“ die Form $\alpha \Theta = \beta_1 \Theta_1 + \beta_2 \Theta_2$ hat, worin $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$ „f. f.“ sind. Verschwindet diese Funktion identisch, so haben $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$ die Form $\Theta = \beta_1 \eta_2 + \beta_2 \eta_1, \Theta_1 = \beta_2 \eta - \alpha \eta_2, \Theta_2 = -\alpha \eta_1 - \beta \eta$, worin η, η_1, η_2 „f. f.“ sind; man erhält also eine gewisse Eindeutigkeit der Darstellung.
K.-B. Gundlach.

Lehner, Joseph: Note on the Schwarz triangle functions. Pacific J. Math. 4, 243—249 (1954).

Verf. betrachtet die Hauptfunktion $\Phi_\lambda(\tau) = u_\lambda^{-1} + \sum_{n=0}^\infty c_n(\lambda) u_\lambda^n$ ($u_\lambda = \exp \frac{2\pi i \tau}{\lambda}$) der von Hecke mit $\mathfrak{G}(\lambda)$ bezeichneten Grenzkreisgruppe; diese wird von $\tau \rightarrow \tau + \lambda$ und $\tau \rightarrow -1/\tau$ erzeugt ($\lambda = 2 \cos \pi q, q = 3, 4, 5, \dots$). Die Umkehrfunktion von $\Phi_\lambda(\tau)$ läßt sich als Quotient zweier Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung mit den Parametern $\alpha = \beta = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1/q), \gamma = 1 - 1/q$ darstellen, woraus man leicht schließt, daß die $c_n(\lambda)$ sämtlich rational sind. — Sodann beweist Verf. die asymptotische Relation

$$c_n(\lambda) = 2\pi \lambda^{-1} n^{-1/2} I_{\frac{1}{2}}(4\pi \lambda^{-1/2} \sqrt{n}) + O(e^{4\pi \gamma_1 \lambda^{-1/2} \sqrt{n}}) \sim (2\lambda)^{-1/2} n^{-3/4} e^{4\pi \lambda^{-1/2} \sqrt{n}}$$

($n \rightarrow \infty, \gamma_1 \neq 1$ konstant). Der Beweis benutzt die Zerlegung einer horizontalen Integrationsstrecke in Teilstrecken durch das Netz der Fundamentalbereiche von $\mathfrak{G}(\lambda)$. Jede Teilstrecke wird durch eine Substitution von $\mathfrak{G}(\lambda)$ in einen festen an ∞ angrenzenden Fundamentalbereich verlagert, wo sich das Verhalten des Integranden besser überschauen läßt. — Ref. bemerkt, daß sich für die Fourierkoeffizienten der in der oberen Halbebene regulären multiplikativen Funktionen zu Grenzkreisgruppen von erster Art mit der Spitze ∞ asymptotische Entwicklungen gewinnen lassen, deren Restglieder $= O(n)$ sind.
H. Petersson.

Koecher, Max: Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades. I. Math. Z. 59, 399—416 (1954).

Es sei Σ_n die symplektische Gruppe n -ten Grades, M_n die Modulgruppe n -ten Grades und $M_n[q]$ die Hauptkongruenzuntergruppe von M_n zur Stufe q , bestehend aus den Matrizen $\mathfrak{M} \in M_n$,

die der Kongruenz $\mathfrak{M} \equiv \pm \mathfrak{E}_{2n} \pmod{q}$ genügen ($\mathfrak{E}_m^v = m$ -reihige Einheitsmatrix). Im folgenden sei stets k ganz, $n > 1$ und K eine Kongruenzgruppe in Σ_n . D. h. bei geeigneter Wahl der natürlichen Zahl q sei $M_n[q] \subseteq K \subseteq \Sigma_n$ und der Index $(K:M_n[q])$ endlich. Ferner sei $v(\mathfrak{M})$ ein abelscher Charakter von K mit der Eigenschaft $v(\mathfrak{M}) = 1$ für $\mathfrak{M} \in M_n[q]$. H_n bezeichne den Bereich der n -reihigen komplexen symmetrischen Matrizen \mathfrak{Z} mit positivem Imaginärteil \mathfrak{Y} . Schließlich sei $\{K; k, v\}$ die lineare Schar der Formen $f(\mathfrak{Z})$, die in H_n regulär sind und der Transformationsformel

$$f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{M} = f(\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{Z})|(\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1} = v(\mathfrak{M})f(\mathfrak{Z}) \text{ für } \mathfrak{M} \in K$$

genügen. Hierbei ist $\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{Z} = (\mathfrak{M}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{E}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}$. Die Form $f(\mathfrak{Z})$ heiße ganz, wenn $f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}$ als Funktion von \mathfrak{Z} in $\mathfrak{Y} > c\mathfrak{E}_n$ für jede rationale Matrix $\mathfrak{R} \in \Sigma_n$ und jedes $c > 0$ beschränkt ist. Eine einfache Schlußweise ergibt das bemerkenswerte Resultat, daß $\{K; k, v\}$ nur aus ganzen Formen besteht. Dies bedeutet insbesondere, daß die Beschränktheit der Modulformen n -ten Grades im Siegelschen Fundamentalbereich der Gruppe M_n beweisbar ist, also nicht vorausgesetzt zu werden braucht, sofern $n > 1$ ist. Die weiteren Untersuchungen ergeben für die Formen und Funktionen zur Gruppe K analoge Sätze, wie sie für M_n von Siegel angegeben worden sind (s. dies. Zbl. 21, 203). Für den Rang der Schar $\{K; k, v\}$ wird eine nur von k, n, q abhängige obere Schranke mitgeteilt. Der Körper der bezüglich K vollinvarianten Funktionen, die als Quotient von Formen darstellbar sind, erweist sich wieder als ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $n(n+1)/2$. Die allgemeinen Kongruenzgruppen erlangen in der vom Verf. angekündigten Operatoretheorie Bedeutung. H. Maass!

Cinquini, Silvio: Trigonometria e funzioni quasi-periodiche. Archimede 6. 1—8 (1954).

Erläuterung des Begriffes: Fastperiodisch.

W. Maak.

Stuloff, N.: Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen. Math. Z. 59, 339—355 (1954).

Verf. untersucht, welchen Bedingungen eine Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x in $[0, \infty)$ genügen muß, damit sie in eine absolut konvergente Reihe $(1) f(x) = \sum a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ entwickelbar ist mit $a_\nu \geq 0$, $0 < \lambda_\nu < \infty$. Die Möglichkeit der Reihenentwicklung (1) bringt natürlich mit sich, daß $f(s) = f(x + it)$ als Funktion von t fastperiodisch ist. Die Fragestellung des Verf. läuft also im wesentlichen darauf hinaus, die Fastperiodizität von $f(s)$ zu erkennen durch Betrachtung von $f(s)$ nur entlang der reellen Achse. Natürlich muß notwendig $f(x)$ unendlich oft differenzierbar sein und $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ gelten. Wenn dann zusätzlich noch ein $C > 0$ existiert, so daß

$$\lim [-A^{-1} \exp(A/x)]^n f^{(n)}(n/x) \leq C$$

für jedes $0 < A < \infty$ und dazu ein $x \neq A$, so gilt (1). Bezüglich der weiteren 10 Sätze ähnlichen Charakters sei auf die Abhandlung verwiesen. Die Sätze werden erhalten unter Benutzung des Stieltjesschen Momentenintegrals. W. Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzgleichungen:

Olson, F. R.: The non-existence of rational solutions for certain difference equations. Amer. math. Monthly 61, 179—181 (1954).

Die Differenzgleichungen $F(x+1) \pm F(x) = x^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$) haben keine rationalen Lösungen. Zum Beweis wird über $x = 1, 2, \dots$ summiert, so daß rechts harmonische Reihen entstehen, deren Eigenschaften benutzt werden können.

W. Hahn.

Samoloff, J.: The convergence of the solutions of a class of iterative difference equations. J. Math. Physics 33, 105—110 (1954).

Es sei $f(x_1, \dots, x_p)$ eine reelle Funktion von p reellen Veränderlichen (die alle im selben Intervall variieren) mit folgender „starken“ Mittelwerteigenschaft: $|f - (M+m)/2| < \sigma(M-m)$, wo M bzw. m das Maximum bzw. Minimum von x_1, \dots, x_p und σ eine Konstante mit $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ bezeichnen. Bei Anfangswerten x_1, x_2, \dots, x_p konvergiert das Iterationsverfahren $x_{n+p+1} = f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p})$, $n = 0, 1, \dots$ und liefert als Grenzwert eine Funktion F von x_1, \dots, x_p , welche durch (a) $\lim \{F(x_1, \dots, x_p); x_k \rightarrow x \text{ für } k = 1, \dots, p\} = F(x)$, (b) $F(x_1, \dots, x_p) = F(x_2, \dots, x_p, f(x_1, \dots, x_p))$ eindeutig festgelegt ist. G. Aumann.

● Kells, L. M.: Elementary differential equations. 4. ed. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company 1954. X, 265 p. 102 fig. \$ 4, .

● Langer, R. E.: A first course in ordinary differential equations. New York: John Wiley and Sons 1954. XII, 249 p. \$ 4,50.

Eine inhaltlich, methodisch und didaktisch in gleicher Weise hervorragende erste Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen unter den Gesichtspunkten: Herausheben des Wesentlichen, Klarheit, Einfachheit und Strenge der Darstellung, Illustration durch zahlreiche, prägnante Beispiele und Aufgaben (mit teilweiser Angabe der Lösungen), auch aus den Anwendungsgebieten der Mechanik, der Physik, der Chemie und der Technik. Contents. 1. Introduction. 2. Some types of solvable differential equations of the first order. 3. Applications of differential equations of the first order. 4. Integral curves. Trajectories. 5. Approximate solutions. Infinite series. Existence and uniqueness of a solution. 6. Further studies of differential equations of the first order. The Riccati equation. 7. Some solvable differential equations of the second order. Approximations. Applications. 8. The linear differential equation with constant coefficients. 9. Applications of linear differential equations of the second order. 10. The linear equation with variable coefficients. 11. Solutions in power series. 12. Some differential equations involving parameters. *O. Volk.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Linear differential equations with completely monotone solutions. Amer. J. Math. **76**, 199–206 (1954).

Verff. zeigen hier — ihre früheren Sätze dieser Art verallgemeinernd —: In der Differentialgleichung

(1) $f_0(x) D^n y + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k(x) D^{n-k} y = 0$ ($0 < x < \infty$) mit $n \geq 2$ und $D = \frac{d}{dx}$ seien $-D^2 f_0, -D f_1, f_2, \dots, f_n$ total-monoton und $f_0 > 0$. Dann besitzt (1) eine total-monotone (nichttriviale) Lösung, die mithin (Hausdorff-Bernstein) in der Form $y(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\mu(t)$ ($0 \leq d\mu(t) \neq 0$) darstellbar ist. *F. W. Schäfke.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients. Amer. J. Math. **76**, 207–219 (1954).

Verff. behandeln die Differentialgleichung (1) $y'' + q(t)y = 0$ in $0 \leq t < \infty$ mit monotonem, stetigem $q(t)$ unter der Voraussetzung, daß (1) nicht-oszillatorisch ist. Ihre Sätze betreffen das Verhalten von $h = y'^2 + qy^2$, $k = y^2 + y'^2/q$ und $r = y'/y$, und zwar bei 1. $q > 0$; 2. $q < 0$, $q(\infty) = 0$; 3. $q < 0$, $q(\infty) = -\infty$; 4. $q < 0$, $0 > q(\infty) > -\infty$. Einige Ergänzungen beziehen sich auch auf nicht notwendig monotones q . *F. W. Schäfke.*

Putnam, C. R.: Note on a limit-point criterion. J. London math. Soc. **29**, 126–128 (1954).

Nach H. Weyl [Math. Ann. **68**, 220–269 (1910)] hat die Differentialgleichung $L(x) + \lambda x = 0$ mit $L(x) = (p x')' - f x$ im Grenzkreisfall für jedes λ lauter absolut quadratisch integrierbare Lösungen, im Grenzpunktfall hingegen für kein λ zwei unabhängige solche Lösungen. Hier wird noch bemerkt, daß der Grenzpunktfall dann und nur dann vorliegt, wenn [mit der Randbedingung $x(0, \lambda, \alpha) = -\sin \alpha$, $p(0) x'(0, \lambda, \alpha) = \cos \alpha$] für ein $\lambda = x$ oder $\partial x / \partial \lambda$ (bei festem α) nicht zu dieser Klasse $L^2[0, \infty]$ gehört. *H. Hornich.*

Taam, Choy-Tak: The boundedness of the solutions of a nonlinear differential equation. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 122–125 (1954).

Ein von Leighton (dies. Zbl. **32**, 347) für lineare Differentialgleichungen aufgestellter Satz wird auf die nichtlineare Differentialgleichung (1) $(r(x)y')' + q(x)y = f(x, y)$ erweitert. Es seien 1. r, q und $f(x, y)$ bei jedem festen y für $x > 0$ reellwertige Funktionen der Klasse $L(0, R)$ für jedes $R > 0$; $f(x, y)$ sei stetig und genüge einer Lipschitzbedingung $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq g(x)|y_1 - y_2|$, wo $g(x)$ und $f(x, 0)$ zur Klasse $L(0, \infty)$ gehören. Wenn eine Funktion $p(x)$ existiert mit: 1. p gehört zur Klasse $L(0, R)$ für jedes $R > 0$, 2. rp ist absolut stetig und > 0 in $< 0, \infty$, 3. $p - q$ und $(rp)^{-1} \text{Min}(0, (rp)')$ gehören zu $L(0, \infty)$, so ist jede Lösung von (1) beschränkt in $< 0, \infty$. Der Satz läßt sich auch auf komplexwertige Koeffizienten bei (1) übertragen. *L. Collatz.*

Obi, Chike: Researches on the equation $(E) \ddot{x} + (\varepsilon_1'' + \varepsilon_2 x) \dot{x} + x + \varepsilon_3 x^2 = 0$. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 26—32 (1954).

If $\frac{3}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} = \varepsilon$ is small, the equation of the title may be reduced to (E^*) : $\ddot{y} + (k + \varepsilon y) \dot{y} + y + \frac{\varepsilon}{2} y^2 = 0$ ($x = \frac{3}{2} y \varepsilon_3^{-1}$, $\varepsilon_1 = k$). It is shown that a necessary and sufficient condition for the existence of a periodic solution is that $k = \varepsilon \mu$ where $0 < \mu \leq 2/21$, and that in this case the solution is unique (except for translations in t); first approximations of the periodic solution and the period are given.

L. J. Massera.

Coddington, E. A.: The spectral matrix and Green's function for singular self-adjoint boundary value problems. Canadian J. Math. **6**, 169—185 (1954).

Es bezeichne L den Differentialoperator $L = p_0 (d/dx)^n + p_1 (d/dx)^{n-1} + \dots + p_n$, wobei die p_k komplexwertige Funktionen darstellen, die bis zur $(n-k)$ -ten Ableitung auf dem Intervall $(-\infty \leq) a < x < b (\leq +\infty)$ stetig sind. Sei dort ferner $p_0(x) \neq 0$ und der Operator L stimme mit dem adjungierten $L^+ = (-1)^n (d/dx)^n (\bar{p}_0 \cdot) - (-1)^{n-1} (d/dx)^{n-1} (\bar{p}_1 \cdot) + \dots + \bar{p}_n$ überein. Der Zweck der Arbeit ist es, die Existenz und Eindeutigkeit der Greenschen Funktion für gewisse zu L und (a, b) gehörige selbstadjungierte Randwertprobleme nachzuweisen und darüber hinaus zu zeigen, wie Existenz und Eindeutigkeit der in der Parsevalschen Gleichheit auftretenden Spektralmatrix aus der Greenschen Funktion gewonnen werden können. Ferner wird eine Formel hergeleitet, die die Spektralmatrix durch die Greensche Funktion ausdrückt. Der Kerngedanke der Untersuchungen besteht im Nachweis der Kompaktheit der Menge $\{G_\delta\}$ der Greenschen Funktionen G_δ , die zu selbstadjungierten Randwertproblemen für beschränkte, abgeschlossene Teilintervalle δ von (a, b) gehören. Verf. betrachtet zwei Fälle. Im ersten sind keinerlei Randbedingungen bei a oder b notwendig, um ein selbstadjungiertes Randwertproblem zu erhalten. Im zweiten Fall ist a endlich, und das Intervall (a, b) kann durch $[a, b)$ ersetzt werden; ein selbstadjungiertes Randwertproblem ergibt sich dann, indem Randbedingungen bei a allein vorgeschrieben werden. Für den von H. Weyl [Math. Ann. **68**, 220—269 (1910)] behandelten Fall: $n = 2$, p_k reellwertig, entspricht der erste Fall dem Vorliegen des Grenzpunktyps bei a und b , der zweite dem des Grenzkreistyps bei a und Grenzpunktyps bei b .

H. Pachale.

Volpato, Mario: Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 224—244 (1954).

Si considera il problema (a) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$, $y(x_1) = c_1, \dots, y(x_n) = c_n$, nelle incognite $\lambda, y(x)$. Nei casi $n = 1, 2$ tale problema ha già formato oggetto di ricerche da parte rispettivamente di F. Cafiero, G. Zwirner, e di M. Volpato, mentre E. Magenes, G. Stampacchia, R. Conti (questo Zbl. **51**, 324) si sono occupati (per n intero positivo qualsiasi) del caso particolare $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda) = \lambda g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Nel presente lavoro viene stabilito un teorema di esistenza della soluzione del problema (a), per il cui enunciato rinviamo al lavoro in questione. È da soggiungere che dal nuovo procedimento dimostrativo dell'A. segue una prima dimostrazione di un'affermazione contenuta nel citato lavoro di Conti.

S. Cinquini.

Kimura, Toshifusa: Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Commentarii math. Univ. St. Pauli **2**, 47—53 (1954).

In Fortsetzung der vorigen Arbeit [Commentarii math. Univ. St. Pauli **2**, 23—28 (1953)] betrachtet Verf. Differentialgleichungen der Form $F(x, y, y') = 0$, wo F ein Polynom ist, und zeigt, daß jedes Integral in jeder Umgebung jeder seiner wesentlich singulären Stellen fast alle Werte annimmt.

O.-H. Keller.

Wittich, H.: Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung. Math. Ann. **127**, 433—440 (1954).

Verf. beweist ein von Malmquist herrührendes Problem, das 1932 auch von Yosida untersucht wurde in der folgenden Form: $w' = R(z, w)$ besitze eine in $0 < |z - a| < \rho$ eindeutige analytische Lösung, für die $z = a$ wesentliche Singularität ist. Dann ist $R(z, w)$ von der Form $R(z, w) = a_0(z) + a_1(z)w + a_2(z)w^2$. Zum Beweise benützt Verf. wie schon in seinen früheren Arbeiten dieser Richtung

vorwiegend Methoden aus der Wertverteilung. Verf. zeigt, daß als Lösungen von $y' = R(z, w)$ solche Funktionen $w = w(z)$ existieren, die sich in der m -fach punktierten Ebene regulär verhalten, und stellt in diesem Zusammenhang Betrachtungen an über die Wertverteilung von Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten.

H. P. Künzi.

Pailloux, Henri: Sur la résolution des équations différentielles linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 871—873 (1954).

La Nota riassume alcuni risultati dell'A. sulla risoluzione dei sistemi lineari fondati sui concetti di scomposizione simbolica degli operatori differenziali e di equivalenza dei sistemi. Il riassunto schematico non permette di precisare i contributi originali dell'A.

G. Sansone.

Markus, L.: Global structure of ordinary differential equations in the plane. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 127—148 (1954).

Une étude nouvelle des trajectoires d'un champ de vecteurs défini dans le plan est fondée sur la notion de séparatrice. Une trajectoire est une séparatrice, s'il est impossible de la considérer comme faisant partie d'un pinceau de trajectoires parallèles qui ont toutes le même ensemble limite, et tel que la frontière du pinceau soit formé par cet ensemble limite et deux trajectoires du pinceau. Ainsi le système $x' = y, y' = e^x$ admet les deux séparatrices $y = \pm e^{x/2}$. Les systèmes étudiés sont ceux qui n'admettent pas de séparatrice qui soit limite d'autres séparatrices. Les composantes connexes du complémentaire de l'ensemble des séparatrices sont les régions canoniques: celles-ci sont des faisceaux de trajectoires parallèles. La donnée des séparatrices d'un champ de vecteurs et d'une trajectoire de ce champ dans chaque région canonique définit, à un homéomorphisme près, l'ensemble des lignes intégrales du champ de vecteurs (les croquis usuels représentant les trajectoires d'un champ de vecteurs sont ainsi justifiés).

G. Reeb.

Zaremba, S. K.: Divergence of vector fields and differential equations. Amer. J. Math. **76**, 220—234 (1954).

Per lo studio dell'equazione (1) $dx/X(x, y) = dy/Y(x, y) = dt$, l'A. premette l'interpretazione geometrica di una formula notata la prima volta da I. Bendixson (1896) sulla variazione degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ in funzione dei valori iniziali, e dal segno dell'integrale $\oint (X_x + Y_y) dt$ esteso ad una traiettoria chiusa C , l'A. deduce la stabilità o la instabilità di C . Introdotta infine la nozione di dominio D di influenza di un punto singolare isolato dell'equazione (1), l'A. studia in D l'equazione alle derivate parziali (2) $X(x, y)z_x + Y(x, y)z_y = F(x, y) - \delta(x, y)z$, nell'ipotesi che $\delta(x, y) = X_x + Y_y$ sia diversa da zero nel punto singolare e $F(x, y)$ non si annulli in questo punto.

G. Sansone.

Wintner, Aurel: On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations. Amer. J. Math. **76**, 183—190 (1954).

Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß die Matrizendifferentialgleichung $X' = A(t)X$ [$A(t)$ stetig für große t] eine Lösung mit $X(t) \rightarrow E$ ($t \rightarrow \infty$)

[E Einheitsmatrix] besitzt. Diese sind: 1. $\int_1^\infty A(s) ds = A(t)$ konvergiert (evtl.

bedingt) und $A^*(t)A(t)$ oder $A(t)A^*(t)$ ist bis $+\infty$ summierbar; 2. $A^*(t)$ existiert und die Voraussetzungen 1 sind mit $B = A^*A$ oder $B = AA^*$ an Stelle von A erfüllt; 3. $A^*(t), B(t)$ existieren und 1 gilt mit $C = B^*B$ oder $C = BB^*$ an Stelle von A ; ... Diese Reihe von Kriterien wird durch ein einfaches Verfahren auf das Kriterium von Bôcher [$A(t)$ bis $+\infty$ summierbar] zurückgeführt. An-

schließend wird gezeigt, daß die Konvergenz von $\int_1^\infty A(s) ds$ nicht notwendig für die betrachtete Eigenschaft der Differentialgleichung ist, und umgekehrt.

F. W. Schäfke.

Hukuhara, Masuo: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques et contenant un paramètre. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **7**, 69—85 (1954).

Verf. untersucht das in Vektorform geschriebene System $(1) \, dx/dt = A(t, \varepsilon) \, x$ mit $A(t + \omega, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)$. A sei eine ganze Funktion in ε und stetig für $-\infty < t < +\infty$ und $|\varepsilon| < \varrho_0$. Ljapunov hat gezeigt, daß es eine lineare periodische Transformation für $\varepsilon = 0$ gibt, so daß man eine konstante Matrix in kanonischer (Jordanscher) Normalform erhält. Verf. verallgemeinert den Satz und zeigt: Es gibt eine periodische Matrix $(2) \, P(t, \varepsilon) = P_0(t) + \varepsilon^\alpha P_1(t) + \dots + \varepsilon^{n\alpha} P_n(t) + \dots$ so, daß durch $x = P(t, \varepsilon) \, y$ aus (1) sich $dy/dt = B(\varepsilon) \, y$ ergibt. Dabei habe $B(\varepsilon)$ kanonische Form, $1/\alpha = q$ sei eine ganze Zahl und $P_0 \neq 0$. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz von (2) angegeben, zu deren Herleitung Verf. einige Sätze über „schiefe Dreiecksmatrizen“ benötigt. $a_{jk} \, (j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n)$ ist ein Element einer solchen Matrix, wenn $a_{jk} = 0$ für $j - k > \min(0, m - n)$ und $a_{jk} = a_{j'k'}$ für $j - k = j' - k'$. W. Haacke.

Amato, V.: Sull'integrazione immediata di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a matrice circolante ω . Giorn. Mat. Battaglini, V. Ser. 82, 233—236 (1954).

L'A. complète un travail précédent (ce Zbl. 50, 315) en faisant apparaître les valeurs initiales dans l'intégrale générale. Ch. Blanc.

Watson, A. G. D.: The Sturmian theory of oscillations. Math. Gaz. 38, 15—17 (1954).

Kurze durchsichtige Herleitung der Sturmschen Sätze für $\dot{x} = -f(t) \, y$, $\dot{y} = g(t) \, x$ [f, g stetig, $f > 0$] an Hand der mit $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ entstehenden Gleichung $\dot{\vartheta} = g \cos^2 \vartheta + f \sin^2 \vartheta$. Als Hilfsmittel wird die Differenzierbarkeit nach den Anfangswerten benutzt. F. W. Schäfke.

Minorsky, Nicolas: Sur les systèmes non linéaires à deux degrés de liberté. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 646—647 (1954).

Bei dem System zweier gekoppelter Schwinger mit van der Polscher Dämpfung $\ddot{x}_1 + (1 + k_1^2) \dot{x}_1 = (a - b x_1^2) \dot{x}_1 - \varepsilon Q_1 x_2$, $\ddot{x}_2 + (1 + k_2^2) \dot{x}_2 = (a - b x_2^2) \dot{x}_2 + \varepsilon Q_2 x_1$ seien $a, b, \varepsilon, k_1, k_2$ kleine Größen. Mit der stroboskopischen Methode wie in früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 42, 100; 51, 67) werden Polarkoordinaten r_1, q_1, r_2, q_2 eingeführt, und es ergibt sich ein System von drei Differentialgleichungen 1. Ordnung für r_1, r_2 und für $q = q_1 - q_2$. Es wird nach Bedingungen für ein stationäres synchronisiertes System gefragt, d. h. nach der Möglichkeit einer Lösung mit konstantem r_1, r_2 und q . Man erhält hierfür eine Gleichung 6. Grades für λ^2 , wobei $\lambda = r_1/r_2$ ist. Verf. nennt das System symmetrisch, wenn $\lambda = 1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist. Für die Stabilität des stationären Systems können die bekannten Hurwitzschen Kriterien herangezogen werden; insbesondere besteht Stabilität für das symmetrische System. L. Collatz.

Levin, J. J. and Norman Levinson: Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and an associated boundary layer equation. J. rat. Mech. Analysis 3, 247—270 (1954).

Verff. untersuchen die Beziehungen zwischen den Lösungen von $(1) \, x'(t) = f(x, y, t, \varepsilon)$, $\varepsilon y'(t) = g(x, y, t, \varepsilon)$ [x, f reelle n_0 -Vektoren; y, g reelle n -Vektoren; $\varepsilon \geq 0$; $r > 0$, fest] für $\varepsilon \rightarrow 0 +$ und denen von $(2) \, x' = f(x, y, t, 0)$, $0 = g(x, y, t, 0)$. Ihre Voraussetzungen sind $\left| z = (z_1, \dots, z_k) : |z| = \sum_{i=1}^k |z_i| \right| : 1$. (2) besitze in $a \leq t \leq b$ eine stetig differenzierbare Lösung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; 2. In einem Gebiete $R: \{|x - \varphi(t)| < \delta_0, |y - \psi(t)| < \delta_0, a \leq t \leq b, 0 \leq \varepsilon < \delta_0\}$ sind f, g und deren partielle Ableitungen nach den x_i und y_j stetig in (x, y, t, ε) . 3. Die Realteile aller charakteristischen Wurzeln der (n, n) -Matrix $g_\nu = [(\partial g_i / \partial y_j)](\varphi(t), \psi(t), t, 0)$ sind $\leq -\mu < 0$ für $a \leq t \leq b$. — Dann gilt: I. Ist $\varepsilon + |\Phi(a, \varepsilon) - \varphi(a)| + |\Psi(a, \varepsilon) - \psi(a)| (= D(\varepsilon))$ genügend klein, so besitzt (1) eine einzige Lösung $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ mit $x(a, \varepsilon) = \Phi(a, \varepsilon), y(a, \varepsilon) = \Psi(a, \varepsilon)$. Sie existiert in $a \leq t \leq b$, und $|x(t, \varepsilon) - \varphi(t)| + |y(t, \varepsilon) - \psi(t)|$ konvergiert in $a \leq t \leq b$ gleichmäßig gegen 0 für $D(\varepsilon) \rightarrow 0$. II. Es gibt ein $\delta > 0$, unabhängig von ε , so daß für $|\Psi(a) - \psi(a)| \leq \delta$ bei hinreichend kleinem ε (1) eine einzige Lösung $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ mit $x(a, \varepsilon) = \varphi(a), y(a, \varepsilon) = \Psi(a)$ besitzt, die in $a \leq t \leq b$ existiert. In jedem Intervall $c \leq t \leq b, a < c$ konvergiert $|x(t, \varepsilon) - \varphi(t)| + |y(t, \varepsilon) - \psi(t)|$ gleichmäßig gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0 +$.

— Es folgen Verschärfungen unter einer weiteren Voraussetzung an Hand der Diskussion der Randlagengleichung: $\varepsilon' \tilde{y}' = g(q(a), \tilde{y}, a, 0)$ und Ausdehnungen auf Systeme $x' = f(x, y_1, y_2, t, \varepsilon)$, $\varepsilon^{\tau_1} y_1' = g_1(x, y_1, y_2, t, \varepsilon)$, $\varepsilon^{\tau_2} y_2' = g_2(x, y_1, y_2, t, \varepsilon)$. — Die Untersuchungen überschneiden sich, wie auch Verff. bemerken, mit denen russischer Autoren, insbesondere denen von Tichonov und Gradstein.

F. W. Schäfke.

Vasil'eva, A. B.: Über die Differentiation der Lösungen von Differentialgleichungssystemen, die kleine Parameter bei den Ableitungen enthalten. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 3 (Ser. fiz.-math. estestv. Nauk Nr. 2), 29—40 (1954) [Russisch].

The author considers the system $\mu dz/dt = F_j(z, y_k, t)$, $dy_k/dt = f_k(z, y_k, t)$, ($j, l = 1, \dots, n$; $i, k = 1, \dots, m$), where μ is a small positive parameter. The purpose of the paper seems to be a weakening of the definition of a „stable“ root of the degenerate system $F_j = 0$ compared with her previous work (this Zbl. 48, 71). Whereas Tichonov (this Zbl. 48, 71), considering the continuity of z_k , y_k , defined a „stable“ root in terms of Lyapunov stability of the associated system, Vasil'eva (loc. cit.) used a certain explicit sufficient criterion for this stability, namely the negative definiteness of a certain form. The present work requires the weaker sufficient condition that the latent roots of the corresponding matrix should have negative real parts; a similar point has been made contemporarily by J. J. Levin and N. Levinson (see prec. rev.). There is an extension to the case of several small parameters. The two theorems are almost identical in formulation with those of her previous paper (loc. cit. pp. 539, 621).

F. V. Atkinson.

Sternberg, H. M. and R. L.: A two-point boundary problem for ordinary self-adjoint differential equations of fourth order. Canadian J. Math. 6, 416—419 (1954).

In der Vektor-Randwertaufgabe $[P_0(x) u'']'' - [P_1(x) u']' + P_2(x) u = 0$; $u(x_j) = u'(x_j) = 0$ für $j = 1, 2$ sei $P_0(x)$ positiv definit und die Matrizen $P_j(x)$ von der Klasse C^{2-j} in (a, ∞) . Durch Zurückführung auf ein System von Differentialgleichungen 2. Ordnung wird gezeigt: Wenn für ein geeignetes reelles $k_0 > 0$ die Matrizen $P_0 - k_0 I$, P_1 , P_2 in (a, ∞) negativ semidefinit sind und es ein $a_0 \geq a$ gibt, so daß für beliebige x_1, x_2 mit $a_0 \leq x_1 < x_2 < \infty$ die Randwertaufgabe für die Lösung $u = 0$ in (a, ∞) hat, so existieren die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty P_1(x) dx$, $\int_a^\infty x^2 P_2(x) dx$ und für jeden konstanten Vektor π mit $\pi^* \pi = 1$ gilt: $\limsup_{x \rightarrow \infty} x \pi^* \int_x^\infty P_1(t) dt \leq 2 k_0$, $\limsup_{x \rightarrow \infty} |x \pi^* \int_x^\infty t^2 P_2(t) dt| \leq 8 k_0$.

L. Collatz.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● Centre Belge de Recherches Mathématiques: Premier Colloque sur les Équations aux dérivées partielles; tenu à Louvain du 17 au 19 décembre 1953. Liège: Georges Thone; Paris: Masson & Cie., 1954. 128 S. 200 fr. belges, 1400 fr. français.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Segre, Beniamino: Questioni di realtà sulle forme armoniche ternarie e sulle loro hessiane. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 148—151 (1954).

Fabre de la Ripelle, Michel: Méthode de résolution des équations de perturbation pour un hamiltonien de perturbation quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1291—1293 (1954).

Sauer, R.: Remarques géométriques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre quasilineaires et homogènes. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain du 17 au 19 déc. 1953, 119—126 (1954).

Die Note bringt in gedrängter Form den Inhalt der §§ 19—24 der Monographie des Verf., dies. Zbl. 46, 319, insbesondere S. 86—110 des Buches. K. Maurin.

Bouligand, G.: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 297—299 (1954).

Sobolev, S. L.: Über eine neue Aufgabe der mathematischen Physik. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 18, 3—50 (1954) [Russisch].

On considère un système d'équations aux dérivées partielles qui en notation vectorielle s'écrit sous la forme

$$\partial \vec{v} / \partial t - [\vec{v} \times \vec{k}] + \text{grad } p = \vec{F}, \quad \text{div } \vec{v} = g.$$

L'A. expose quelques méthodes de la résolution du problème de Cauchy et d'un problème mixte relatifs à ce système et des autres problèmes qui s'y rattachent.

M. Krzyżański.

Katz, S. and A. M. Peiser: A system of non-linear partial differential equations arising in heat transfer. *J. Math. Physics* 32, 256—268 (1954).

Gli AA. considerano le equazioni differenziali nelle incognite u e v , che si incontrano in alcuni problemi della trasmissione del calore, e che si suppongono valide per valori positivi delle variabili x e y : (1) $f(u) \partial u / \partial x = u - v = g(v) \partial v / \partial y$; equazioni corodate dalle seguenti condizioni agli estremi $u(0, y) = \varphi(y)$, $u(x, 0) = \psi(x)$ dove, $\varphi(y)$ e $\psi(x)$ sono, come $f(u)$ e $g(u)$, funzioni note. Ricondotte le (1) ad equazioni integrali del tipo di Volterra gli AA. dimostrano il teorema di esistenza e di unicità per tali equazioni. Dimostrano poi la convergenza di un metodo alle differenze finite per risolvere le (1) e, nel caso $f(u) = -1$, $g(u) = 1$, determinano l'ordine di grandezza dell'errore commesso applicando quel metodo di approssimazione.

D. Graffi.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the solutions of certain overdetermined systems of partial differential equations. *Arch. der Math.* 5, 168—174 (1954).

Betrachtet werden überbestimmte Systeme der Gestalt $f^i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Sind f^i Funktionen der Klasse C^n ($n \geq 1$) bezüglich ihrer Argumente und sind $u(x, y)$, $v(x, y)$ in einem Gebiet der x, y -Ebene zweimal stetig differenzierbar, so gilt $u, v \in C^{n+1}$, wenn noch eine Diskriminantenbedingung erfüllt ist. Ob diese Aussage schon unter der schwächeren Annahme $u, v \in C^1$ gilt, wird nicht allgemein entschieden. Gilt aber $f^1 = a u_x + b v_x + e$, $f^2 = c u_y + d v_y + g$ mit $a = a(x, y, u, v)$ usw., d. h. stellen $f^1 = 0$, $f^2 = 0$ ein quasilineares hyperbolisches System in der Normalform dar, so folgt aus $u, v \in C^1$ bereits $u, v \in C^{n+1}$. Jetzt kann auch $n = 1$ zugelassen werden. Als Gegenstück dafür wird gezeigt, daß jedes stetig differenzierbare Lösungspaar u, v eines quasilinearen homogenen elliptischen Systems ($n + 1$)-mal differenzierbar ist, falls die Koeffizienten (in Abhängigkeit von x, y, u, v) zur Klasse C^n gehören und die Funktionaldeterminante J , angesehen als bekannte Funktion von x, y , zu C^n gehört und $J \neq 0$ gilt. Der Beweis des letzten Satzes ergibt sich so: Bei den gemachten Annahmen folgt, daß die quadratische (positiv definite) Form des elliptischen Systems bei Einführen von u, v als unabhängige Variable, was wegen $J \neq 0$ im kleinen möglich ist, in eine Form mit zu C^1 gehörigen Koeffizienten übergeht. Damit ist nach einem früheren Satz der Verff. (Hartman, dies. Zbl. 46, 151) die Abbildung $(x, y) \rightarrow (u, v)$ mindestens zweimal differenzierbar und, so weiter schließend, ergibt sich dann $u, v \in C^{n+1}$. Die übrigen Beweise sind einfacherer Natur. — Anwendungen auf Flächen mit gegebener Gaußscher Krümmung und einer weiteren Beziehung für die zweite Fundamentalform sowie zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung für eine Funktion werden gemacht.

Joachim Nitsche.

Jörgens, Konrad: Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. *Math. Ann.* 127, 130—134 (1954).

Es sei $z = z(x, y)$ eine reelle Lösung der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ für $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$. Dann werden die folgenden Abschätzungen bewiesen:

$$[r_x^2 + r_y^2]_{x=x_0, y=y_0} \leq \frac{24}{R^2} (r_0 + t_0)^2 r_0^2, \quad [t_x^2 + t_y^2]_{x=x_0, y=y_0} \leq \frac{24}{R^2} (r_0 + t_0)^2 t_0^2,$$

mit $r_0 = r(x_0, y_0)$, $t_0 = t(x_0, y_0)$. Diese Ungleichungen entsprechen denjenigen, die vom Ref. für die Minimalflächengleichung bewiesen wurden (vgl. dies. Zbl. 48, 154). Aus den obigen Abschätzungen folgt, daß jede in $x^2 + y^2 < \infty$ reelle Lösung der Gleichung $rt - s^2 = 1$ ein Polynom zweiten Grades ist. Der Satz von S. Bernstein, wonach jede in $x^2 + y^2 < \infty$ zweimal stetig differenzierbare Lösung der Minimalflächengleichung eine lineare Funktion sein muß, ist in obigem Resultat enthalten. Außerdem werden in dieser Arbeit zwei Beweise für den Satz gegeben, daß das

nnere des Einheitskreises $u^2 + v^2 < 1$ nicht eindeutig und harmonisch auf die x, y -Ebene abgebildet werden kann.

E. Heinz.

Weinberger, Hans F.: Sur les solutions fortes du problème de Tricomi. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1961—1962 (1954).

In a recent research work on the Tricomi problem, P. Germain and R. Bader (this Zbl. **52**, 97) have established, under certain conditions, the existence of a weak solution. The author proves and most easily that this solution is in fact a strong solution.

C. Racine.

Protter, M. H.: An existence theorem for the generalized Tricomi problem. Duke math. J. **21**, 1—7 (1954).

Frankl [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski **152**, 99—116 (1951)] ha considerato per l'equazione di Tricomi: (1) $y z_{xx} + z_{yy} = 0$ un problema che generalizza quello di Tricomi. Sia $\Gamma: x = x(s), y = y(s), (0 \leq s \leq s_0)$ un arco semplice rettificabile di curva, posto nel semipiano $y \geq 0$, e terminante ai punti $A(-1, 0), B(1, 0)$; $x(s), y(s)$ abbiano derivate terze continue; sia Γ_0 la curva normale per i punti A e B , di equazione $x^2 + \frac{4}{3}y^3 = 1$. Γ contenga Γ_0 all'interno, ma vicino ai punti A e B abbia in comune con Γ_0 due archi arbitrariamente piccoli, ma finiti. Nel semipiano $y \leq 0$ siano Γ_1 e Γ_2 le caratteristiche della (1) per i punti A e B , appartenenti a due diversi sistemi e aventi in comune un punto: sia $\gamma: y = g(x) (-1 \leq x \leq c)$ un arco di curva uscente dal punto A , posto nel semipiano $y < 0$, terminato a un punto $C(c, g(c))$ di Γ_2 , e avente in comune con Γ_1 un arco arbitrariamente piccolo ma finito, terminante al punto I ; inoltre esista un numero positivo M tale che sia $-M < g'(x) < 0 (-1 \leq x \leq c)$. Siano assegnate le funzioni $f_1(s) (0 \leq s \leq s_0)$ con derivata seconda continua e $f_2(s_1)$ (dove s_1 è l'arco di γ) con derivata quarta continua. Il problema di Frankl è il seguente: „Trovare una soluzione della (1), definita nel campo D , limitato da $\Gamma_1 \Gamma_2$ e γ , e riducentesi a $f_1(s)$ su Γ e a $f_2(s_1)$ su γ “. Protter considera lo stesso problema per l'equazione (2) $K(y) z_{xx} + z_{yy} = 0$ [dove $K(y)$ è una funzione crescente con derivata terza continua ed è $K(0) = 0, K'(0) \neq 0$], che con un cambiamento di variabili e di funzione incognita viene mutata nella (3) $y u_{xx} + u_{yy} + C(y) u = 0$ (un cambiamento di variabili di questo tipo era già stato considerato da M. Cibrario, questo Zbl. **5**, 160, 356, averi che l'A. mostra di ignorare). L'A., definita opportunamente una soluzione quasi-regolare della (3), dimostra il seguente teorema di alternativa: „O esiste un'unica soluzione quasi-regolare della (3), definita nel campo D , che si riduce a $f_1(s)$ su Γ e a $f_2(s_1)$ su γ , oppure esistono in D soluzioni non identicamente nulle (quasi-regolari) della (3), che sono nulle su Γ e su γ “. La dimostrazione si ispira ai metodi di F. Tricomi [Mem. R. Accad. Lincei, V. Ser. **14**, 133—247 (1923)] e di S. Gellerstedt (Tesi, Uppsala 1935), e riconduce la questione alla risoluzione di una equazione integrale.

M. Cinquini-Cibrario.

Germain, P.: Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow. Commun. pure appl. Math. **7**, 117—143 (1954).

Im ersten Teil der Arbeit werden an Hand der Gleichung von Čaplygin zwei typische Strömungen mit Schalldurchgang (Düse, Profil) diskutiert und die Besonderheiten derartiger Probleme aufgezeigt. Der zweite Teil befaßt sich mit der Konstruktion von Elementarlösungen im Sinne Hadamards der Gleichung von Čaplygin: $k(z) u_{xx} + u_{zz} = 0$. Nachdem die unbekannte Funktion $u(x, z)$ hinsichtlich z einer Fourier-Transformation unterworfen ist, erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion $U(x, z)$, wobei x nur als Parameter auftritt. Deren für $z = z_1$ und $z = z_2$ verschwindenden Elementarlösungen werden diskutiert, wobei die Fälle $0 < z_2 < z_1$ (Streifen im elliptischen Bereich), $z_2 = 0 < z_1$ (gemischter Bereich) und $z_2 < z_1 < 0$ (hyperbolischer Bereich) als wesentlich voneinander verschieden gesondert behandelt werden. Der Zusammenhang mit der Greenschen Formel wird hergestellt. Zum Schluß folgen einige Bemerkungen über die Greenschen Funktion des Tricomi-Problems.

C. Heinz.

Ludford, G. S. S.: Extensions in the applicability of Riemann's formula. J. rat. Mech. Analysis **3**, 77—88 (1954).

Riemanns Integrationsmethode der partiellen hyperbolischen Differentialgleichung 2. Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen wird zunächst auf den Fall ausgedehnt, daß sowohl die Tangente der Anfangskurve als auch die Anfangswerte selber unstetig sind. Es ergeben sich unter wenig einschränkenden Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit der im Sinne des Verf. „regulären“ (d. h. mit gewissen Unstetigkeiten behafteten) Lösung, die auch hier durch Riemanns Formel bestimmt ist. Sodann wird das Cauchysche Anfangswertproblem auch für den Fall gelöst, daß außerdem noch die Anfangskurve von Charakteristiken derselben Schar mehr

als einmal geschnitten wird. Auch hier ergeben sich unter denselben Voraussetzungen Existenz und Eindeutigkeit, wenn man die Ebene der unabhängigen Variablen als in bestimmter Weise geblättert betrachtet. *C. Heinz.*

Haack, Wolfgang und Günter Hellwig: Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom gemischten Typus. Arch. der Math. 5, 60–76 (1954).

A partial differential equation of the form

$$(1) \quad A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u + G = 0$$

is generally of the „mixed“ type, namely elliptic in a certain domain of the (x, y) -plane, hyperbolic in another and parabolic on a common boundary C . The author's investigations have aimed at obtaining existence theorems when (1) is considered in a domain in which it is hyperbolic, the boundary of this domain consisting of two characteristics passing through a point and of an arc, which must be regular, of the parabolic boundary C . Extending to this case the well known method of integral equations they establish that, under certain conditions, solutions of (1) in the given domain and with the usual boundary conditions are still satisfying an integral equation; but this equation is of the so called singular type. Detailed calculations and explicit proofs are dealt with only in the particular case of an equation of the form $(A U_x)_x - (C U_y)_y = F$. *C. Racine.*

MacColl, L. A.: Geometrical properties of two-dimensional wave motion. Amer. math. Monthly 61, 96–103 (1954).

Verf. betrachtet ebene, sogen. sinusoidale Wellen, d. h. Lösungen der Wellengleichung $u_{xx} + u_{yy} - c^2 u_{tt} = 0$ von der Form $u = \exp \{ \alpha(x, y) + i \beta(x, y) + i \omega t \}$. Die Funktionen $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, y)$, welche nicht beide Konstante sein können, müssen zwei nicht-lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung befriedigen. Die geometrischen Eigenschaften der Kurve konstanter Amplitude ($\alpha = \text{konst.}$) und konstanter Phase ($\beta = \text{konst.}$) werden herangezogen, um notwendige und hinreichende Kriterien dafür aufzustellen, daß eine bzw. zwei Kurvenscharen der (x, y) -Ebene als Kurven $\alpha = \text{konst.}$ oder $\beta = \text{konst.}$ bzw. als Kurven $\alpha = \text{konst.}$ und $\beta = \text{konst.}$ einer sinusoidalen Welle aufgefaßt werden können. *Joachim Nitsche.*

Birkhoff, Garrett and Jack Kotik: Note on the heat equation. Proc. Amer. math. Soc. 5, 162–167 (1954).

Gli AA. dimostrano, sotto ipotesi pochissimo restrittive, l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione della propagazione unidimensionale del calore, quando, all'istante iniziale, è assegnato, per ogni valore della coordinata x , la quantità di calore definita nel punto x e all'istante t dalla formula: $H(x, t) = \int_0^x u(x, t) dx$, dove $u(x, t)$ è la temperatura nel punto di ascissa x e all'istante t . *D. Graffi.*

Juncosa, M. L. and David Young: On the convergence of a solution of a difference equation to a solution of the equation of diffusion. Proc. Amer. math. Soc. 5, 168–174 (1954).

Gli AA. considerano l'equazione alle differenze, nelle variabili x, t , (che approssima l'equazione di propagazione unidimensionale del calore):

(1) $U_M(x, t + \Delta t) - U_M(x, t) = r \{ U_M(x + \Delta x, t) + U_M(x - \Delta x, t) - 2U_M(x, t) \}$ con $\Delta t = r, 1 \leq r$ e dimostrano che, per $r \leq \frac{1}{2}$ una opportuna soluzione di (1) converge alla classica soluzione dell'equazione del calore che si annulla, in ogni istante, negli estremi dell'intervallo in cui è definita. *D. Graffi.*

Lichnerowicz, A.: Équations de Laplace et espaces harmoniques. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17–19 déc. 1953, 9–23 (1954).

Ein leichtlesbares interessantes Referat über den gegenwärtigen Stand der

Theorie der harmonischen Räume, wobei über die Arbeiten von Copson, Lichnerowicz, Ruse, T. Y. Thomas, Titt, H. C. Wang und Willmore berichtet wird.

K. Maurin.

Duff, G. F. D.: On linear partial differential equations of the second order having geodesic solutions. Canadian J. Math. 6, 73–79 (1954).

A linear, non-parabolic partial differential equation of second order can be put into the form $(1) \Delta u + b \cdot \text{grad } u + c u = 0$ by introducing, in a natural way, a Riemannian metric in the space of independent variables. The metric is non-degenerate but not necessarily positive definite. In (1), Δ is the Laplacian operator in the Riemannian manifold, b is a contravariant vector and c is a function. Let $\Gamma(P, Q)$ be the square of the geodesic distance. In order that (1) admits solutions which are functions of Γ alone, $u(P) = F(\Gamma(P, Q))$, for variable P and any fixed Q , the following conditions are necessary: (1) $c = \text{constant}$, (2) $b = 0$, and (3) $\Delta \Gamma$ is itself a function of Γ , $\Delta \Gamma = f(\Gamma)$. When these conditions are satisfied, F can be obtained as solution of the ordinary differential equation: (11) $4\Gamma F'' + fF' + cF = 0$. It follows then that the solution of (11) with the proper singularity at $\Gamma = 0$, gives the elementary solution of (1). When the metric is positive definite, $\Gamma = s^2$, s real, the regular solution $F(s^2)$ is connected with the mean values of u in the same manner as in the Euclidean case. In the proofs essential use is made of the normal coordinates in the neighborhood of any point Q .

Y. W. Chen.

Minakshisundaram, S.: Eigenfunctions on Riemannian manifolds. J. Indian Math. Soc., n. Ser. 17, 159–165 (1954).

Let A be the Laplace operator on a connected, compact, orientable C^∞ Riemannian manifold, and let $\{\lambda_m\}$ and $q_m(x)$ be the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of A . The author discussed, jointly with Å. Pleijel [Canadian J. Math. 1, 242–256 (1949)], the behaviour of the Dirichlet series (i) $\sum_m \lambda_m^{-s} q_m(x) q_m(y)$ and (ii) $\sum_m \lambda_m^{-s} q_m(x)^2$ by generalizing Carleman's method (this Zbl. 17, 114). The results were applied, by the help of Ikehara's Tauberian theorem (this Zbl. 1, 129), to deduce asymptotic distributions of λ_m and of $q_m(x)$. In the present paper, the author devised an alternative and simplified proof for the asymptotic behaviour of (i) and (ii). It does not appeal to Carleman's analysis. Instead, the author uses the asymptotic behaviour at $t = -0$ of the fundamental solution (iii) $U(x, y, t) = \sum_m \exp(-\lambda_m t) q_m(x) q_m(y)$ of the heat equation $\frac{\partial}{\partial t} = A$. Starting with the parametrix for the heat equation, obtained in the above cited joint paper, the fundamental solution (iii) is constructed by the method of iteration [cf. the reviewer, Osaka Math. J. 5, 65–74 (1953)]. This procedure itself enables the author to obtain the above mentioned asymptotic behaviour of (iii) at $t = +0$.

K. Yosida.

Manaresi, Fabio: Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 163–213 (1954).

Für die Behandlung der partiellen Differentialgleichung $(\partial u_{xy})_{xy} + (p - \lambda q) u = 0$ ($\partial > 0, p \geq 0$) in einem Rechteck R der (x, y) -Ebene, mit vorgeschriebener Randbedingung $u = g$ auf ∂R , bedient sich Verf. einer Übersetzung des Problems in eine Integralgleichung ohne Benutzung der Greenschen Funktion, nach dem im Falle der gewöhnlichen Differentialgleichungen vom Ref. angegebenen Vorbild. Die Lösung für $\lambda = 0$ wird als Limes einer Minimalfolge des Funktional $I[u] = \int_R \{ \partial u_{xy}^2 - p u^2 \} dx dy$ gewonnen. Das Verfahren läßt sich auf den Fall der allgemeineren Gleichung

$$(0 u_{xy})_{xy} + (r u_x + s u_y)_x + (s u_x + t u_y)_y + p u = 0 \quad (r \geq 0, t \geq 0, r t - s^2 > 0)$$

ausdehnen. Die Eigenwerte von λ , wenn $g = 0$ ist, werden durch Minimum- und Maximum-Minimum-Eigenschaften nach einem klassischen Gedankengange definiert. G. Cimmino.

Levitán, B. M.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Gleichung $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 179–182 (1954) [Russisch].

Definitionen: D : der beschränkte, einfach zusammenhängende Bereich des k -dimensionalen Raumes ($k = 2, 3$); Γ : der Rand von D . $\lambda_1, \lambda_2, \dots$: Eigenwerte, $u_1(x), u_2(x), \dots$: Eigenfunk-

nationen des Problems:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \{\lambda - q(x)\} u = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_r = 0;$$

$q(x)$: stetig in $D + \Gamma$. Es werden — ohne Beweise — analoge Sätze über asymptotische Abschätzungen der Spektralfunktion ausgesprochen, wie in der vor kurzem erschienenen Abhandlung des Verf. für den Laplace-Operator (dies. Zbl. 50, 322). Aus den zahlreichen Ergebnissen Levitans heben wir beispielsweise eines hervor: Es sei $f(x) \in L^2(D)$, $c_i = \int_D f(x) u_i(x) dx$;

$$S_s(x; \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_i < \mu} \left(1 - \frac{\mu_i^2}{\mu^2}\right)^s c_i u_i(x), \quad \lambda_i = \mu_i^2; \quad S_s^*(x; \mu) = \int_D \theta_s^*(x, y; \mu) f(y) dy,$$

$$\theta_s^*(x, y; \mu) = \frac{2^{s-k/2}}{\pi^{k/2}} \cdot \frac{\mu^{k/2-s}}{r^{k/2+s}} \times J_{k/2+s}(\mu r),$$

J_ν : Besselsche Funktion, $r^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2$. Dann gilt gleichmäßig in D in jedem Unterbereich:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} [S_{1/2}(x, \mu) - S_{1/2}^*(x, \mu)] = 0.$$

Alle Ergebnisse gelten auch für unbeschränkte Gebiete; auch für den Operator $\sum_{i,j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + (c(x) + \lambda) u = 0$ läßt sich ein ähnlicher Satz aussprechen.

K. Maurin.

Pleijel, Ake: A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes. Ark. Mat. 2, 553—569 (1954).

Let λ_ν and $\varphi_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) be the eigenvalues and eigenfunctions of the equation (1) $\Delta u + \lambda u = 0$ in the two-dimensional domain V with Dirichlet's (2) ($u = 0$) or Neumann's (3) ($\partial u / \partial n = 0$) conditions on the boundary S . Let further $G(x_1, x_2; -\kappa^2) = K_0(\kappa r) / 2\pi - \gamma(x_1, x_2, \kappa)$, where K_0 means the modified Bessel function, r the distance between the points x_1 and x_2 in the domain V , be the Green's function corresponding to the conditions (1) and (2) resp. (1) and (3) of the equation $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ ($\kappa_0 = \text{const} > 0$). — As a continuation of the investigations by T. Carleman (this Zbl. 12, 70) the author establishes asymptotic formulas of $\gamma(x_1, x_2, \kappa)$ (when $\kappa \rightarrow \infty$ and x_1, x_2 valid in the domain V and on the boundary S), of the series $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(x)}{(\lambda_\nu + \kappa_0^2)(\lambda_\nu + \kappa^2)}$ and $\sum_{\lambda_\nu = t}^{\infty} \varphi_\nu^2(x)$, when $t \rightarrow +\infty$ and x on the boundary S .

Furthermore the author obtains an improvement of Carleman's expression of the series $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^{-2}$. There are some smaller misprints in the paper.

R. Gran Olsson.

Szegő, G.: Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area. J. rat. Mech. Analysis 3, 343—356 (1954).

Es sei D ein von einer einzelnen analytischen Kurve C in der komplexen $z = x + iy$ -Ebene berandeter Bereich vom Flächeninhalt A ; es seien bei der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in D bei der Randbedingung $u = 0$ auf C die Eigenwerte $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ und bei der Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$ auf C die Eigenwerte $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$. Ist $p = 1,8412\dots$ die kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion $J_1(r)$, so vermuteten Kornhauser-Stakgold (dies. Zbl. 46, 323) die Ungleichung (1) $\mu_2 \leq p(A\pi)^{1/2}$, wobei das Gleichheitszeichen für Kreiskreise steht. Ein Beweis von Pólya (dies. Zbl. 46, 324) liefert $\mu_2 \leq 2(A\pi)^{-1/2}$. Verf. beweist (1) durch Zurückführung des allgemeinen Falles auf spezielle Fälle, von denen der erste der eines bei der Drehung $z' = z e^{2\pi i m}$ (m ganzzahlig $\neq 1$) invariant bleibenden Bereiches ist und für den (1) aus der Minimeigenschaft $\mu_2^2 = \text{Min} \left(\int_D |\text{grad } u|^2 d\sigma \middle| \int_D u^2 d\sigma \right)$ mit der Neben-

bedingung $\int_D u d\sigma = 0$ folgt, wenn man als Vergleichsfunktion u die Eigenfunktionen des

Kreisbereiches $J_1(pr) \cos q$ bzw. $J_1(pr) \sin q$ einsetzt (r, q Polarkoordinaten, $d\sigma$ Flächenelement in D). Am Schluß werden für „nahezu kreisförmige“ Bereiche mit der Randkurve

$r = 1 + \varrho(\varphi) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$ die Entwicklungen von $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3$ und die einfacher ausfallenden Entwicklungen von $(\lambda_2 + \lambda_3)^{-2}$ und $(\mu_2 + \mu_3)^{-2}$ nach den Fourierkoeffizienten c_n angegeben. Als Beispiel sei genannt:

$$\frac{1}{2k} (\lambda_2 + \lambda_3) = 1 - c_0 + c_0^2 + |c_2|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \neq \pm 1} \left(1 + \frac{2k J'_n(k)}{J_n(k)} \right) |c_{n-1}|^2,$$

wobei die Summe über $n = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$ zu erstrecken und $k = 3,83 \dots$ die kleinste positive Wurzel von $J_1(r)$ ist. *L. Collatz.*

Walsh, J. L. and David Young: On the degree of convergence of solutions of difference equations to the solution of the Dirichlet problem. *J. Math. Physics* 33, 80—93 (1954).

Verf. greifen als typischen Fall für die Konvergenzverhältnisse beim Differenzenverfahren die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für ein Quadrat der Länge 1 heraus. Es seien für $u(x, y)$ auf einer Quadratseite ($y = 0, 0 \leq x \leq 1$) die Werte $f(x)$, auf den anderen drei Seiten mit $y > 0$ die Werte 0 vorgegeben. Die Lösung läßt sich mit Hilfe der Fourierkoeffizienten $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ in Reihengestalt angeben und die Lösungen $u_A(x, y)$ des

Differenzenverfahrens bei der Maschenweite $h = 1/A$ ebenfalls, und ermöglichen so einen Vergleich. Es sei $E(A, y_0) = \limsup u_A(x, y) - u(x, y)$, gebildet für alle Gitterpunkte mit $0 \leq x \leq 1, y_0 \leq y \leq 1$. Die entsprechende Größenordnung von E hängt von den Eigenschaften der Randwerte $f(x)$ ab. Wenn die a_n eine Abschätzung $a_n \leq K n^\gamma$ zulassen, ist $E = O(h^\gamma)$ für $\gamma \geq 2$ und $E = O(h^2)$ für $\gamma = 2$. Ist $f(x)$ stückweise konstant, so ist $E = O(h^2)$, wenn alle Sprungstellen Gitterpunkte sind, sonst ist $E = O(h)$. Es folgen einige weitere Sätze, z. B.: Ist f stetig mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$, so ist $E = O(\omega(h))$. Sehr wichtig ist: Es sei $f(x)$ stetig, f' existiere mit Ausnahme endlich vieler Punkte und sei von beschränkter Schwankung; dann ist $E = O(h^2)$. Unter alleiniger Voraussetzung der Stetigkeit von f lassen sich Beispiele mit beliebig klein vorgegebenem Konvergenzgrad konstruieren. *L. Collatz.*

Fenyő, Stefan: Über das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel. *Publ. math., Debrecen* 3, 71—80 (1954).

Das Titelproblem zielt auf die Angabe jener Eigenschaften der Randfunktion, gegeben auf der Oberfläche, bei welchen sich die Lösung als Potential einer einfachen Belegung ergibt. Die Antwort erfolgt durch notwendige und hinreichende Bedingungen für die Fourierkoeffizienten der Randfunktion, wenn diese entwickelt wird nach dem Orthonormalsystem von Kugeloberflächenfunktionen $S_{n,k}(\vartheta, \varphi)$ ($k \leq 2n+1$; $n = 0, 1, \dots$). *G. Hoheisel.*

Brelot, M.: La théorie moderne du potentiel. *Ann. Inst. Fourier* 4, 113—140 (1954).

Revue des travaux récents sur la théorie du potentiel et le problème de Dirichlet. Une abondante bibliographie est donnée. *J. Deny.*

Garabedian, P. R. and M. Schiffer: On estimation of electrostatic capacity. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 206—211 (1954).

Die Änderung der Kapazität γ bei Abänderung des Bereiches wird mit Hilfe der Greenschen Funktion nach der Hadamardschen Formel gegeben [vgl. Garabedian und Schiffer, *J. Analyse math.* 2, 281—368 (1953)], ebenso die Änderung von $\gamma^{1/3}$ (V Volumen) und verschiedene Bemerkungen. *H. Hornich.*

Bertolini, Fernando: Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. I. *Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 15, 368—375 (1954).

Für einen ebenen einfach zusammenhängenden Bereich D mit genügend regulärem Rand fragt Verf. nach der Existenz einer zu einer genau definierten Klasse gehörigen im Innern des Bereichs harmonischen Funktion, die, ebenso wie ihre Normalableitung, auf einer aus einer endlichen Anzahl von Bögen bestehenden Teilmenge C' des Randes vorgeschriebene Werte annimmt. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung dieses Problems (DC'') an unter Aufstellung expliziter Formeln für die Lösung, sei es in Form eines über den gesamten Rand von D erstreckten Integrals, sei es als Limes einer Folge von nur über C' erstreckten Integralen. Hierbei treten vollständige Vektorfolgen auf, für die Beispiele von allgemeiner Anwendbarkeit gegeben werden. Das Problem (DC'') für mehrfach zusammenhängende Bereiche kann auf zwei derartige Probleme in je einem einfach zusammenhängenden Bereich zurückgeführt werden. Analoge Untersuchungen im n -dimensionalen Raum werden in Aussicht gestellt. *M. J. De Schwarz.*

Serman, D. I.: Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 25—28 (1954) [Russisch].

Zwei in einem Gebiet der (x, y) -Ebene harmonische Funktionen u, v sind gesucht, die auf der glatten Randkurve S den Bedingungen

$$u_x - v_y + a_{11}u + a_{12}v = f_1, \quad u_y + v_x + a_{21}u + a_{22}v = f_2$$

genügen (a_{ik}, f_i bekannte Funktionen auf S). Im Falle $c^2 = (a_{11} + a_{22})^2 + (a_{12} - a_{21})^2 > 0$ stellt Verf. durch einen Doppelbelegungssatz für u, v zwei Integralgleichungen vom Cauchyschen Typus für die Belegungsfunktionen auf. Bei $c = 0$ ergeben sich für letztere hingegen Integralgleichungen mit Kernen, die Singularitäten von 2. Ordnung aufweisen.

Joachim Nitsche.

Myrberg, Lauri: Über die Integration der Poissonschen Gleichung in einem Kreis. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **167**, 20 S. (1954).

Verf. löst die Poissonsche Gleichung $\Delta u = \varrho(z)$ für beliebig gegebenes, stetig differenzierbares ϱ in der euklidischen Ebene $z = \infty$ bzw. dem Einheitskreis $|z| < 1$. Es wird ein Verfahren mit Konvergenz erzeugenden Summanden verwendet, das demjenigen von Weierstrass zur Konstruktion ganzer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellen analog ist. Auch die Ergebnisse weisen gewisse Analogien mit bekannten Resultaten über den Betrag von ganzen bzw. meromorphen Funktionen $w(z)$ auf, was durchaus plausibel ist, da die Myrbergsche Lösung aus dem logarithmischen Potential $\log |w(z)|$ durch einen „Verschmierungsprozeß“ hervorgeht. In diesem Zusammenhang ist auch auf die Untersuchung von M. Brelot (dies. Zbl. **36**, 69) über subharmonische Funktionen in der Ebene hinzuweisen.

A. Pfluger.

Walsh, J. L.: An interpolation problem for harmonic functions. Amer. J. Math. **76**, 259—272 (1954).

Verf. zeigt, daß die von verschiedenen Autoren zur Untersuchung der für $|z| < 1$ regulär analytischen Interpolationsfunktionen $f(z)$, welche der Bedingung $\int_{|z|=1} |f(z)|^2 |dz| < \infty$ genügen, entwickelten Extremalmethoden und die Theorie der Kernfunktion auch zur Untersuchung der Interpolation durch reelle Funktionen

$$u(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (z = r e^{i\theta}),$$

sich anwenden lassen, welche für $|z| < 1$ harmonisch sind und der Bedingung $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [u(e^{i\theta})]^2 d\theta = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ genügen.

V. Paatero.

Variationsrechnung:

Picone, Mauro: Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 283—296 (1954).

Picone, Mauro: Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **4**, 137—176 (1954).

Der Verf. stellt notwendige Bedingungen für ein Extrem eines einfachen Integrals auf, die auch am Rande des Bereichs der zulässigen Funktionen Geltung haben. Er behandelt der Reihe nach die Fälle:

$$\int_a^b f(x, y, y') dx, \quad \int_a^b f(x, y, y' \dots y^{(n+1)}) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x, y_i, y'_i \dots y_i^{(n+1)}) dx.$$

Wegen der Neuartigkeit der Methode und der Wichtigkeit der Ergebnisse soll über den ersten Fall ausführlicher berichtet werden. f sei in einer abgeschlossenen Menge E des (x, y, y') -Raumes stetig, die Menge I der zulässigen Kurven C besteht aus stückweise glatten Bögen, für die $[x, y(x), y'(x)]$ stets in E liegt. Als innerer Teilbogen von C wird ein durch $\alpha \leq x \leq \beta$ definiertes Stück von C bezeichnet, wenn alle durch „ $y = y(x) + z(x)$ “ in $\alpha \leq x \leq \beta$, $y = y(x)$

sonst, wo $z(\alpha) = z(\beta) = 0$, z in $[\alpha, \beta]$ stückweise glatt, $|z| \leq \varrho$, $|z| \leq \varrho_1$ definierten Kurven zu Γ gehören. Als innere Punkte von Γ werden die inneren Punkte innerer Bögen bezeichnet, alle anderen heißen Randpunkte von Γ . Die aufzustellenden Bedingungen für das durch einen Bogen C zu liefernde Extrem beziehen sich auf eine Kategorie von Punkten, die vom Verf. als „ x -fache Konzentrationspunkte mit den Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_v, p_1, \dots, p_v, p$ ($p_v > 0, p > 0$)“ bezeichnet werden. Sie sind so definiert: C wird rechts von x_0 einem Streckenzug ersetzt, der von $x_0, y(x_0)$ ausgehend, über aneinanderschließenden Intervallen der Länge $\varepsilon p_1, \dots, \varepsilon p_v$ jeweils mit den Steigungen $\lambda_1, \dots, \lambda_v$ verläuft und durch eine über einem Intervall der Länge εp stehende Strecke derartig abgeschlossen wird, daß sein Endpunkt mit dem Kurvenpunkt

$$x_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^v p_k + \varepsilon p, y(x_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^v p_k + \varepsilon p)$$

zusammenfällt. Wenn für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ die derartig variierten Kurven sämtlich zu Γ gehören, so heißt x_0 rechtseitiger Konzentrationspunkt mit den Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_v, p_1, \dots, p_v, p$. Analog ist der linksseitige K. P. zu definieren. Eine naheliegende Betrachtung ergibt dann für jeden rechtseitigen K. P. einer ein Minimum liefernden Kurve das Bestehen einer Ungleichung, die am einfachsten so formuliert werden kann: Betrachtet man die Kurve $Y = f(x_0, y(x_0), X) = \Phi(X)$ und bringt in den Punkten $\lambda_i, \Phi(\lambda_i)$ Massen von der Größe p_i an, ferner im Punkt

$$X = \lambda_{v+1} = y'(x_0^+) - \sum_{k=1}^v \frac{p_k}{p} [\lambda_k - y'(x_0^+)], \quad Y = \Phi(\lambda_{v+1})$$

die Masse p , so muß der Schwerpunkt dieser Massenpunkte, für den $X = y'(x_0^+)$ ist, oberhalb $\Phi[y'(x_0^+)]$ liegen. Für einen linksseitigen K. P. ist in dieser Bedingung $y'(x_0^+)$ durch $y'(x_0^-)$ zu ersetzen. Ich nenne diese Ungleichung im folgenden kurz die „Hauptbedingung“. Punkte, die der Hauptbedingung genügen, heißen Minimalpunkte für die Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_v, p_1, \dots, p_v, p$. Notwendig für ein Minimum ist demnach, daß jeder Konzentrationspunkt der Kurve Minimalpunkt zu den gleichen Parameterwerten ist. Weiterhin wird nur der Fall $v = 1$ in Betracht gezogen; p_1 kann dann $= 1$ gesetzt werden, so daß nur zwei Parameter p (erster Par.) und λ (zweiter Par.) vorkommen. Es wird dann bewiesen, daß ein innerer Punkt eines Teilbogens von C , der zugleich Innenpunkt von Γ ist, für genügend kleines $\varrho > 0$ stets beiderseitiger K. P. für $p \geq 1$ und $\lambda - y(x_0^+) \leq \varrho$ ist. Entsprechendes gilt für die Endpunkte von C , die natürlich nur einseitige K. P. sind. Ein weiteres Ergebnis ist die Aufstellung einer Bedingung für Γ , die zur Folge hat, daß alle Punkte einer das Minimum liefernden Kurve Minimalpunkte sein müssen. Sie besteht der Hauptsache nach darin, daß E ein beiderseits unbegrenzter Zylinder über einem konvexen Bereich D der (x, y) -Ebene ist und Γ aus allen stückweise glatten Kurven besteht, deren Anfangs- bzw. Endpunkte auf zwei vorgegebenen Teilmengen von D liegen. Aus der Hauptbedingung ergeben sich die Bedingungen von Legendre und Weierstrass unter neuen Voraussetzungen. Ist z. B. ein Punkt Minimalpunkt für einen beliebigen Wert p des zweiten Parameters und für alle Werte von λ einer rechtseitigen Umgebung vom Radius r von $y'(x_0^+)$, existiert ferner $f_{y'}$ in einer rechtseitigen Umgebung vom Radius $r p$ und $f_{y' y'}$ für $y' = y'(x_0^+)$, so ist $f_{y' y'} \geq 0$. Es genügen auch die entsprechenden Bedingungen für linksseitige Umgebung. Wird von x_0 vorausgesetzt, daß er Minimalpunkt für ein festes λ und alle genügend großen p ist, und existiert $f_{y'}$ für $y' = y'(x_0^+)$, so gilt $E[x_0, y(x_0), y'(x_0^+), \lambda] \geq 0$. Eine weitere Bedingung erhält man durch die Forderung, es solle die Minimalpunkteigenschaft für ein festes λ und alle genügend kleinen p gelten; aus ihr lassen sich besonders dann wichtige Folgerungen ableiten, wenn f mit y' unendlich wird. So erhält man für das klassische Problem $f = g(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$ das Ergebnis, daß in allen Minimalpunkten $g \geq 0$ sein muß. Ein anderes Resultat lautet: gilt für einen festen Punkt (x_0, y_0)

$$(*) \quad |f(x_0, y_0, y')| < M [1 + |y'|^\alpha], \quad 0 < \alpha < 1,$$

und ist dieser ein Minimalpunkt für $\lambda = \lambda_0$ und beliebig kleine p , so folgt $f(x_0, y_0, \lambda_0), z f[x_0, y_0, y'(x_0^+)]$. Unter geeigneten weiteren Voraussetzungen kann man aus dem Erfülltsein von $(*)$ für alle Punkte von E schließen, daß eine Extremale nur dann ein Extrem liefern kann, wenn für sie die beiden Gleichungen $f_y = 0, f_{y'} = 0$ gelten. Besitzen diese keine gemeinsame Lösung, so muß das Extrem unter solchen Kurven gesucht werden, deren Punkte sämtlich Randpunkte von Γ sind. So sind z. B. bei der Aufgabe mit $f = g(x, y) (1 + y'^2)^\beta, 0 < \beta \leq 1/2$, nur Strecken parallel zur x -Achse geeignet, ein Minimum zu liefern. — Die entsprechenden Entwicklungen für Probleme mit Ableitungen bis zur Ordnung $n + 1$ verlaufen analog; die Definition der Konzentrationspunkte wird dadurch verwickelter, daß Stetigkeit der n -ten Ableitungen gefordert werden muß, was Interpolation durch Polynome höheren Grades erfordert. Die Hauptbedingung läßt sich dann nicht so wie oben massengeometrisch interpretieren. Auch hier ergeben sich neue Gesichtspunkte für die Bedingungen von Legendre und Weierstrass sowie Aussagen über Aufgaben mit $|f| < M [1 + |y'|^{n+1, \alpha}], 0 < \alpha < 1/(n+1)$. Die Ausdehnung auf Probleme mit mehreren Funktionen y_i bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten und wird in den Hauptzügen kurz auseinandergesetzt.

J. Radon.

Krull, Wolfgang: Zur Variationsrechnung. Arch. der Math. 5, 81—91 (1954).

Verf. bezeichnet im Sinne von Carathéodory den offenen Bogen $x_i(t)$ als Minimumsbogen, wenn jede Stelle t_0 desselben in einem Teilbogen $[t_1, t_2]$ enthalten ist, der das Integral $\int_{t_1}^{t_2} L(t, x_i, x'_i) dt$ in bezug auf eine engere Nachbarschaft zum

Minimum macht. Er kann dann auf „elementarem“ Wege, d. h. ohne Feldtheorie beweisen, daß $x_i(t)$ sicher ein Minimumsbogen ist, wenn die $x_i(t)$ den Eulerschen Gleichungen genügen und wenn außerdem die quadratische Form $L''_{x_i, x'_k} \xi_i \xi_k$ überall positiv definit ist, und dehnt diesen Beweis auch auf den Fall von m unabhängigen Variablen aus. Die entsprechende notwendige Bedingung, bei der an Stelle der positiven Definitheit die Semidefinitheit der quadratischen Form tritt, kann dagegen — bekanntlich — nicht auf den Fall $m > 1, n > 1$ verallgemeinert werden, aber Verf. formuliert auf ähnlich elementarem Wege eine Bedingung, unter der die positive Semidefinitheit notwendig ist. M. J. De Schwarz.

Cooperman, Philip: On a variational problem having a third order differential equation as a necessary condition for an extremum. Proc. Amer. math. Soc. 5, 309—310 (1954).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germay, R. H.: Sur les systèmes d'équations intégrro-différentielles récurrentes de forme normale dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 68, 5—12 (1954).

Facile estensione di una precedente ricerca dell'A. (questo Zbl. 51, 334).

G. Cimmino.

Plis, A.: A uniqueness theorem for the solution of a family of hyperbolic integro-differential equations. Ann. Polon. math. 1, 135—137 (1954).

Für die von Wazewski [Bull. Acad. Polon. Sci. (I. III) 1, 79—82 (1953)] behandelte Integrodifferentialgleichung der schwingenden Saite wird die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, wenn als Anfangsbedingung die unbekannte Funktion sowie deren Ableitung nach t für $t = 0$ einmal differenzierbar als Funktion von s gegeben ist. C. Heinz.

Hellsten, Ulf: The reality of the eigenvalues of certain integral equations. Ark. Mat. 3, 79—87 (1954).

In der Integralgleichung $q(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) q(y) dy$ soll der Kern $K(x, y)$ in dem Quadrat $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ oberhalb einer Kurve verschwinden und unterhalb gleich $P(x)Q(y)$ sein. Unter gewissen Voraussetzungen über die Kurve wird gezeigt, daß die Eigenwerte reell und positiv sind, wenn $P(x)Q(x) \geq 0$ ist. G. Doetsch.

Wall, H. S.: Concerning harmonic matrices. Arch. der Math. 5, 160—167 (1954).

An $n \times n$ matrix M is called harmonic if M_{ij} is a complex-valued function from the ordered pairs x, y of real numbers which, for each y , is continuous and of bounded variation in x on every interval, for each x is continuous in y , and, for each ordered triple x, y, z of real numbers, (A) $M(x, y) \cdot M(y, z) = M(x, z)$ and $M(x, x) = I$. This paper is concerned with a characterization of the matrix solution

M of the Stieltjes integral equation $M(x, y) = I + \int_x^y dF(s) \cdot M(s, y)$, where F is an $n \times n$ matrix, or a suitably bounded infinite matrix, of complex-valued functions from the real numbers, continuous, and of bounded variation on every interval. The characteristic properties of these matrices are given by (A). E. Frank.

Wuyts, P.: On the convergence-abscissa of a Laplace integral. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. **2**, 1–27 (1954).

In Verallgemeinerung der Formel für die Konvergenzabszisse β eines Laplace-Integrals $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$: $\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left| \int_0^t F(u) du \right|$ für $\beta \geq 0$ wird bewiesen: Es sei $g(t)$ eine reelle Funktion mit $B = \lim_{t \rightarrow \infty} | -g'(t) | < +\infty$, und es werde gesetzt

$$L = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left| e^{-g(t)} \int_0^t e^{g(u)} F(u) du \right|.$$

Wenn entweder $g'(t) = O(e^{ht})$ ($h > 0$ beliebig klein) oder $g(t) = O_R(t)$ ist, so gilt $\beta = L$, vorausgesetzt, daß $\beta \geq B$ oder $L > B$ ist. — Ähnliche Sätze werden in Verallgemeinerung der für negatives bzw. beliebiges β bekannten Sätze bewiesen.

G. Doetsch.

Peyerimhoff, Alexander: Über das Anwachsen der C_∞ -Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden. *Math. Ann.* **128**, 138–143 (1954).

Ist ein Laplace-Integral $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} q(t) dt$ für $\Re s = \sigma > \beta_\infty$ C_∞ -summierbar ($\infty \geq 0$), so gilt für die Lindelöfsche μ -Funktion von $f(s)$: $\mu(\sigma) \leq \infty + 1$. Durch Konstruktion von Beispielen zeigte F. Jansson [*Ark. Mat. Astr. Fys.* **15**, Nr. 6 (1921)] für $\infty = 0$ und $\infty = 1$. E. Hille (dies. Zbl. **51**, 335) für beliebiges ganzzahliges ∞ , daß die Schranke $\infty + 1$ erreicht werden kann. Verf. zeigt dasselbe für beliebiges $\infty \geq 0$ durch Angabe von Funktionenräumen, in denen solche $q(t)$ vorkommen müssen, deren $f(s)$ sogar die Bedingung $f(\sigma + i\tau) = O(1) \tau^{\infty+1}/\eta(\tau)$ für $\tau \rightarrow \infty$ und alle rationalen $\sigma > 0$ erfüllt, wo $\eta(\tau)$ eine unbeschränkte Funktion ist. Das Analoge ergibt sich auch für Dirichletsche Reihen.

G. Doetsch.

Rao, S. K. Lakshmana: On the evaluation of Dirichlet's integral. *Amer. math. Month y* **61**, 411–413 (1954).

Das Integral $\int \cdots \int x_1^{x_2-1} \cdots x_{n-1}^{x_n-1} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^{x_n-1} dx_1 \cdots dx_n$, erstreckt über den Bereich $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \cdots + x_n \leq 1$ kann als Wert des Faltungsintegrals $x_1^{x_2-1} * \cdots * x_{n-1}^{x_n-1}$ für $x = 1$ aufgefaßt und infolgedessen auf Grund des Faltungssatzes der Laplace-Transformation leicht berechnet werden.

G. Doetsch.

Rooney, P. G.: An inversion and representation theory for the Laplace integral of abstractly-valued functions. *Canadian J. Math.* **6**, 190–209 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **47**, 348) hat Verf. eine Umkehrungs- und Darstellbarkeitstheorie für das klassische Laplace-Integral mittels des Operators

$$\mathfrak{L}_{\kappa, \tau} [f(\lambda)] = (\kappa e^{2\kappa/\pi\tau}) \int_0^\infty \eta^{-1/2} \cos(2\kappa \eta^{1/2}) f(\kappa(\eta+1)/\tau) d\eta$$

entwickelt. Diese Theorie wird auf den Fall übertragen, daß die Laplace-Transformation auf eine Funktion einer reellen oder komplexen Variablen angewendet wird, deren Werte in einem abstrakten Banachschen Raum liegen. *G. Doetsch.*

Hull, T. E. and W. A. Wolfe: On inverting Laplace transforms of the form $h(s)/(p(s) + q(s)e^{-\tau s})$. *Canadian J. Phys.* **32**, 72–80 (1954).

In der Theorie der Geigerzähler tritt die Laplace-Transformierte $u(s) = a[s(s+a - a e^{-\tau s})]$ auf, zu der die Originalfunktion $U(t)$ zu bestimmen ist. Entwickelt man $u(s)$ nach Potenzen von $e^{-\tau s}$ und übersetzt gliedweise, so erhält man für $U(t)$ eine Reihe mit $[t\tau]$ Gliedern, die praktisch nur dann brauchbar ist, wenn t von der Größenordnung von τ ist. Da bei den Geigerzählern aber gerade solche t interessieren, die groß gegenüber τ sind, wird statt dessen die Tatsache benutzt,

daß $U(t)$ der Integralgleichung $U(t) = at - a \int_0^{\min(t, \tau)} U(t-v) dv$ genügt (was sich leicht aus der Darstellung von $u(s)$ ergibt). Die Lösung dieser Integralgleichung durch sukzessive Approximation ergibt brauchbare Werte für $U(t)$. Diese Methode läßt sich auf Funktionen der Gestalt $h(s)/(p(s) + q(s)e^{-\tau s})$ verallgemeinern, wo $p(s)$ und $q(s)$ Polynome sind (Grad von p größer als der von q) und $h(s)$ hinlänglich einfachen Charakter hat.

G. Doetsch.

Ward, E. E.: The calculation of transients in dynamical systems. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 49—59 (1954).

Durchführung praktischer Beispiele für die Umkehrung der Laplace-Transformation vermittelt der Korrespondenz zwischen Laguerreschen Funktionen und gewissen gebrochen rationalen Funktionen.

G. Doetsch.

Poli, L.: Quelques images symboliques. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 68, 13—22 (1954).

Eine Formelsammlung von Laplace-Transformierten wird mitgeteilt. Im ersten Teil werden rechnerische Regeln, im zweiten die Transformaten von speziellen Funktionen angeführt. Die Arbeit ist zu betrachten als eine Ergänzung der bekannten Formelsammlungen des symbolischen Rechnens von McLachlan-Humbert, dies. Zbl. 39, 328, und McLachlan-Humbert-Poli, dies. Zbl. 39, 328. St. Fenyö.

Doetsch, Gustav: L'application de la transformation bidimensionnelle de Laplace dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Centre Belge Rech. math., Colloque équations aux dérivées partielles, Louvain 17—19 déc. 1953, 63—78 (1954).

Die Abhandlung referiert über die Anwendung der zweiseitigen Laplace-Transformation. Es wird hier im wesentlichen wiedergegeben der Inhalt der §§: 1, 8, 9, 10 der Monographie von R. Voelker und G. Doetsch, dies. Zbl. 40, 59. K. Maurin.

Delerue, Paul: Sur l'application du calcul symbolique à deux variables au calcul d'intégrales simples. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1686—1688 (1954).

Wenn im zweidimensionalen symbolischen Kalkül die Funktion $F(x, y)$ das Abbild $f(p, q)$ hat, so gehört im eindimensionalen Kalkül zu $f(p, p)$ p das Original (*)
$$\int_0^x F(x-s, s) ds = 2x \int_0^{\pi/2} F(x \cos^2 q, x \sin^2 q) \sin q \cos q dq.$$
 Wenn man das Original zu $f(p, p)/p$ anderweitig bestimmen kann, so hat man damit das Integral (*) ausgerechnet. Dies wird auf verschiedene spezielle Beispiele angewendet.

G. Doetsch.

Churchill, R. V. and C. L. Dolph: Inverse transforms of products of Legendre transforms. Proc. Amer. math. Soc. 5, 93—100 (1954).

Bei den Anwendungen der Legendre-Transformation

$$T\{F(x)\} = \int_{-1}^{+1} F(x) P_n(x) dx = f(n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

auf Randwertprobleme ist bisher nur das Differentiationsgesetz

$$T\{(d/dx)[(1-x^2)dF/dx]\} = -n(n+1)f(n)$$

benutzt werden. Für die Rücktransformation der im Bildraum gefundenen Lösung in den Originalraum ist es jedoch vorteilhaft, einen „Faltungssatz“ zu besitzen, der angibt, welche Originalfunktion (Faltung) dem Produkt zweier Bildfunktionen $f(n)$ und $g(n)$ entspricht. Die Faltung wird in fünf verschiedenen Gestalten angegeben, von denen die folgende erwähnt sei:

$$H(x) = \frac{1}{\pi} \iint_{E(x)} F(y) G(z) (1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz)^{-1/2} dy dz,$$

wo $E(x)$ das Innere der Ellipse $y^2 + z^2 - 2xyz = 1 - x^2$ (x fest zwischen -1 und $+1$) ist.

G. Doetsch.

Churchill, R. V.: The operational calculus of Legendre transforms. *J. Math. Physics* **33**, 165—178 (1954).

Verf. entwickelt ein Analogon zur üblichen Operatorenrechnung unter Zugrundelegung der Legendre-Transformation (an Stelle der Laplace- oder Fourier-Transformation). Die Legendre-

Transformation $f(n) = \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) dx = T\{F\}$ (P_n = Legendresches Polynom, $n = 0, 1, \dots$)

hat die Eigenschaft, den speziellen Differentiationsoperator $R[F] = (d/dx) \{(1-x^2) dF(x)/dx\}$ zu „algebraisieren“: $T\{R[F]\} = -n(n+1)f(n)$. Diese Eigenschaft, verbunden mit dem vom Verf. und C. L. Dolph früher (vorsteh. Referat) bewiesenen Faltungssatz und einigen weiteren Gesetzen, gestattet es, partielle Differentialgleichungen, denen der Operator R zugrunde liegt, elegant zu lösen, so z. B. die Potentialgleichung für die Kugel $r(rV)_{rr} + [(1-x^2)V_x]_x = 0$ ($x = \cos \theta$, V von der dritten Polarkoordinate q unabhängig) unter Randbedingungen erster, zweiter und dritter Art. Es ist eine Tabelle von 11 Originalfunktionen mit ihren zugehörigen Bildfunktionen beigegeben, die die Rücktransformation der im Bildraum gefundenen Lösung erleichtert.
G. Doetsch.

Söhngen, Heinz: Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation. *Math. Z.* **60**, 31—51 (1954).

Es wird eine Integraltransformation aufgestellt, welche die Anwendung der endlichen

Hilbert-Transformation $\mathfrak{H}\{F\} = \text{V. P.} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$ ($-1 < x < 1$) in eine Multiplikation

übersetzt (ähnlich wie die Laplace-Transformation die Differentiation in eine Multiplikation verwandelt). Dies leistet die Transformation $\mathfrak{Z}\{F\} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^s F(x) dx = f(s)$, die durch die

Substitution $(1-x)(1+x) = e^{-\pi s}$ mit der zweiseitigen Laplace-Transformation zusammenhängt. Es gilt: Ist $F(x) \in L^p$ ($p > 1$), so ist $\mathfrak{Z}\{\mathfrak{H}\{F\}\} = f(s) \cdot \cotg \pi s = f(0)/\sin \pi s$ für $\Re s < 1 - 1/p$. Es existiert auch ein Analogon zum Faltungssatz der Laplace-Transformation:

Ist $F(x) \in L^1$, $G(x) \in L^p$ ($p > 1$) und wird $H(x) = \int_{-1}^1 \frac{1-\xi^2}{(1-x\xi)^2} G\left(\frac{x-\xi}{1-x\xi}\right) F(\xi) d\xi$ gesetzt,

so gehört $H(x)$ jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ an, und es ist $\mathfrak{Z}\{H\} = \mathfrak{Z}\{F\} \cdot \mathfrak{Z}\{G\}$ für $\Re s < 1 - 1/p$. Vermittels dieser Sätze läßt sich die Umkehrung der Hilbert-Transformation unter allgemeineren Voraussetzungen, als bisher bekannt, bewerkstelligen und auch die vollständige Lösung der Integralgleichung $F(x) + k \mathfrak{H}\{F\} = G(x)$ angeben. Als Beispiel wird die exakte Lösung des Integralgleichungssystems $V(x) = -\varepsilon \mathfrak{H}\{H\}$, $H(x) = \varepsilon k + \varepsilon \mathfrak{H}\{V\}$ abgeleitet, das bei der Bodenpressung einer Staumauer auftritt und für das bisher nur Näherungslösungen bekannt waren.
G. Doetsch.

Sears, D. B.: Integral transforms and eigenfunction theory. *Quart. J. Math.* Oxford II. Ser. **5**, 47—58 (1954).

Wenn $k(t)$ eine nichtabnehmende, bei $t = 0$ stetige Funktion mit $k(0) = 0$ ist, so wird mit \mathfrak{Q}^2 der Raum der Funktionen F bezeichnet, für die $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dk(t) < \infty$ ist. Eine reelle

stetige Funktion $q(x, w)$ definiert die Kerne $\varrho(x, t) = \int_0^x q(y, t) dy$, $\chi(x, w) = \int_0^w q(x, t) dk(t)$.

Damit die Gleichungen

$$\int_0^w F(t) dk(t) = \int_0^{\infty} f(x) \chi(x, w) dx, \quad \int_0^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varrho(x, t) dk(t)$$

eine Transformation $Tf = F$ und ihre Umkehrung definieren, die unitär von $L^2(0, \infty)$ zu \mathfrak{Q}^2 ist, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x, t) \varrho(y, t) dk(t) = \min(x, y), \quad \int_0^{\infty} \chi(x, w) \chi(x, w') dx = k(w, w'),$$

wo $k(w, w')$ bedeutet: $k(W + 0)$, wenn $W = \min(w, w') > 0$; null, wenn w und w' entgegengesetzte Vorzeichen haben; $-k(W' + 0)$, wenn $W' = \max(w, w') < 0$. — Da bekanntlich eine Funktion $k(t)$ und somit ein Raum \mathfrak{Q}^2 einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung unter geeigneten Randbedingungen im singulären Fall zugeordnet werden kann, so läßt sich die

Parsevalsche Relation und der Entwicklungssatz für eine solche Gleichung aus der Theorie der obigen Transformation ableiten. G. Doetsch.

Lukaes, Eugene and Otto Szász: Certain Fourier transforms of distributions.
II. Canadian J. Math. 6, 186—189 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 114) haben Verff. eine notwendige Bedingung dafür angegeben, daß das Reziproke eines Polynoms (ohne mehrfache Nullstellen) eine charakteristische Funktion (Fourier-Transformierte einer Verteilungsfunktion) ist. Es wird gezeigt, daß sich mit derselben Methode weitere notwendige Bedingungen ableiten lassen, z. B.: Es sei a der imaginäre Teil derjenigen Pole der rationalen Funktion $\varphi(t)$, die der reellen Achse in der oberen Halbebene am nächsten liegen. Wenn $\varphi(t)$ nicht nur den Pol $i a$, sondern auch Pole $\pm b + i a$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) hat, dann kann kein Pol $b + i a$ eine höhere Vielfachheit als der Pol $i a$ haben. G. Doetsch.

Lukaes, Eugene and Otto Szász: Nonnegative trigonometric polynomials and certain rational characteristic functions. J. Res. nat. Bur. Standards 52, 153—160 (1954).

Eine rationale Funktion $\varphi(t)$ besitze nur einfache Nullstellen und Pole, die sämtlich den Imaginärteil a haben. Die Pole seien $-i a, i v_j, -i v_j$ ($j = 1, \dots, n$), die Nullstellen $-i w_k, -i w_k$ ($k = 1, \dots, m$), $m \leq n$, wo $v_j = a + i b_j$, $w_k = a + i d_k$, $a > 0$, $0 < b_1 < \dots < b_n$, $0 < d_1 < \dots < d_m$. $\varphi(t)$ ist dann und nur dann eine charakteristische Funktion (Fourier-Transformierte einer Verteilungsfunktion), wenn $g(\vartheta) = |a_{ij}| \geq 0$ für alle ϑ , wobei $a_{1j} = 1 - \lambda_j \cos b_j \vartheta$, $a_{ij} = b_j^{2(i-1)}$ für $i \neq 1$, $\lambda_j = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{b_j^2}{d_k^2}\right)$ zu setzen ist. Es werden für den Fall, daß die b_j ganze Zahlen sind, vier geometrische Konfigurationen der b_j, d_k angegeben, die zu nichtnegativen trigonometrischen Polynomen führen, z. B. $b_j = j$ ($j = 1, \dots, n$), $m = 1$, $2d_1^2 \geq n$. G. Doetsch.

Hsu, Pao-Lu: On characteristic functions which coincide in the neighborhood of zero. Acta math. Sinica 4, 21—31 und engl. Zusammenfassg. 31—32 (1954) [Chinesisch].

\bar{U} sei die Menge aller der charakteristischen Funktionen (von eindimensionalen Verteilungsbzw. Dichtefunktionen), die in einer Umgebung der Zahl Null mit einer anderen, von ihr verschiedenen zusammenfallen können. Während die bisher bekannten Beispiele von Funktionen aus \bar{U} und auch die darüber hinaus vom Verf. zunächst angegebenen der Gestalt $f(t) = \exp(-(1 - i c \operatorname{sgn} t) |t|^\alpha)$, mit $0 < \alpha < 1$ und hinreichend kleinem c , nicht unbeschränkt differenzierbar sind, gestattet der folgende Satz, beliebig oft differenzierbare in \bar{U} liegende Funktionen zu bilden: Ist $q(x)$ summierbar und Hermitesch (d. h. $q(-x) = q(x)$) und nicht fast überall gleich Null und verschwindet die Fouriersche Transformierte von q in einem ganzen Intervall, so gehört die charakteristische Funktion der Dichtefunktion $q(x)$ zu \bar{U} . Hieraus ergeben sich neben mehreren anderen Beispielen für Funktionen aus \bar{U} auch die folgenden: die charakteristischen Funktionen der Dichtefunktionen $p(x) = \exp(-x \min(1, \varphi(|x|^{-1}))$, wobei $\varphi(x)$ eine der Funktionen $(\lg x)^2, (\lg x)(\lg \lg x)^2, \dots, (\lg x)^{n-1}$ bedeuten kann. Ob noch stärker abnehmende (bei großem x) Dichtefunktionen mit zu \bar{U} gehörenden charakteristischen Funktionen existieren, bleibt unbekannt; auf Grund eines Satzes von Marcinkiewicz liegt jedenfalls die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion F sicher nicht in \bar{U} , wenn $\int_{-\infty}^0 e^{-rx} dF(x) < +\infty$ oder $\int_0^{+\infty} e^{rx} dF(x) < +\infty$ bei passendem positivem r . — Zum Schluß wird bewiesen: 1. Bedeutet $F_n(x)$ eine Folge von Verteilungsfunktionen mit den charakteristischen Funktionen $f_n(r)$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = h(x)$ in einer Umgebung von 0 vorhanden und h an der Stelle 0 stetig, so strebt jede konvergente Teilfolge von F_n gegen eine Verteilungsfunktion. 2. Dann und nur dann gehört eine charakteristische Funktion f nicht zu \bar{U} , wenn jede in einer Umgebung von 0 gegen f strebende Folge charakteristischer Funktionen sogar überall gegen f konvergiert. Mit Hilfe dieser beiden Sätze läßt sich ein Theorem von Zygmund und auch aus dem oben genannten Satz von Marcinkiewicz folgern. K. Krickeberg.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Vulich, B. Z.: Über die Einbettung eines normierten halbgeordneten Raumes in den zweiten adjungierten Raum. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 1 (59), 91–99 (1954) [Russisch].

L'A. trouve les conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une lattice vectorielle normée X soit normalement plongée dans X^{**} , ou componente de X^{**} , ou enfin qu'elle coïncide avec X^{**} . L'outil des démonstrations est fourni par les fonctionnelles complètement linéaires. Les résultats sont partiellement connus (M. Nakamura, T. Ogasawara). *G. Marinescu.*

Thoma, Elmar: Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen. *S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* 1953, 77–80 (1954).

Es sei F eine stetige, lineare Abbildung eines Unter-Vektorverbandes r eines σ -Vektorverbandes R (über dem Körper der reellen Zahlen) in den Vektorraum w aller reellen (endlichen) Funktionen, welche auf einer Menge \mathfrak{M} definiert sind. Die Stetigkeit von F besagt dabei: Es gilt $\lim F(f_i) = 0$ (im Sinne punktweiser Konvergenz) für jede fallende Folge von Elementen $f_i \in r$, deren in R gebildetes Infimum gleich 0 ist. Verf. gibt zwei Prozesse P an, mittels welcher F zu einer stetigen, linearen Abbildung F_p eines σ -Untervektorverbandes s_p von R in w erweitert werden kann ($r \subseteq s_p \subseteq R$). Jede der beiden Erweiterungen ist bezüglich des zugrunde gelegten Prozesses P vollständig; es gilt also $(s_p)_P = s_p$ und $(F_p)_P = F_p$. Der eine Prozeß $P = A$ ist verbandsalgebraischer Natur und arbeitet mit der in R definierten Ordnungs-Konvergenz (algebraische Konvergenz). Beim zweiten Prozeß $P = M$ handelt es sich um Vervollständigung von r hinsichtlich einer geeigneten, in R definierten Quasi-Norm. Die M -Erweiterung erweist sich stets als Verengung der A -Erweiterung; ob dabei der Fall echter Verengung auftritt, bleibt unentschieden. Für den Fall, daß \mathfrak{M} einpunktig, also w der Körper der reellen Zahlen ist, entsprechen A und M zwei aus der Integrationstheorie bekannten Erweiterungsverfahren, nämlich: A dem Verfahren von P. J. Daniell [*Ann. of Math.*, 11. Ser. 19, 279–294 (1917)] und M dem Verfahren von M. H. Stone (*idies. Zbl.* 31, 14; 34, 29–32). *H. Bauer.*

Nevanlinna, Rolf: Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unter-räume. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A* 1 163, 16 S. (1954).

R is a complex linear vector space in which a given Hermitean bilinear form $Q(x, y)$ is majorised by a non-negative form $H(x, y)$ which imposes on R a Hilbert metric. If U is a subspace of R , closed in the metric H , a method is described for finding the Q -projection p of an element a onto U , if it exists. Conditions are given for the existence of p . If Q is itself an H , these conditions are automatically satisfied. In particular, if a is perpendicular to every degenerate subspace U_0 of U (relative to Q), and if the spectrum of Q relative to H is empty for $0 < \lambda < m$ and some m , then the normal exists (compare the author's Note III, this *Zbl.* 47, 108). *W. W. Rogosinski.*

Nevanlinna, Rolf: Bemerkung zur absoluten Analysis. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A* 1 169, 7 S. (1954).

In dem von Fréchet ausgebildeten absoluten Infinitesimalkalkül wird das Problem der Integration eines totalen Differentials behandelt. Die zugrunde liegenden Abbildungen $y = y(x)$ können sich auf zwei lineare Räume L_x, L_y endlicher oder auch unendlicher Dimension beziehen, sofern letztere eine Hilbertsche oder Banachsche Metrik besitzen. *G. Doetsch.*

Grothendieck, A.: Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. *Ann. Inst. Fourier* 4, 73–112 (1954).

Die vorliegende Arbeit enthält eine Zusammenstellung der Hauptresultate der in den *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* erscheinenden These des Verf. ohne Beweise. Kapitel I enthält die Theorie der topologischen Tensorprodukte lokalkonvexer Räume. Sind E, F zwei lokalkonvexe Räume, so erhält man auf dem gewöhnlichen Tensorprodukt $E \otimes F$ eine lokal-konvexe Topologie, wenn man als Nullumgebungssystem die Mengen $V(U \times V)$ nimmt, die absolutkonvexen Hüllen der Tensorprodukte zweier Nullumgebungen U und V aus E bzw. F . Als projektives Tensorprodukt $E \hat{\otimes} F$ wird die vollständige Hülle von $E \otimes F$ bezeichnet.

Im Fall zweier (F) -Räume hat jedes Element von $E \hat{\otimes} F$ die Form $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i$, wobei

x_i bzw. y_i beschränkte Folgen aus E bzw. F sind und $\sum |\lambda_i| < \infty$. Es wird $\mathcal{Q}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ für einen (B) -Raum E gleich dem Raum $\mathcal{Q}_E^1(\mu)$ der μ -integrierbaren Abbildungen eines lokalkompakten Raumes M in den (B) -Raum E . Sind E, F zwei (B) -Räume, so ist $E \hat{\otimes} F$ linearer Teilraum des (B) -Raumes $B(E', F')$ der auf $E' \times F'$ stetigen Bilinearformen. Die abgeschlossene Hülle von $E \hat{\otimes} F$ in $B(E', F')$ in der induzierten Norm wird als $E \otimes F$ bezeichnet. $E \hat{\otimes} F$ läßt sich auch für beliebige lokalkonvexe E, F erklären. Die Frage, ob die stetige lineare Abbildung $E \hat{\otimes} F \rightarrow E \hat{\otimes} F$ eindeutig ist, ist ungeklärt. Sind E, F (B) -Räume, so können die Elemente von $E' \hat{\otimes} F'$ als stetige lineare Abbildungen von E in F aufgefaßt werden. Eine solche Abbildung heißt nuklear. Für beliebige lokalkonvexe E, F wird eine Abbildung von E in F als nuklear bezeichnet, wenn sie als Produkt $\gamma \beta \alpha$ geschrieben werden kann, α stetige Abbildung von E in einen (B) -Raum E_1 , β nukleare Abbildung von E_1 in einen (B) -Raum E_2 , γ stetige Abbildung von E_2 in F . Eine nukleare Abbildung ist stets kompakt. Eine die nuklearen Abbildungen umfassende Klasse bilden die integralen Abbildungen von E in F , das sind solche, die sich als stetige Linearfunktionen auf $E \hat{\otimes} F'$ auffassen lassen. Sie gestatten Darstellungen als Integraloperationen. Das Produkt zweier integralen Abbildungen ist eine nukleare Abbildung. Eine dritte Sorte Abbildungen, die studiert wird, sind die Fredholmischen Abbildungen, die ebenfalls die nuklearen umfassen und in vielen Fällen mit ihnen zusammenfallen. Für das bekannte Problem, ob jede kompakte Abbildung Limes von Abbildungen endlichen Ranges ist, werden zahlreiche äquivalente Formulierungen gegeben, es wird in vielen Fällen auch gelöst. Im Kapitel II werden die nuklearen Räume studiert, das sind lokalkonvexe Räume E , für die $E \otimes F = E \hat{\otimes} F$ für jedes lokalkonvexe F gilt. Jede lineare stetige Abbildung eines nuklearen Raumes E in einen (B) -Raum ist nuklear. Ist E nuklear und quasivollständig, so ist E ein (M) -Raum, speziell also reflexiv. Jeder Teilraum und jeder Quotientenraum ist wieder nuklear, ebenso das topologische Produkt beliebig vieler und die topologische Summe abzählbar vieler nuklearer Räume. Die bekannten Räume $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_M$ der Schwartzschen Distributionentheorie sind nuklear, ebenso der Raum H der analytischen Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit. Die Eigenschaften von $E \otimes F$ im Fall eines nuklearen E und eines (F) -Raumes F werden untersucht. Stetige Abbildungen von E in F der Form $\sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$ mit $(\lambda_i) \in l^p$, $0 < p \leq 1$, x_i bzw. y_i je aus einer kompakten Teilmenge von E' bzw. F heißen von p -ter Potenz summierbare Fredholmische Abbildungen. Eine Fredholmische Abbildung hat eine Fredholmische Determinante, die eine ganze Funktion ist. Sätze über Zusammenhänge zwischen der Ordnung der Fredholmischen Determinante und der Potenz, in der die zugehörige Fredholmische Abbildung summierbar ist.

G. Köthe.

Dieudonné, Jean: Sur les espaces de Montel métrisables. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 194—195 (1954).

In Beantwortung einer von A. Grothendieck aufgeworfenen Frage wird bewiesen, daß jeder metrisierbare (M) -Raum von abzählbarem Typus ist, d. h. daß eine abzählbare Teilmenge in ihm dicht ist.

G. Köthe.

Grothendieck, A.: Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p . Canadian J. Math. 6, 158—160 (1954).

Utilisant ses résultats récents sur les applications linéaires faiblement compactes définies dans un espace de fonctions continues sur un espace compact (ce Zbl. 50, 109), l'A. démontre que si M est un espace localement compact muni d'une mesure bornée μ , H un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mu)$, qui est fermé dans un $L^p(\mu)$, avec $1 \leq p < +\infty$, alors H est de dimension finie. Par contre, si μ n'est pas discrète, il donne un exemple d'espace H de dimension infinie, contenu et fermé dans tous les L^p tels que $1 \leq p < +\infty$. Ce phénomène ne peut se produire si μ est discrète, car alors, si H est à la fois fermé dans $L^p(\mu)$ et $L^q(\mu)$, avec $1 \leq p < q < +\infty$, il est de dimension finie.

J. Dieudonné.

Nachbin, Leopoldo: Topological vector spaces of continuous functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 471—474 (1954).

Soit E un espace complètement régulier. L'A. considère l'espace $C(E)$ des fonctions continues numériques définies dans E , qui est un espace vectoriel localement convexe lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence compacte; il démontre les deux théorèmes suivants. I. Pour que $C(E)$ soit tonnelé, il faut et il suffit que pour toute partie fermée et non compacte X de E , il existe une fonction $f \in C(E)$ non bornée dans X . II. Pour que $C(E)$ soit bornologique, il faut et il suffit que E soit un Q -espace au sens de Hewitt, c'est-à-dire qu'il soit complet pour la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions de $C(E)$. Les

espaces paracompacts satisfont à l'hypothèse de I, et l'hypothèse de II est vérifiée si tout recouvrement ouvert de \bar{E} contient un recouvrement dénombrable de E . Par contre, l'A. remarque qu'un espace donné en exemple par L. Gillman et M. Henriksen (dans un travail non encore publié) vérifie l'hypothèse de I mais non celle de II, et il en conclut qu'il y a des espaces tonnelés non bornologiques.

J. Dieudonné.

Ganapathy Iyer, V.: A note on the linear space generated by a sequence of integral functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 183—185 (1954).

Pour deux fonctions entières $\alpha = \sum_n a_n z^n$, $\beta = \sum_n b_n z^n$, soit $\alpha > \beta$ leur composée de Hadamard $\sum_n a_n b_n z^n$, et soit z_k la k -ème itérée de α pour cette loi

de composition. Améliorant un résultat antérieur (ce Zbl. 49, 83) l'A. montre que si tous les a_n sont distincts et $\neq 0$, alors le sous-espace engendré par les itérées de α ($k = 1, 2, \dots$) est dense dans l'espace des fonctions entières, pour la topologie de la convergence compacte. La méthode consiste, en s'appuyant sur le théorème de Hahn-Banach, à montrer que si (e_n) est une suite telle que $e_n^{-1,n}$ soit borné et $\sum_n e_n a_n \exp(a_n z) = 0$ identiquement, on a nécessairement $e_n = 0$ pour tout n .

L'A. déduit ce résultat du fait plus général que si on a $\sum_n b_n \exp(a_n z) = 0$ identiquement, les séries (b_n) et (a_n) étant absolument convergentes et les a_n distincts et $\neq 0$, alors $b_n = 0$ pour tout n .

J. Dieudonné.

Wermer, J.: On a class of normed rings. Ark. Mat. 2, 537—551 (1954).

A. Beurling a étudié l'algèbre normée des fonctions $f(x)$, $x \in R$ (droite numérique), telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \sigma(x) dx < +\infty$, où $\sigma(x+y) \leq \sigma(x)\sigma(y)$. Le présent article étudie une classe J

d'algèbres normées plus générales, définies axiomatiquement, qui admettent comme cas particulier l'algèbre suivante: soient $x \in I$, $1 \leq x \leq 1$, $p(x)$ une fonction > 0 et intégrable,

$\sigma(x) = (p(x))^{-x}$; on prend l'espace des fonctions $f(x)$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^r \sigma(x) dx < +\infty$,

avec quelques conditions simples sur p (auxquelles il faut ajouter, semble-t-il, que σ est localement intégrable). Dans ces algèbres, l'espace des idéaux réguliers maximaux est R . Soit $L \in J$. L'A. étudie notamment les problèmes suivants: soient $\lambda \in R$ et U un voisinage ouvert de λ ; existe-t-il $f \in L$ avec $\hat{f}(\lambda) = 0$ et $\hat{f} = 0$ hors de U (\hat{f} , transformée de Fourier-Gelfand)? L'ensemble des $f \in L$ telles que $\hat{f} = 0$ hors d'un ensemble compact est-il dense dans L ? Il les résout positivement moyennant quelques conditions simples sur L , et en tire un théorème taubérien. Moyennant d'autres conditions simples, il montre qu'un idéal primaire est formé des $f \in L$ telles que \hat{f} vérifie certaines conditions différentielles. Les outils principaux sont la théorie des algèbres de Banach commutatives, le spectre d'une fonction selon Beurling, et certaines théorèmes du type de ceux de Paley-Wiener.

J. Dixmier.

Fleischer, Isidore: Sur les espaces normés non-archimédiens. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 165—168 (1954).

Soit K un corps valué (commutatif ou non) dont la valeur absolue est non-archimédienne et discrète, et soit E un espace normé sur K , dont la norme est non-archimédienne, c'est-à-dire satisfait à l'inégalité ultramétrique $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$. L'A. détermine tous les espaces normés de cette nature qui sont complets, en montrant qu'un tel espace est isomorphe à un espace $C(S)$ défini comme suit: c'est l'ensemble des fonctions définies dans un ensemble I de puissance S [et notées $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$], à valeurs dans K , muni de la norme $\|x\| = \sup_\alpha |x_\alpha|$. Le principe

de la démonstration consiste à remarquer que l'ensemble M des éléments de E , de norme ≤ 1 , est un module sur l'anneau A de la valuation de K , que pM est un sous-module de M [si (p) est l'idéal de la valuation] et que M/pM peut être considéré comme espace vectoriel sur le corps $A/(p)$. On considère alors une base (e_α) de cet espace vectoriel, et pour chaque α un x_α de la classe e_α . Il est alors aisé de montrer que les combinaisons linéaires (finies) $\sum_\alpha x_\alpha e_\alpha$ des e_α forment un sous-

espace dense V de E , dans lequel la norme de E induit la norme $\sup_\alpha |x_\alpha|$. L'A. remarque que

tout sous-espace vectoriel fermé de E admet un supplémentaire topologique, et que E n'est jamais réflexif s'il est de dimension infinie.

J. Dieudonné.

Monna, A. F.: Sur le théorème de Hahn-Banach. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 9—16 (1954).

Remarques élémentaires sur l'équivalence entre la forme géométrique et la forme analytique du théorème de Hahn-Banach. L'A. semble ignorer que ces relations sont bien connues depuis les travaux de E. Helly (1921). *J. Dieudonné.*

Klee jr., V. L.: Invariant extension of linear functionals. *Pacific J. Math.* **4**, 37—46 (1954).

Let L be a real linear space, \mathfrak{T} a set of linear transformations of L into itself, p a positively homogeneous subadditive functional on L , f a linear functional defined on a linear subspace D_f of L and satisfying $f \leq p$ there. Let $T D_f \subset D_f$ and $f T = f$ for each $T \in \mathfrak{T}$. The set of linear functionals F defined on L which are extensions of f with $F \leq p$ on L and $FT = F$ for each $T \in \mathfrak{T}$ is denoted by $\langle L, \mathfrak{T}, f, p \rangle$. The Hahn-Banach theorem asserts that $\langle L, \{I\}, f, p \rangle$ is non-empty, where $\{I\}$ is the set consisting of the identity transformation alone. The main theorem of the present paper states conditions each of which is equivalent to $\langle L, \mathfrak{T}, f, p \rangle$ being non-empty. These are (i) $\langle L, \mathfrak{S}, f, p \rangle$ is non-empty for each finite subset \mathfrak{S} of \mathfrak{T} ; (ii) if $x \in D_f$,

$T_i \in \mathfrak{T}$, $y_i \in L$, then $f(x) \leq p\left(x + \sum_{i=1}^k (T_i - I) y_i\right)$. If \mathfrak{T} is a semi-group, there is a third equi-

valent condition (iii) there exists $g \in \langle L, \{I\}, f, p \rangle$ such that $gST = gTS$ and $gT \leq p$ whenever $S, T \in \mathfrak{T}$. This theorem is applied when $pT \leq bp$ ($b \geq 1$, $T \in \mathfrak{T}$) to prove that $\langle L, T, f, bp \rangle$ is non-empty for certain classes of \mathfrak{T} . These applications cover, in particular, the cases when (i) \mathfrak{T} is a commutative semigroup or a solvable group, (ii) p is a norm and \mathfrak{T} is a group compact in the uniform topology for operators. *F. F. Bonsall.*

Bonsall, F. F.: A note on subadditive functionals. *J. London math. Soc.* **29**, 125—126 (1954).

Aronszajn hat bewiesen, daß zu jeder in einem reellen Vektorraum X definierten reellen Funktion p mit $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (falls $\alpha \geq 0$) und $p(x) + p(-x) > 0$ (falls $x \neq 0$) ein lineares Funktional f mit $f(x) < p(x)$ (falls $x \neq 0$) existiert, wenn X hinsichtlich der Norm $p(x) + p(-x)$ separabel ist. Der Verf. zeigt an einem Beispiel, in dem p nicht negativ ist, daß die letzte Voraussetzung nicht entbehrt werden kann. *K. Krickeberg.*

Vajnberg, M. M.: Über Hyperboloide und ein bedingtes Extremum gewisser Funktionalen im Hilbertschen Raum. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 2 (60), 105—112 (1954) [Russisch].

L'A. appelle hyperboloide dans l'espace H de Hilbert, l'ensemble de points satisfaisant à l'équation $\|P_1 x\|^2 - \|P_2 x\|^2 = C$, $C > 0$ où P_1 et P_2 sont deux projections et démontre qu'à tout opérateur selfadjoint, dont le domaine est H , correspond une telle variété. Quelques résultats d'analyse nonlinéaire obtenus par l'A. sont liés à ces notions. *G. Marinescu.*

Nikaidō, Hukukane: On von Neumann's minimax theorem. *Pacific J. Math.* **4**, 65—72 (1954).

Das Minimax-Theorem wird in der folgenden Fassung bewiesen. Die Veränderlichen x und y durchlaufen je einen konvexen kompakten Teil X bzw. Y eines topologischen Vektorraumes. Ist $K(x, y)$ stetig in x und in y (bei festem Wert der anderen Veränderlichen), quasikonkav in x und quasikonvex in y in dem Sinne, daß aus $K(x_i, y) \geq \lambda$ (bzw. $K(x, y_i) \leq \mu$) für $i = 1, 2$ die Gültigkeit von $K(\xi, y) \geq \lambda$ (bzw. $K(x, \eta) \leq \mu$) für jeden Punkt ξ der Strecke $x_1 x_2$ (Punkt η der Strecke $y_1 y_2$) folgt, so ist $\max_X \min_Y K(x, y) = \min_Y \max_X K(x, y)$. Beim Beweis erlaubt es die Kompaktheit, den Satz in Vektorräume endlicher Dimension hinüberzuspielen, und dort genügt eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, während Beweise anderer Verff. höhere Fixpunktsätze heranziehen. Die Tragweiten einiger Beweise werden verglichen. *H. Kneser.*

Michal, A. D.: On bounds of polynomials in hyperspheres and Fréchet-Michal derivatives in real and complex normed linear spaces. *Math. Mag.* **27**, 119—126 (1954).

A series of theorems concerning polynomials $p(x)$ of degree n , on a Banach space X to a Banach space Y . We mention the following ones: If X and Y are real then, for $\|x\| \leq 1$, $\|p(x)\| \leq 1$ implies $\|p'(x)\| \leq n^2$; in the complex case, the

conclusion is $p'(x) \leq n$ (generalisation of the classical inequalities of A. Markoff and S. Bernstein, respectively). There are also corresponding inequalities for the higher derivatives. Another interesting result is that, in the complex case, the norms of a homogeneous polynomial $p(x)$ and of its polar form $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are equal. This is not true in the real case. For definitions of polynomial, polar form, and derivative (Fréchet-Michel) compare E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, New York 1948, sections 4.2—4.4., this Zbl. 33, 65.

W. W. Rogosinski.

Loomis, L. H.: *Linear functionals and content*. Amer. J. Math. 76, 168—182 (1954).

Zugrunde gelegt ist ein Vektorraum L aus reellen Funktionen h mit gemeinsamem Definitionsbereich S (kurz $h \in S$) und dazu ein (reelles, endliches) lineares nicht-negatives Funktional $I \in L$, wobei I nicht als stetig vorausgesetzt wird. Untersucht werden verschiedene Erweiterungen von $I \in L$. Und zwar: (A) Zweiseitige Vervollständigung (Erweiterung durch Einschließung) zu einem linearen nicht-negativen Funktional $I \in R$. Definitionen: Es sei $f \in R = R(L; I)$, wenn $h, g \in L$ existieren mit $h \leq f \leq g$ und wenn $I(f) = \sup(I(h); h \leq f, h \in L) = I(f) = \inf(I(g); f \leq g, g \in L)$; außerdem sei $I(f) = I(g) = I(f)$ gesetzt. — Es ist R zweiseitig vollständig bezüglich I , d. h. $R(L; I) = R(R; I)$; außerdem ist $L = R$. — Eine Teilmenge T von S heiße I -meßbar mit dem Inhalt $\mu(T) = I(c(T))$, unter $c(T)$ die charakteristische Funktion von T verstanden, wenn $c(T) \in R$; es sei F das System der I -meßbaren Mengen T . Ferner sei E das System der linearen Kombinationen von (je endlich vielen) charakteristischen Funktionen aus R . Dann ist $R^* = R(E; I)$ Teil von R ; jedes $f \in R^*$ ist beschränkt und heiße I -summierbar. — Gefragt wird unter anderem nach Bedingungen dafür, daß $R^* = \bar{R}$, wenn \bar{R} das System der beschränkten Funktionen aus R ist. Ergebnisse: (1) Vor. Es sei L ein die Konstanten enthaltender (also $1 \in L$) Vektorverband. Beh. Es ist $R^* = \bar{R}$, und \bar{R} ist eine Algebra (= Vektorraum, der zugleich ein Ring im Sinne der Algebra ist), die gegenüber gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist. Es ist F eine Boolesche Algebra, $\mu(F)$ ist (endlich) additiv (und sogar ein vollständiger Inhalt). Schließlich ist $I(f)$ für $f \in R^*$ gleich dem Riemann-Stieltjesintegral $\int_S f d\mu$. — (2) Vor. (a) Es sei

L eine Algebra aus beschränkten Funktionen $h \in S$. — (b) Es sei $1 \in L$. — Beh. Es ist $R(L; I)$ sowohl Algebra als Verband. Überdies gilt die Beh. von (1). — (B) Einseitige Vervollständigung. Es sei R ein Vektorverband von reellen Funktionen, welcher zweiseitig vollständig ist bezüglich $I \in R$ (im Sinne von (A)). Es sei $f \in U^+$, wenn $f \geq 0$ und $f \leq g \in R$ für jedes $g \in R$ sowie $\sup(I(g); g \leq f, g \in R) = \dots$; dieses Supremum wird dann mit $I(f)$ bezeichnet. Ferner sei $U = U^+(R; I)$ das System der Differenzen $f = f' - f''$ für $f', f'' \in U^+$ und $I(f) = I(f') - I(f'')$. Es wird gezeigt: Es ist U ein Vektorverband (mit $R = U$); ferner ist U einseitig vollständig, d. h. $U(U; I) = U(R; I)$ und auch zweiseitig vollständig. — (C) Uneigentliches Integral. Vorbemerkung: Ist L wieder ein Vektorraum reeller Funktionen $h \in S$, ferner $I \in L$ linear und nicht negativ, so heiße eine nicht-negative, im übrigen beliebige Funktion $h \in S$ I -meßbar, wenn jede ihrer Urbildmengen $\{h \leq \lambda\}$ I -meßbar ist für jedes $\lambda \geq 0$ mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen. Ein beliebiges $h \in S$ heiße I -meßbar, wenn sowohl der positive als der negative Teil von h I -meßbar ist. Nun besitze L außerdem die Eigenschaft, daß mit $f \in L$ auch $f \cdot 1 \in L$. Dann ist jedes $f \in L$ I -meßbar. Eine I -meßbare, nicht-negative, im übrigen beliebige Funktion $h \in S$ heiße uneigentlich I -summierbar, wenn $\sup(I(g); g \leq h, g \in R^*) < \infty$; dieses Supremum werde mit $I^{**}(h)$ bezeichnet und das System aller uneigentlich I -summierbaren $h \geq 0$ mit R^{**} . Für jedes $f \geq 0$ mit $f \in L$ gilt $f \in R^{**}$ und $I^{**}(f) \leq I(f)$. Es werden unter anderem notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß $I^{**}(f) = I(f)$. — Die Arbeit enthält noch viele weitere Feststellungen und Bemerkungen, so über I -meßbare Funktionen, ferner insbesondere über die Rolle der Bedingung, daß $f \cdot 1 \in L$ für jedes $f \in L$, sowie über den Fall, daß in S eine Topologie erklärt ist.

Otto Haupt.

Robison, Gerson B.: *Invariant integrals over a class of Banach spaces*. Pacific J. Math. 4, 123—150 (1954).

Setting. S : topological space. $B(S)$: Banach space of the real-valued bounded functions x on S with the norm $\|x\| = \sup x(t)$. e : unit function. θ : zero function. $O[x] = \sup x(t) - \inf x(t)$. F : subset of $B(S)$. X : closed linear manifold spanned by F in $B(S)$. $B[X]$: algebra of the bounded linear transformations on X with the norm $\|T\| = \sup(\|T(x)\|/\|x\|)$ for $x \in X$, $x \neq \theta$. G : multiplicative semi-group included in $B[X]$. G_1 : closed convex hull of G in $B[X]$. For $x \in X$, $K[x]$ denotes the closure in $B(S)$ of the set of the $F(x)$ for all F in G_1 . Assumptions on $x \in B(S)$. (A 1): for any $t_0 \in S$, $\sup_{V \in G_1} [V(x)](t_0) = \sup x(t)$ and $\inf_{V \in G_1} [V(x)](t_0) = \inf x(t)$. (A 2): $K[x]$ is compact. (B 1): For each $T \in G$ and $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that if $V \in G_1$ and $O[V(x)] < \delta$, then for each $t \in S$ there is a t' with $||V(T(x))(t) - [V(x)](t')|| < \varepsilon$. General

idea of the paper. The main content of this paper is inspired by the theorem of von Neumann on the existence and uniqueness of an invariant integral on a compact topological group. A more general underlying space and a more general class of functions are considered. The invariance is defined in terms of G . Following von Neumann's construction the core of the investigation lies in showing that for each x in X there exists one and only one constant function in $K[x]$. Main Theorem: Let G be bounded by k , S compact. Suppose for each $x \in F$: (1) x is lower or upper semi-continuous, (2) x satisfies (A 1) and (A 2), (3) for each $V \in G_1$, $V(x) \in F$ and each $V(x)$ has the same kind of semi-continuity as x , (4) x satisfies (B 1) [or a similar condition (B 2), (B 3), (B 4)] or G is abelian over x , (5) F contains a nonzero constant function. Then: (I) There exists a unique invariant bounded linear functional x^* over X with $x^*(e) = 1$, (II) x^* is non-negative over F , (III) if for each $x \in F$, x is lower semi-continuous, then x^* is positive over F . Sketch of the proof: By (1), (2), (3), there is a constant function \bar{x} in $K[x]$ for each $x \in F$. \bar{x} is a fixed point and so are all constant functions in X . With (4) is provided the uniqueness of \bar{x} . With (3) and (5) the linear functional x^* defined by $x^*(x) = \text{constant value of } \bar{x}$, is normal [i. e. $x^*(e) = 1$] and invariant, and there exists only one functional of that type. Three simple counter-examples illustrate the uniqueness requirements. Complements: (i) Assuming in the Main Theorem all conditions up to and including (3) to be satisfied, any additional condition producing a nonzero invariant bounded linear functional over X can replace (4) and (5). Such conditions were given by B. Yood (this Zbl. 43, 32). One of them is weakened by extending the notion of solvability of a group to semi-groups. X appears here only as a normed linear space; the interpretation of its elements as functions on S is irrelevant. (ii) In the last section the compactness assumption for S is relaxed at the expense of limiting F . This procedure is illustrated in the case when S is the real line, $F = X$ the set of continuous functions approaching equal limits to the left and right.

Chr. Pauc.

Burgess, D. C. J.: Tauberian theorems in a Banach lattice with applications to the L^p spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 242—249 (1954).

Théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-st} dx_t$; s réel positif, x_t : application à variation fortement bornée de R^1 dans un treillis de Banach X . Cas où X est $L^p[0, \infty)$.

A. Revuz.

Owehar, Margaret and Arnold J. Tingley: On the absolute convergence of a Fourier-Hermite expansion of nonlinear functionals. Proc. Amer. math. Soc. 5, 85—88 (1954).

Let A_{m_1, \dots, m_N} be the Fourier-Hermite coefficients of a functional $F(x)$ on the Wiener space C [space of functions continuous on $0 \leq t \leq 1$ with $x(0) = 0$] defined with respect to the set of closed orthonormal functionals $\{\psi_{m_1, \dots, m_N}(x)\}$ ($m_i = 0, 1, 2, \dots$; $N = 1, 2, \dots$) in C . Cameron and Hatfield have shown that for certain functionals $F(x) \in L^2(C)$, the absolute convergence of the series (i) $\sum_{m_1, \dots, m_N} A_{m_1, \dots, m_N} \psi_{m_1, \dots, m_N}(x_0)$ for every integer N implies that $F(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_1, \dots, m_N} A_{m_1, \dots, m_N} \psi_{m_1, \dots, m_N}(x)$. For the particular choice $2^{1/2} \cos(2j-1)2\pi t$ of the functions $x_j(t)$ used in the definition of $\psi_{m_1, \dots, m_N}(x)$, the authors obtain certain sufficient conditions which ensure the absolute convergence of the series (i).

J. A. Siddiqi.

Malgrange, Bernard: Sur quelques propriétés des équations de convolution. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2219—2221 (1954).

Es sei \mathfrak{S} der topologische Raum der ganzen Funktionen in n Variablen, \mathfrak{S}' sein Dual; $\mathfrak{E}(R^n)$ der Raum der unbeschränkt oft differenzierbaren Funktionen, $\mathfrak{E}'(R^n)$ sein Dual; $\mathfrak{D}(R^n)$ der Raum der unbeschränkt oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, $\mathfrak{D}'(R^n)$ sein Dual. Wenn a) $\mu \in \mathfrak{S}'$ oder b) $\mu \in \mathfrak{E}'(R^n)$, so ist im Falle a) jedes $f \in \mathfrak{S}$, im Falle b) jedes $f \in \mathfrak{E}(R^n)$ bzw. $f \in \mathfrak{D}'(R^n)$, das der Gleichung $\mu * f = 0$ (Faltung im Sinn der Distributionen) genügt, der limes a) in \mathfrak{S} , b) in $\mathfrak{E}(R^n)$ bzw. in $\mathfrak{D}'(R^n)$ von Linearkombinationen von Exponentialpolynomen, welche dieser Gleichung genügen.

G. Doetsch.

Sikorski, R.: A definition of the notion of distribution. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 209—211 (1954).

Verf. gibt (für den eindimensionalen Fall) eine Definition der Distributionen von L. Schwartz, die mit der verallgemeinernden Definition des Ref. (dies. Zbl. 50, 338), eingeschränkt auf die eigentlichen Schwartzschen Distributionen, im wesentlichen übereinstimmt. Die Distributionen endlicher Ordnung über einem kompakten Intervall P werden als die Äquivalenzklassen der Menge aller Paare $\{n, f\}$ ($n \geq 0$ ganz, f in P definierte stetige Funktion) nach folgender Relation definiert: $\{n, f\} \sim \{m, g\}$ für $n \leq m$, wenn f $(n - m)$ -mal stetig differenzierbar und $f^{(n-m)} = g$ ein Polynom von höchstens $(m - 1)$ -tem Grade ist. Die Distributionen über einem offenen Intervall Q werden dann in üblicher Weise mittels einer wachsenden Folge kompakter Teilintervalle von Q erhalten.

H. König.

Edwards, R. E.: On functions which are Fourier transforms. Proc. Amer. math. Soc. 5, 71—78 (1954).

Es werden Sätze aufgestellt, welche einen Satz von I. E. Segal (dies. Zbl. 36, 205) und einen noch unpublizierten Satz von E. Hewitt als Spezialfälle enthalten. Es handelt sich dabei nicht um die Fourier-Transformation von gewöhnlichen Funktionen, sondern von beschränkten Radonschen Maßen auf der dualen Gruppe einer lokal kompakten, Abelschen Gruppe.

G. Doetsch.

Hewitt, Edwin: Fourier transforms of the class L_p . Ark. Mat. 2, 571—574 (1954).

Die Fourier-Koeffizienten c_n einer Funktion der Klasse $L_p(0, 2\pi)$ mit $1 < p < 2$ gehören zur Klasse $l_{p'}$, d. h. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n < \infty$ ($p' = \frac{p}{p-1}$). Ebenso gehört die Fourier-Transformierte einer Funktion der Klasse $L_p(-\infty, \infty)$ zur Klasse $l_{p'}(-\infty, \infty)$. Aber nicht alle Folgen aus $l_{p'}$ sind Fourier-Koeffizienten von Funktionen aus $L_p(0, 2\pi)$, und nicht alle Funktionen aus $l_{p'}(-\infty, \infty)$ sind Fourier-Transformierte von Funktionen aus $L_p(-\infty, \infty)$. Es wird gezeigt, daß dies für alle unendlichen lokal kompakten Abelschen Gruppen an Stelle der Intervalle $(0, 2\pi)$ und $(-\infty, \infty)$ gilt, wobei statt des Lebesgueschen Integrals das Haarsche zu benutzen ist.

G. Doetsch.

Harish-Chandra: On the Plancherel formula for the right-invariant functions on a semisimple Lie group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 200—204 (1954).

Soient G un groupe de Lie réel connexe semi-simple, K l'image réciproque, supposée compacte, d'un sous-groupe compact maximal du groupe adjoint. Si f est une fonction continue à support compact sur G , constante sur les classes xK , on a $\int_G f(x)^2 dx = \int_{\mathfrak{E}_0} N_\omega(f) d\omega$; on va esquisser la signification du second membre. Soit \mathfrak{E} l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à K contient la représentation triviale. Alors, \mathfrak{E}_0 est un sous-ensemble de \mathfrak{E} muni d'une topologie localement compacte et d'une mesure positive $d\omega$; pour $\omega \in \mathfrak{E}_0$, $N_\omega(f)$ est le carré de la norme (au sens d'Hilbert-Schmidt), de l'opérateur $\omega(f)$. Pour définir \mathfrak{E}_0 , on considère la représentation naturelle σ de G dans $L^2(G/K)$; soit $I_2(G/K) = L^2(G/K)$ le sous-espace des éléments invariants par K ; soit $I_1(G)$ le sous-espace de $L^1(G)$ formé des éléments invariants par K ; alors, $I_2(G/K)$ est stable pour $I_1(G)$, d'où une représentation τ de $I_1(G)$ dans $I_2(G/K)$; soit \mathfrak{A} la C^* -algèbre à unité dans $I_2(G/K)$ engendrée, en gros, par les $\tau(f)$, $f \in I_1(G)$; \mathfrak{A} est abélienne, soit Γ son spectre compact; les applications naturelles $L^1(G) \rightarrow I_1(G) \rightarrow \mathfrak{A}$ définissent une application de Γ sur un ensemble de formes positives sur $L^1(G)$; soit Γ_0 l'ensemble fermé des éléments de Γ qui s'appliquent sur G ; on a enfin une application biunivoque de $\Gamma - \Gamma_0$ sur une partie \mathfrak{E}_0 de \mathfrak{E} ; d'où \mathfrak{E}_0 et sa topologie localement compacte; nous renvoyons le lecteur à l'article pour la définition de $d\omega$. — D'autre part, soient \mathfrak{g}_0 (resp. \mathfrak{k}_0) l'algèbre de Lie de G (resp. K), \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{k}) sa complexification, \mathfrak{B} l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} , \mathfrak{Z} le centralisateur de \mathfrak{k} dans \mathfrak{B} ; on a une représentation naturelle τ de \mathfrak{Z} dans (un sous-espace partout dense de) $I_2(G/K)$; pour $z \in \mathfrak{Z}$ (partie „hermitienne“, en un sens convenable, de \mathfrak{Z}), $\tau(z)$ est essentiellement hypermaximal; on prend son transformé de Cayley $\Gamma(z)$. Il existe des éléments z_1, z_2, \dots, z_l de \mathfrak{Z} tels que les $\Gamma(z_i)$ engendrent \mathfrak{A} ; on peut alors identifier Γ , donc \mathfrak{E}_0 , à une partie de l'espace numérique à l dimensions. — On n'a donné qu'une partie des résultats de cette Note qui, très condensée, ne comporte pas de démonstration.

J. Dixmier.

Bargmann, V.: On unitary ray representations of continuous groups. Ann. of Math., II. Ser. 59, 1—46 (1954).

Cet article, très clair et détaillé, contient beaucoup de résultats connus (et donne, pour la plupart d'entre eux, des références appropriées). Le résumé ci-dessous, pour des raisons de clarté, englobe certains de ces résultats. — Soient G un groupe de Lie connexe (hypothèse parfois superflue), e son élément neutre. L'A. appelle facteur local de G un cocycle (de degré 2) continu ω défini au voisinage de e à valeurs dans \mathbb{C} (groupe des nombres complexes de module 1); l'équivalence des facteurs locaux est définie à la manière habituelle. Posant $\omega = e^{i\xi}$, l'A. définit les „exposants locaux“ ξ , à valeurs dans la droite numérique R , et leur équivalence; les classes d'exposants locaux forment un espace vectoriel. Il y a correspondance biunivoque entre classes de facteurs locaux et classes d'exposants locaux. Un exposant local ξ est dit canonique s'il est indéfiniment différentiable et si $\xi(r, s) = 0$ pour r et s dans un même sous-groupe à un paramètre; alors, tout exposant local est équivalent à un exposant local canonique; si deux exposants locaux canoniques sont équivalents, leur différence est localement le cobord d'une fonction linéaire des coordonnées canoniques. Une classe d'exposants locaux définit à la manière habituelle un germe d'extension centrale G' de G , et G' est un germe de groupe de Lie; on en déduit qu'un exposant local canonique est analytique. L'A. appelle exposant infinitésimal de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G les cocycles de degré 2 de \mathfrak{g} à valeurs réelles; il définit de la manière habituelle leur équivalence. Par l'intermédiaire des extensions de groupes et d'algèbres de Lie, il établit une correspondance biunivoque entre exposants locaux canoniques et exposants infinitésimaux, correspondance linéaire qui respecte l'équivalence. Supposons G simplement connexe; tout exposant local ξ de G se prolonge en un exposant ξ_0 de G ; si ξ est différentiable, ξ_0 peut être supposé différentiable; soient ξ, ξ' deux exposants locaux équivalents, ξ_1, ξ'_1 des exposants de G prolongeant ξ, ξ' ; alors, ξ_1, ξ'_1 sont équivalents. — Soient \mathfrak{H} un espace hilbertien, \mathfrak{H}' l'espace quotient obtenu en considérant comme équivalents deux vecteurs de la forme x et λx , $|\lambda| = 1$. La distance de deux éléments de \mathfrak{H}' est le minimum de la distance dans \mathfrak{H} de deux représentants. Soit U le groupe des opérateurs unitaires de \mathfrak{H} ; il est un sous-groupe distingué de U ; soit $U' = U/\mathbb{I}$; U' opère dans \mathfrak{H}' ; U' est muni de la topologie quotient de la topologie forte. Il existe une section locale continue de U pour la fibration définie par \mathbb{I} ; si \mathfrak{H} est de dimension finie, on peut prendre pour cette section un homomorphisme, en choisissant des opérateurs de déterminant 1. — Le but de l'article est d'étudier les représentations continues de G dans U' . On peut supposer G simplement connexe. Soit $r \rightarrow U_r$ une telle représentation; choisissons des représentants $U_r \in U$ au voisinage de e ; alors, $U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}$, où ω est un facteur local; comme on l'a vu, on peut étendre ω en un facteur $\tilde{\omega}$ sur G ; alors on peut prolonger de manière unique $r \rightarrow U_r$ en une application continue $r \rightarrow U_r$ de G dans U telle que $U_r U_s = \tilde{\omega}(r, s) U_{rs}$ pour $r, s \in G$. Réciproquement, une telle application définit évidemment une représentation continue de G dans U' . D'ailleurs, pour tout facteur ω sur G , il existe une telle application (on prend pour \mathfrak{H} l'espace L^2 défini par la mesure de Haar à gauche, et on pose $(U_r f)(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t)$). Si $r \rightarrow U_r$ définit un exposant local équivalent à 0, $r \rightarrow U_r$ provient d'une représentation continue de G dans U . Exemples: 1. G abélien (il existe alors des exposants infinitésimaux non équivalents à 0; mais, si G est compact, toute représentation continue de G dans U' provient d'une représentation continue de G dans U); 2. G semi-simple (l'A. retrouve que tout exposant infinitésimal est équivalent à 0); 3. G , groupe orthogonal non homogène d'une forme quadratique non dégénérée à m variables (même résultat pour $m \geq 2$ seulement); 4. G , groupe galiléen (l'espace des classes d'exposants infinitésimaux est de dimension 1; l'A. construit explicitement un exposant sur G).

J. Dixmier.

Dowker, Yael Naim and F. G. Friedlander: On limit sets in dynamical systems. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 168—176 (1954).

Soit S un système dynamique dont l'espace des phases est compact, tandis que le groupe temporel est ou discret ou isomorphe à R (groupe des nombres réels). Les AA. prouvent que l'ensemble ω -limite d'une trajectoire de S est T -connexe (c'est à dire que cet ensemble ne contient aucun sous-ensemble fermé propre, transformé en son propre intérieur par une opération du groupe). La T -connexion implique la connexion lorsque le groupe est R . De plus tout ensemble T -connexe de S est ω -limite d'une trajectoire d'un système dynamique qui englobe S . *G. Reeb.*

Pukánszky, L.: On a theorem of Mautner. Acta Sci. math. 15, 145—148 (1954).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Mautner wird bewiesen: Der separable Hilbertsche Raum \mathfrak{H} sei die verallgemeinerte direkte Summe der \mathfrak{H}_λ bezüglich der Gewichtsfunktion $\sigma(\lambda)$. \mathfrak{A} sei eine Menge beschränkter Operatoren A auf \mathfrak{H} , die ebenfalls nach den \mathfrak{H}_λ zerfallen in die Operatoren $A(\lambda)$ in \mathfrak{H}_λ . Es gebe außerdem höchstens abzählbar viele disjunkte Teilmengen T_n der reellen Achse derart, daß $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ ein Komplement vom σ -Maß Null besitzt und daß für beliebige λ, λ' eines

festen T_μ stets eine unitäre Abbildung $U(\lambda, \lambda')$ von \mathfrak{H}_λ auf $\mathfrak{H}_{\lambda'}$ existiert, so daß $A(\lambda') = U(\lambda, \lambda') A(\lambda) U^{-1}(\lambda, \lambda')$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt. Es gibt dann einen bezüglich aller $A \in \mathfrak{A}$ invarianten Teilraum \mathfrak{M} von \mathfrak{H} und eine unitäre Abbildung U von \mathfrak{M} auf \mathfrak{H}_{λ_0} , λ_0 in einem geeigneten T_μ , so daß $A(\lambda_0) = U A_{(\mathfrak{M})} U^{-1}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt. $A_{(\mathfrak{M})}$ die Einschränkung von A auf \mathfrak{M} . G. Köthe.

Pukánszky, L.: The theorem of Radon-Nikodym in operator-rings. Acta Sci. math. **15**, 149—156 (1954).

Soit q une trace sur un anneau d'opérateurs semi-fini M . L'A. démontre le „théorème de Radon-Nikodym“ pour une forme linéaire positive sur M , théorème dû à Segal (ce Zbl. **51**, 342), et en déduit le théorème de Radon-Nikodym pour deux formes linéaires positives normales sur un anneau d'opérateurs fini, théorème dû à Dye (ce Zbl. **47**, 111). La méthode, nouvelle, est inspirée de Murray et von Neumann (ce Zbl. **17**, 360) et donne aussi le résultat suivant: soit q une forme linéaire sur M , auto-adjointe et ultrafortement continue; alors, q est différence de deux formes linéaires positives normales sur M de supports orthogonaux. J. Dixmier.

Tomita, Minoru: On the regularly convex hull of a set in a conjugate Banach space. Math. J. Okayama Univ. **3**, 143—145 (1954).

Given a real Banach space E , let \mathfrak{X} be a bounded subset of E^* which is closed in the weak $*$ topology. With this topology, \mathfrak{X} is a compact Hausdorff space and, for each $A \in E$, the function A^* defined by $A^*(\lambda) = \lambda(A)$, $\lambda \in \mathfrak{X}$, is a continuous real valued function. Given a non-negative Borel measure q on \mathfrak{X} , let $\int_{\mathfrak{X}} \lambda d q(\lambda)$ denote the functional p defined by $p(A) = \int_{\mathfrak{X}} A^*(\lambda) d q(\lambda)$, $A \in E$. It is proved that the smallest regularly convex set containing \mathfrak{X} is the set of all functionals of the form $\int_{\mathfrak{X}} \lambda d q(\lambda)$ for all choices of q with $q(\mathfrak{X}) = 1$. This result, together with the Krein-Milman theorem [M. Krein and D. Milman, Studia math. **9**, 133—137 (1940)], gives a representation of any bounded regularly convex subset \mathfrak{X} of E^* as the set of all functionals of the form $\int_{\mathfrak{C}} \lambda d q(\lambda)$, with $q(\mathfrak{C}) = 1$, where \mathfrak{C} is the weak $*$ closure of the set of extreme points of \mathfrak{X} . As a particular case, a representation is given of the states on a C^* -algebra with identity, in terms of the irreducible states. F. F. Bonsall.

Tomita, Minoru: Representations of operator algebras. Math. J. Okayama Univ. **3**, 147—173 (1954).

Let \mathbf{A} be a C^* -algebra of bounded linear operators on a Hilbert space; it is not supposed that the space is separable, nor that the algebra is commutative. Let p be a state on \mathbf{A} ; i. e., a linear functional with $p(A^*A) \geq 0$, $p(A^*) = \overline{p(A)}$ for all $A \in \mathbf{A}$. The set T_p of $A \in \mathbf{A}$ for which $p(A^*A) = 0$ is a linear set, and if $A(p)$ denotes the coset of A in the quotient space $S_p = \mathbf{A}/T_p$, then an inner product may be defined in S_p by setting $(A(p), B(p)) = p(B^*A)$. The completion of S_p with respect to this inner product is a Hilbert space which is denoted by $L^2(p)$. The mapping $X(p) \rightarrow (AX)(p)$ is a bounded linear transformation of S_p into itself, and therefore determines a bounded linear operator A_p on $L^2(p)$, and the smallest uniformly closed algebra of operators on $L^2(p)$ containing all the A_p is a C^* -algebra \mathbf{A}_p . A commutative C^* -algebra \mathbf{E} of operators on $L^2(p)$ is called a diagonal algebra on $L^2(p)$ if it is the commutator of $\mathbf{A}_p = \mathbf{E}$. It is proved that each maximal commutative C^* -subalgebra of the commutator of \mathbf{A}_p is a diagonal algebra on $L^2(p)$. A state u is said to be irreducible if u cannot be expressed as the sum of two linearly independent states. The topological space of all irreducible states u on \mathbf{A} for which $u(I) = 1$, with the weak $*$ topology, is denoted by \mathfrak{R} ; also the element $I(p) \in L^2(p)$ is denoted by \hat{p} . The main theorem is the following „diagonal decomposition theorem“ for states. Given a state p and a diagonal algebra \mathbf{E} on $L^2(p)$, there exists a non-negative Borel measure q on \mathfrak{R} having the following property: if \mathbf{M} denotes the C^* -algebra of all bounded measurable functions on \mathfrak{R} , then there is an isometric $*$ -algebraic isomorphism $q \rightarrow K_q$ of \mathbf{M} on to \mathbf{E} such that $(A_p K_q \hat{p}, \hat{p}) = \int q(\lambda) \lambda(A) d q(\lambda)$, $A \in \mathbf{A}$. In particular, if \mathfrak{R} denotes the support of the measure q , then $p(A) = \int_{\mathfrak{R}} \lambda(A) d q(\lambda)$. This is called the diagonal decomposition of p relative to \mathbf{E} . The diagonal

decomposition theorem is deduced from a detailed study of „reducible“ and „center-reducible“ states. A state r is said to be reducible if, whenever p and $r - p$ are states, there exists a non-negative definite Hermitian operator K belonging to the center \mathbf{Z} of \mathbf{A} , such that $p(\mathbf{A}) = r(K\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. Denoting by $f_{\mathbf{Z}}$ the restriction to \mathbf{Z} of a linear functional f on \mathbf{A} , a state p is said to be center-reducible if $p_{\mathbf{Z}}$ is reducible as a state on \mathbf{Z} . [The word „reducible“ seems rather unhappily chosen, since all irreducible states are evidently reducible.] The set \mathfrak{S} of all multiplicative states on the center \mathbf{Z} is a compact space in the weak topology. \mathbf{Z} may be identified with $C(\mathfrak{S})$, and to the restriction $p_{\mathbf{Z}}$ of a state on \mathbf{A} corresponds a non-negative Borel measure on \mathfrak{S} which is also denoted by $p_{\mathbf{Z}}$. It is proved that if p is a center-reducible state, then to each $\lambda \in \mathfrak{S}$ in the support of $p_{\mathbf{Z}}$ corresponds a unique state λ^p on \mathbf{A} such that: (1) for each fixed $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ and $K \in \mathbf{Z}$, $\lambda^p(\mathbf{A})$ is continuous in the support of $p_{\mathbf{Z}}$ and satisfies $\lambda^p(K\mathbf{A}) = K(\lambda) \lambda^p(\mathbf{A})$; (2) $p(\mathbf{A}) = \int \lambda^p(\mathbf{A}) d p_{\mathbf{Z}}(\lambda)$, $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$. The state λ^p is called the derivative state of p at λ . The main result on reducible states is the following theorem. A state p is reducible if and only if it is a center-reducible state of which almost all the derivative states on the support of $p_{\mathbf{Z}}$ are irreducible. Here „almost all“ refers to the measure $p_{\mathbf{Z}}$. The proof of this theorem uses the result which is described in the preceding review. Finally, the theory is applied to generalize theorems of J. v. Neumann and F. Mautner on decompositions of operator algebras. F. F. Bonsall.

Yood, Bertram: Topological properties of homomorphisms between Banach algebras. Amer. J. Math. **76**, 155—167 (1954).

Let B be a real or complex Banach algebra. A mapping $x \rightarrow x^*$ of B into itself is called an involution if it is additive, real-homogeneous, of period two, and if either $(xy)^* = x^*y^*$ for all $x, y \in B$ or $(xy)^* = y^*x^*$ for all x, y . Let H and K denote the sets of self-adjoint elements and skew elements respectively and let $\varrho(x)$ denote the spectral radius of x . B , with an involution, is said to be a ϱ^* -algebra if a real function ϱ , called an auxiliary function, is defined on B which satisfies (i) $|x| \geq 0$ with equality if and only if $x = 0$, (ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, (iii) $|x| \leq \varrho(x)$ if $x \in H = K$. The author proves that every ϱ^* -algebra has continuous involution and has the uniqueness of norm property in the sense of C. E. Rickart (this Zbl. **37**, 200). Also, each homomorphism with self-adjoint range of a Banach algebra into a ϱ^* -algebra is continuous. A ϱ^* -algebra B is said to be a ϱ^* -algebra if it has an auxiliary function which defines a metric in which B is a complete (F) space. Conditions are obtained under which an algebraic isomorphism defined on a ϱ^* -algebra has a continuous inverse, and related results on bicontinuity are proved. Finally, some theorems are proved concerning homomorphisms of complex commutative Banach algebras which have non-trivial radical and are regular in the sense of G. Šilov [Trudy mat. Inst. Steklov, Nr. **21** (1947)]. It appears to the reviewer that there would be no loss of generality if the auxiliary function in a ϱ^* -algebra were required to be a norm. In fact, as pointed out by the author, we may suppose that there is an auxiliary function with $||x|| = |x|$.

If now $p(x)$ is defined by $p(x) = \sup_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} |x|$, then $p(x)$ is a norm in B (regarded as a real vector space) and we still have $p(x) \leq \varrho(x)$ for all $x \in H \cup K$. F. F. Bonsall.

Bonsall, F. F. and A. W. Goldie: Annihilator algebras. Proc. London math. Soc., III. Ser. **4**, 154—167 (1954).

Eine Banachalgebra A heißt eine Annihilatoralgebra, wenn jedes echte Links- oder Rechtsideal einen von Null verschiedenen Annihilator besitzt und wenn der rechte und der linke Annihilator von A gleich Null sind. A heißt nach Kaplansky eine duale Algebra, wenn der rechte Annihilator (I_r) des linken Annihilators I_l jedes Rechtsideals I gleich I ist und das entsprechende für Linksideale gilt. Es ist kein Beispiel einer Annihilatoralgebra bekannt, die keine duale Algebra ist. Ist eine Annihilatoralgebra eine B^* -Algebra, so ist sie stets dual. Ist M maximales abgeschlossenes Rechtsideal der Annihilatoralgebra A und ist der Durchschnitt von M_r mit dem Radikal Null, so enthält M_l ein Idempotent, und M_l ist ein minimales Linksideal von A . Jedes minimale abgeschlossene Linksideal, das nicht im Radikal liegt, besitzt ebenfalls ein Idempotent. Ist eine Annihilatoralgebra A halbeinfach, so ist die Summe aller minimalen abgeschlossenen Linksideale überall dicht in A . Ein minimales Rechtsideal erzeugt ein minimales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in A , das eine einfache Annihilatoralgebra ist, und A ist die vollständige Hülle der direkten Summe aller seiner minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale. Ein minimales Linksideal einer einfachen Annihilatoralgebra A ist ein reflexiver Banachraum X und A kann dargestellt werden als eine Algebra, deren Elemente Operatoren auf X sind, und zwar alle Operatoren mit endlichdimensionalem Bildraum und die Limites solcher Operatoren bezüglich der uniformen Norm. Auch die umgekehrte Frage wird untersucht und gezeigt, daß die Algebra F der endlichdimensionalen Operatoren auf einem Banachraum X und ihrer uniformen Limites dann und nur dann eine einfache Annihilatoralgebra ist, wenn X reflexiv ist. Unter gewissen Voraussetzungen, z. B. wenn X eine Basis besitzt, läßt sich sogar zeigen, daß F eine duale Algebra ist. G. Köthe.

Dixmier, Jaques: Sur les anneaux d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. J. r. Acad. Sci., Paris **238**, 439—441 (1954).

Es werden kurze Beweise für einige zum Teil bekannte Resultate der Theorie der Operatorringe \mathfrak{A} über einem separablen Hilbertschen Raum H gegeben, z. B.: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien zwei Operatorenringe; gibt es Elemente x bzw. $y \in H$, die zugleich separierend und erzeugend für \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} sind, so ist jeder Isomorphismus von \mathfrak{A} auf \mathfrak{B} durch einen Raumisomorphismus erzeugt. Gibt es ein separierendes z für \mathfrak{A} , so ist jede positive normale Linearform auf \mathfrak{A} von der Form (Tx, x) , $T \in \mathfrak{A}$. G. Köthe.

Dixmier, J.: Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 279—286 (1954).

Es sei M ein Faktor vom Typus Π_1 in einem komplexen Hilbertschen Raum. M_1 sei ein maximaler abelscher Operatorenteilring von M . Der durch die Linearkombinationen der unitären $U \in M$ mit $UM_1U^{-1} = M_1$ erzeugte schwach abgeschlossene Operatorerling P hat die Eigenschaft $M_1 \cap P \subseteq M$. Es heißt M_1 regulär, wenn $P = M$ gilt, singular, wenn $P = M_1$ gilt, halbregulär, wenn P ein Faktor ist. Es werden Beispiele gegeben, daß in einem approximativ endlichen Faktor maximale abelsche Teilringe sowohl regulär, wie singular, wie auch halbregulär und nicht regulär sein können. Ferner wird ein Beispiel eines Faktors vom Typus Π_1 gegeben, der zwei maximale abelsche singuläre Teilringe enthält, die nicht durch einen *-Automorphismus von M konjugiert sind. G. Köthe.

Wolfson, Kenneth G.: The algebra of bounded functions. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 10—14 (1954).

Ist G eine Teilmenge eines kommutativen Ringes R , so wird die Menge aller $x \in R$ mit $xy = 0$ für alle $y \in G$ als ein Annulet bezeichnet. Es wird bewiesen, daß eine B^* -Algebra K mit Einselement dann und nur dann isomorph (bezüglich der Norm und der *-Operation) einer Algebra $B(X)$ aller beschränkten komplexwertigen Funktionen auf einer Menge X ist, wenn jedes abgeschlossene Ideal aus K ein minimales Ideal enthält und die Summe zweier Annulets stets wieder ein Annulet ist. Als X kann die Menge aller minimalen Ideale genommen werden. G. Köthe.

Waelbroeck, Lucien: Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 556—558 (1954).

Der von der Theorie der Banachalgebren bekannte symbolische Kalkül, der die Ausdrücke $f(a)$, a Element der Algebra, f eine analytische Funktion, für gewisse f erklärt, wird auf kommutative Algebren A mit Einselement, die zugleich vollständige lokalkonvexe komplexe Räume sind, übertragen. Es wird sogar $f(a_1, \dots, a_n)$ für endlich viele $a_i \in A$ erklärt, f eine analytische Funktion von n Variablen, die auf einer als Spektrum von (a_1, \dots, a_n) bezeichneten Punktmenge des komplexen R^n analytisch sind. Diese nur skizzierte Theorie, die Resultate von H. Cartan verwendet, gilt für die Klasse der in A regulären Elemente a , d. h. solcher, für die $a - s$ für genügend großes komplexes s invertierbar ist und überdies die Funktion $(a - s)^{-1}$ in einer Umgebung von ∞ beschränkt bleibt. G. Köthe.

Halmos, Paul R.: Commutators of operators. II. Amer. J. Math. **76**, 191—198 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. **46**, 123). Es sei \mathfrak{B} die Menge der beschränkten Operatoren eines Hilbertraums \mathfrak{H} . Abweichend vom Fall endlicher Dimension gilt: Die Kommutatoren $A' = AB - BA$ ($A \in \mathfrak{B}$, $B \in \mathfrak{B}$) liegen dicht in \mathfrak{B} (im Sinn der starken Topologie). Für passende A, B ist $\|A' - 1\| < 1$. Jeder Operator aus \mathfrak{B} läßt sich als Summe zweier Kommutatoren darstellen. Jeder Operator aus \mathfrak{B} läßt sich als Produkt PQ derart darstellen, daß QP ein Kommutator ist. — Analog zum Fall endlicher Dimension gilt: Ist $A' = AB - BA$ mit A vertauschbar, so ist A' ein verallgemeinerter Nullteiler (genauer: aus $\|c_n A^n\| = 1$ folgt $\|c_n A^n A'\| \rightarrow 0$),

und es ist $\|A' - 1\| \geq 1$. Diese Ungleichung gilt auch, wenn A zwar nicht mit A' vertauschbar, aber normal oder wenigstens subnormal ist, d. h. eine normale Erweiterung in einem \S umfassenden Hilbertraum besitzt.

H. Wielandt.

Barry, John V.: On the convergence of ordered sets of projections. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 313—314 (1954).

Für die Projektionen E, F, \dots eines Banachschen Raumes X in sich ist eine (teilweise) Ordnung $E \leq F$ durch $EF = FE = E$ erklärt. Ist $\{x\}$ eine gerichtete Indexmenge und hat $\alpha \leq \beta$ auch $E_\alpha \leq E_\beta$ zur Folge, so heißt die Menge $\{E_\alpha\}$ von Projektionen natürlich geordnet. Eine Projektion E mit $E(X) = \text{sp}(\bigcup E_\alpha(X))$

und $(I - E)(X) = \bigcap (I - E_\alpha)(X)$ heißt Supremum $\bigcup E_\alpha$ von $\{E_\alpha\}$; dabei bedeutet I die identische Transformation und $\text{sp}(Y)$ die von der Teilmenge $Y \subset X$ erzeugte stark abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit. Ist $w(Y)$ die schwache Hülle von $Y \subset X$, so heißt ein Punkt $y_x \in \bigcap w(\{E'_\beta(x) \mid \beta \geq x\})$ schwacher x -Häufungs-

punkt von $\{E_\alpha\}$. — Verf. beweist den Satz: Eine natürlich geordnete, gleichmäßig beschränkte Menge $\{E_\alpha\}$ von Projektionen ist dann (und natürlich auch nur dann) stark konvergent gegen $\bigcup E_\alpha$, wenn sie für jedes $x \in X$ einen schwachen x -Häufungs-

fungspunkt besitzt. Als Corollar ergibt sich in Verallgemeinerung eines Satzes von Lorch (dies. Zbl. **20**, 307): Ist X reflexiv, so ist die natürlich geordnete, gleichmäßig beschränkte Menge $\{E_\alpha\}$ von Projektionen stark konvergent gegen $\bigcup E_\alpha$.

H. König.

Moppert, K. F.: Über das Rechnen mit Operatoren. Elemente Math. **9**, 73—76 (1954).

Guy, Roland: Sur une équation vectorielle intégrale dans un espace de Hilbert abstrait. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 46—49 (1954).

Copping, J.: Application of a theorem of Pólya to the solution of an infinite matrix equation. Pacific J. Math. **4**, 21—28 (1954).

Es wird die Gleichung $AX - XB = C$ (alles unendliche Matrizen) auf ihre Lösbarkeit untersucht. Unter Benützung eines Lösbarkeitskriteriums von G. Pólya wird bewiesen, daß für jedes B und C unendlich viele Lösungen existieren, wenn A den folgenden Bedingungen genügt: Es gibt unendlich viele $a_1 \neq 0$, und es ist $\liminf_j |a_{1j}| + |a_{2j}| + \dots + |a_{i-1,j}| = 0$ für jedes $i \geq 2$. Es gibt dann sogar

Lösungen, die oberhalb und in der Hauptdiagonale verschwinden. Schließlich wird die Unlösbarkeit von $AX - XA = I$ in einem Ring mit assoziativer Schranke (Terminologie nach R. G. Cooke, dies. Zbl. **40**, 25) bewiesen. Satz und Beweis finden sich in fast genau derselben Form bereits bei H. Wielandt (dies. Zbl. **35**, 199).

G. Köthe.

Audin, Maurice: Sur certaines singularités des transformations linéaires bornées. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2221—2222 (1954).

Für die Transformation A des komplexen Banachraumes \mathfrak{E} und die komplexe Zahl λ bestehe $\mathfrak{M}_n(A; \lambda)$ aus allen $\varphi \in \mathfrak{E}$ mit $(I - \lambda A)^n \varphi = 0$, und es sei $\mathfrak{R}(A; \lambda) = \bigcup_{n=1,2,\dots} \mathfrak{M}_n(A; \lambda)$.

Verf. nennt λ Riesz-Punkt von A , wenn $\mathfrak{R}(A; \lambda)$ endliche Dimension hat, und verallgemeinert zwei von F. Riesz über vollstetige Transformationen bewiesene Sätze: Ist der singuläre Punkt λ von A Riesz-Punkt, so ist er erstens isoliert, zweitens läßt sich A in bezug auf λ kanonisch zerlegen in zwei einander annullierende Transformationen, von denen die eine von endlichem Rang ist und den einzigen singulären Punkt λ besitzt, während die singulären Punkte der anderen Transformation mit den von λ verschiedenen von A zusammenfallen. — Weiter ist jeder Riesz-Punkt λ auch Fredholm-Punkt von A , d. h. $\mathfrak{M}_1(A; \lambda)$ und $\mathfrak{M}_1(A^*, \lambda^*)$ haben die gleiche endliche Dimension (A^* adjungierte Transformation); nach Sätzen von Nikol'skij, Kraškovskij und Goldman bilden die Riesz-Punkte also genau diejenigen Komponenten des (offenen) Bereiche Φ_A aller Fredholm-Punkte, die nicht nur aus singulären Punkten bestehen. — Schließlich erweis-

ich der vom Verf. in einer früheren Note (dies. Zbl. **50**, 324) definierte Schmidsche Radius ϱ_A als identisch mit dem von Nikol'skij eingeführten Fredholmschen Radius R_1 (dem Radius der größten in Φ_A gelegenen offenen Hyperkugel um den Nullpunkt). — In der letzten Zeile jener früheren Note muß es übrigens heißen: „ ϱ_A est-il égal à R_A ?“.
H. König.

Williamson, J. H.: Compact linear operators in linear topological spaces. J. London math. Soc. **29**, 149—156 (1954).

Linear topological space E : linear space over the complex field K with a Hausdorff topology such that the mappings $(x, y) \rightarrow x + y$ of $E \times E$ into E and $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ of $K \times E$ into E are continuous. A set X in E is said to be circled if $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ imply $\lambda x \in X$. Every neighbourhood of 0 includes a circled neighbourhood. I : identity operator. Compact linear operator U : linear mapping of E into itself such that there exists a neighbourhood N_0 (of 0) whose image $U(N_0)$ is included in a compact set. $T = I - U$. The paper contains a simple proof for Theorem 1 („Fredholm alternative“: Either T is a bicontinuous mapping of E into itself or there is a non-zero point $x \in E$ such that $Tx = 0$). This is a generalization of J. Leray's (this Zbl. **37**, 357) theorem concerning the case of locally convex spaces, deduced by Leray from his previous results on non-linear mappings in convex spaces. Having observed that sections I—IV of Leray's paper do not depend on local convexity the author asserts the extension of the theory to general linear topological spaces by simply referring to Leray's proofs, mentioning only that in the proof of Lemma 4.2, „convex“ has to be replaced by „circled“. The transposition of section V of Leray's paper is tackled. An explicit proof is given for Theorem 2: n denoting the least positive integer such that $T^{n+r}(E) = T^n(E)$, and T^* the adjoint operator of T , the dimension of $\bar{T}^r(0)$ is equal to that of $\bar{T}^{*r}(0)$ for $r = 1, 2, \dots, n$.
Chr. Pauc.

Ruston, A. F.: Operators with a Fredholm theory. J. London math. Soc. **29**, 318—326 (1954).

Diese Arbeit schließt an zwei frühere des Verf. an (dies. Zbl. **43**, 110; **50**, 342). Ein Operator K auf einem komplexen Banachraum \mathfrak{B} heißt ein Rieszscher Operator, wenn gilt: (1) Die Gleichung $(I - \lambda K)^* x = 0$ hat für jedes λ einen endlichdimensionalen Lösungsraum, der von einem bestimmten n_0 ab sich gleich bleibt; (2) der Bildraum von $(I - \lambda K)^*$ ist ein abgeschlossener Teilraum von \mathfrak{B} , der ebenfalls für genügend großes n unverändert bleibt; (3) die Eigenwerte von K haben keinen endlichen Häufungspunkt. K heißt asymptotisch quasikompakt, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z(K)^n\|^{1/n} = 0$ ist, wobei $z(K) = \inf \|K - C\|$ ist; das Infimum ist über alle linearen kompakten Operatoren C zu nehmen. Es wird bewiesen, daß die Rieszschen Operatoren mit den asymptotisch quasikompakten zusammenfallen und daß dies auch genau alle Operatoren sind, für die die Fredholmsche Theorie gilt.
G. Köthe.

Straus, A. V.: Verallgemeinerte Resolventen symmetrischer Operatoren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **18**, 51—86 (1954) [Russisch].

L'A. expose ses recherches sur les résolvantes généralisées avec des conditions et démonstrations plus simples et y ajoute quelques nouveaux résultats. Le théorème principal caractérise les familles R_λ d'opérateurs qui sont des résolvantes généralisées des opérateurs symétriques fermés, dont le domaine n'est pas nécessairement dense dans l'espace H considéré (voir aussi A. V. Straus, ce Zbl. **49**, 89).
G. Marinescu.

Krasnosel'skij, M. A. und L. A. Ladyženskaja: Die Urysohnschen Sätze über die Spektren inhomogener Operatoren. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 1 (59), 134—135 (1954) [Russisch].

Sikkema, P. C.: Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 176—187 (1954).

Die Untersuchungen von Teil I (dies. Zbl. **52**, 127) werden fortgesetzt. In einer ersten Bemerkung wird gezeigt, daß eine im letzten Satz von Teil I angegebene Schranke nicht verbessert werden kann. Dieser Beweis war vorher nur in einem Spezialfall durchgeführt worden. Es folgen die Beweise von drei Hilfssätzen, die eine Vorbereitung für die angekündigte Fortsetzung darstellen.
H.-J. Kowalsky.

Laskar, Williams: Généralisation de la méthode de factorisation de Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 772—774 (1954).

Die ursprünglich für Differentialgleichungen formulierte Methode wird auf einen Hamiltonoperator im abstrakten Hilbertraum übertragen. *G. Höhler.*

Nečepurenko, M. I.: Über Čebyševs Methode für Funktionalgleichungen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 2 (60), 163—170 (1954) [Russisch].

Bekanntlich ist die Bestimmung der Wurzeln einer analytischen Gleichung unter Beschränkung auf hinreichend enge Umgebungen auch mit Hilfe der Umkehrreihe möglich, wie sie Euler, an Newton anknüpfend, entwickelt hat — freilich ohne Konvergenzdiskussion. Im 5. Band der neuen Čebyšev-Ausgabe ist eine Studentenarbeit Čebyševs veröffentlicht, in der diese Reihe diskutiert und namentlich die unter Benutzung der drei ersten Glieder mögliche Iteration (d. h. wiederholte inverse Interpolation mit 3 zusammenfallenden Interpolationspunkten) mit kubischer Konvergenz behandelt wird. In der vorliegenden Note wird im ersten Abschnitt die dieser Umkehrreihe, die der Verf. als die Čebyševsche Reihe bezeichnet, entsprechende Reihenentwicklung für die Umkehrung der Operatoren in Banach-Räumen entwickelt. Zugleich wird die Abschätzung des Restgliedes angegeben durch Übertragung der Lagrangeschen Restgliedformel der Taylorreihe, unter Anknüpfung an den Čebyševschen Vorschlag, diese Formel auf das Restglied der Umkehrreihe anzuwenden. Im zweiten Abschnitt wird das oben erwähnte kubisch konvergente Iterationsverfahren gleichfalls auf Auflösung der Gleichungen im Banach-Raum angewandt und die zugehörigen Fehlerabschätzungen entwickelt. Allerdings ergeben sich so beim Verf. nur Fehlerabschätzungen, die der quadratischen Konvergenz entsprechen, während wohl kaum zu bezweifeln ist, daß auch in dieser Verallgemeinerung die Konvergenz den kubischen Charakter hat. Im dritten Abschnitt der Note werden die Betrachtungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung angewandt. *A. Ostrowski.*

Bochner, S.: Boundedness and stationarity of time series. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 289—294 (1954).

Eine Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. in seinem Buch „Vorlesungen über Fouriersche Integrale“ (dies. Zbl. 6, 110) über die Differenzengleichung

$$\sum_{e=1}^r c_e x(t + \omega_e) = y(t).$$
 Insbesondere werden Aussagen über das Spektrum von $y(t)$ gemacht, wenn in einem gewissen verallgemeinerten Sinn $x(t)$ „beschränkt“ und $y(t)$ „stationär“ ist. *G. Doetsch.*

Aczél, J.: Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen. Publ. math. Debrecen 3, 119—132 (1954).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, einen Beitrag zum Aufbau einer einheitlichen Theorie gewisser Klassen von Funktionalgleichungen zu liefern. Deshalb wird eine große Reihe von allgemeinen Lösungsmethoden, Existenz- und Eindeutigkeitsätze aufgeführt. Die behandelten Typen von Funktionalgleichungen sind: (1) $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$; (2) $f(ax+by+c) = F[f(x), f(y)]$; (3) $G[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0$; (4) $f(x+y) = H[f(x), y]$; (5) $F[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0$. Die Funktionen F, G, H sind Bekannte, f ist die Unbekannte. — Die Hauptresultate sind: I. Die Gl. (1) hat dann und nur dann eine streng monotone und stetige Lösung, falls $F(x, y)$ in beiden Veränderlichen streng monoton und stetig ist und die Bedingung $F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)]$ erfüllt. Hat (1) die Lösung $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form $f(ax)$ auch Lösungen der Gl. und nur diese. II. Die Gl. (2) hat dann und nur dann eine stetige und streng monotone Lösung, falls $F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)]$; $F(x, x) = x$; $F(x, y) = F(y, x)$ ist. III. Es wird ein Gleichungssystem angegeben und gezeigt, daß die durch dieses definierten Funktionen (und nur diese) die Lösungen der Funktionalgleichung $G[f(x+y), f(x-y), x] = H[f(x), y]$ liefern. IV. Erfüllt für ein a und beliebige x, y die Funktion $H(u, v)$ die folgende Bedingung: $H(a, x+y) = H[H(a, x), y]$, so ist die Funktion $f(t) = H(a, t)$ eine Lösung der Gl. (1). Ist H auch streng monoton, so ist f streng monoton, und es gibt außer den Funktionen $g(t) = f(t+A)$ keine weiteren Lösungen der Gl. (4). V. Falls ein a existiert, für das die Gl. $F(z, z, z, a, x, 0) = 0$ keine Identität ist, so kann nur die aus ihr gewonnene Funktion $z = f(x)$ Lösung der Funktionalgleichung (5) sein. Sie enthält höchstens eine willkürliche Konstante a . Sind die Gleichungen $F(z, u, a, z, 0, t) = 0$; $F(w, u, z, v, t, 2t) = 0$; $F(w, z, v, z, t, 2t) = 0$; $F(v, a, z, z, t, t) = 0$ unabhängig und nicht identisch erfüllt, so kann nur die aus ihnen gewonnene Funktion $z = f(t)$ der Gl. (5) Genüge leisten. Sie ist die allgemeine Lösung von (5) und enthält höchstens eine willkürliche Konstante. *St. Fenyő.*

Praktische Analysis:

Ording, F. B.: Genauigkeit bei der Winkelmessung. Tekniske Skr. 9N, 14 S. (1954) [Norwegisch].

Hastings jr., Cecil and James P. Wong jr.: Analytical approximations. Math. Tables Aids Comput. 8, 46—47 (1954).

Eine Zusammenstellung von Näherungsformeln; die meisten (12 von 21) betreffen $e^{-x} I_0(x)$ und $e^{-x} I_1(x)$ [$I_0(x)$, $I_1(x)$ Besselsche Funktionen eines imaginären Arguments].

Maehly, Hans J.: Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen. Z. angew. Math. Phys. 5, 260—263 (1954).

Um die Nullstellen x_k eines Polynoms $P(x) = \sum_{v=0}^n c_v x^v$ zu berechnen, kann man von $s_m = \sum_{k=1}^m (x_k - x)^{-m} = \sum u_k^m$ mit $m = 1, 2, \dots$ ausgehen, indem man den Zusammenhang

der s_m mit $P(x)$ $q_i = d^i P/dx^i$ heranzieht. Unter gewissen Annahmen bzw. Vernachlässigungen gewinnt man hieraus einerseits die Newtonsche Formel, andererseits die Laguerresche Formel und Verallgemeinerungen davon. Im letzteren Falle erhält man kompliziertere Formeln (z. B. für u_k quadratische Gleichungen), die aber eine hohe Konvergenzgüte besitzen. Wieweit eine solche Mehrarbeit lohnt, soll später mitgeteilt werden. Bezüglich der Anwendung bei Rechenautomaten wird der Standpunkt vertreten, daß man eine gute Konvergenz verlangen soll, auch wenn kompliziertere Formeln herangezogen werden müssen. — Abschließend wird darauf eingegangen, wie bei Kenntnis der Wurzeln x_l für $l = 1, 2, \dots, k < n$ die restlichen Wurzeln unter Vermeidung des üblichen Divisionsverfahrens und der damit verbundenen Rundungsfehler bestimmt werden können.

H. Unger.

Collatz, L.: Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei algebraischen und transzendenten Gleichungen. Z. angew. Math. Mech. 34, 70—71 (1954).

Verf. zeigt, daß das „vereinfachte Newtonsche Verfahren“ $z_{k+1} = z_k - f(z_k)/A$ (A eine geeignete Konstante) gegen eine Lösung von $f(z) = 0$ konvergiert, wenn $|A - f'(z)| \leq K < 1$ für alle z eines Bereichs F gilt und wenn der durch $|z - z_1| \leq K(1 - K)^{-1} |z_1 - z_0|$ definierte Kreis S ganz in F liegt. Dieser Kreis, wobei man z_1, z_0 auch durch z_{k+1}, z_k ersetzen darf, enthält die Nullstelle. Für algebraische Gleichungen kann man die Schranke K verhältnismäßig leicht aus dem zweiten Polynom des Hornerischen Schemas gewinnen. — Zahlenbeispiele.

J. Weissinger.

Barna, Béla: Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. I. Publ. math. Debrecen 3, 109—118 (1954).

A. Rényi [Mat. Lapok 1, 278—293 (1950)] hat die Fragen 1. nach der Mächtigkeit der Punkte x_0 , bei welchen die zugehörige Iterationsfolge $\{x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n); n = 0, 1, \dots\}$ für ein beliebiges reelles Polynom f mit lauter reellen Nullstellen nicht zu einer Wurzel von $f(x) = 0$ führt und 2. nach der Existenz solcher Polynome, bei denen die Menge der Divergenzpunkte ein Intervall enthält, aufgeworfen. Im Spezialfall, daß f ein Polynom 4. Grades mit lauter reellen, voneinander verschiedenen Nullstellen ist, hat Verf. (dies. Zbl. 42, 365) diese Fragen beantwortet und beginnt jetzt mit der vorliegenden Note auch für ein reelles f vom Grade $m \geq 4$ und lauter reellen Nullstellen $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m-1}$ eine erschöpfende Antwort zu geben. — Mit $N_0(x) = x$, $N_1(x) = x - f(x)/f'(x)$, \dots , $N_{m-1}(x) = N_1(N_m(x))$ entsteht, von einer beliebigen Stelle $x = x_0$ ausgehend, deren zugehörige Iterationsfolge (*) $\{x_{n+1} = N_1(x_n); n = 0, 1, \dots\}$. Der Punkt $x = \xi_0$ ist Fixpunkt r -ter Ordnung, wenn eine kleinste natürliche Zahl r mit $N_r(\xi_0) = \xi_0$ existiert. Für ein solches ξ_0 sind dann auch ξ_1, \dots, ξ_{r-1} — die zu ξ_0 konjugierten — Fixpunkte r -ter Ordnung, die zusammen mit ξ_0 einen r -gliedrigen Zyklus bilden; die Iterationsfolge eines Fixpunktes enthält daher nur endlich viele verschiedene Punkte. (Die Existenz von Fixpunkten zu beliebig vorgegebener Ordnung läßt sich verhältnismäßig einfach beweisen.) Ist N_{-1} die inverse Funktion von N_1 , dann bilden die Punkte der Folge $\{x_{n+1} = N_{-1}(x_n); n = 0, 1, \dots\}$ die Invers-Iterierten zu x_0 . Bei der Bildung dieser Folge wird nur von solchen Stellen x_0 ausgegangen, für die $N_{-1}(x_0)$ genau $(m-2)$ -wertig ist. [Stellenweise ist diese Umkehrfunktion nämlich sogar $(m-1)$ -deutig, z. B. in hinreichend kleinen einseitigen Umgebungen der Nullstellen ξ_μ , falls diese nicht zugleich Wendepunkte sind.] Die Stelle x_0 heißt Konvergenzpunkt, wenn ihre Iterationsfolge (*) konvergiert, sonst Divergenzpunkt. Divergenzpunkte sind z. B. die Abszissen η_ν ($\nu = 0, 1, \dots, m-2$) der Extremalwerte von f ; auch alle ihre Invers-iterierten sind isolierte Divergenzpunkte (1. Art). Die Iterationsfolgen dieser Punkte führen nach endlich vielen Schritten zum Punkt ∞ . Fixpunkte zweiter und höherer Ordnung und ihre Invers-iterierten sind Divergenzpunkte (2. Art); sie haben beschränkte und nur aus endlich vielen verschiedenen Punkten bestehende Iterationsfolgen. Die Menge der Divergenzpunkte 1. und 2. Art ist abzählbar. Da andererseits auch bewiesen wird, daß die Gesamtheit aller Divergenz-

punkte nicht abzählbar unendlich ist, gibt es also noch Divergenzpunkte (3. Art), die eine überabzählbare Menge bilden. Die Iterationsfolge jedes dieser Punkte ist beschränkt und enthält unendlich viele verschiedene Punkte.

H. Bilharz.

Derwidué, L.: La méthode de L. Couffignal pour le résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Mathesis 63, 9—12 (1954).

Die vom Verf. beschriebene „Methode von Couffignal“ zur Auflösung linearer Gleichungssysteme ist mathematisch äquivalent mit der Cramerschen Regel. Die Methode ist aber rechentechnisch insofern interessant, als die in den Cramerschen Formeln auftretenden Determinanten durch eine nach Chiò benannte Eliminationsmethode simultan berechnet werden können. Eine nähere Betrachtung zeigt allerdings, daß sich das so erhaltene Rechenverfahren in keiner Weise von der sog. Gauss-Jordanschen Eliminationsmethode mit Zeilen- und Spalten-Vertauschung unterscheidet.

H. Rutishauser.

Young, David: On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices. J. Math. Physics 32, 243—255 (1954).

Wenn man das lineare Gleichungssystem $Au - d = 0$ mit symmetrischer und positiv definiter Koeffizientenmatrix A mit dem Gesamtschrittverfahren von Richardson löst, so erhält man u bekanntlich als Grenzwert von Vektoren u_k , die man von einem Anfangsvektor u_0 ausgehend nach der Rekursionsformel $u_{k+1} = u_k - \beta_k(Au_k - d)$ berechnet. Die β_k sind die sog. Relaxationsfaktoren, deren Wahl die Konvergenz des Verfahrens sehr stark beeinflusst. — Verf. geht nun von der bekannten Tatsache aus, daß man den Fehlervektor $e_k = u_k - u$ von u_k explizite in der Form $e_k = p_k(A)e_0$ darstellen kann, wobei das Polynom $p_k(\lambda)$ durch $p_k(\lambda) =$

$\prod_{j=0}^{k-1} (1 + \beta_j \lambda)$ definiert ist. — Ist I ein Intervall, das mit Sicherheit alle Eigenwerte von $-A$ enthält, so ist das Problem, e_k klein zu machen, darauf zurückgeführt, ein Polynom $p_k(\lambda)$ vom Grade k mit $p_k(0) = 1$ zu finden, dessen Absolutbetrag im Intervall I unterhalb einer möglichst kleinen Schranke bleibt. Da die Tschebyscheff-Polynome für das Intervall I im wesentlichen diese Eigenschaft aufweisen, wählt Verf. nach Festlegung einer „Ordnung“ m die reziproken Werte der Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms m -ter Ordnung für das Intervall I als Relaxationsfaktoren $\beta_0, \dots, \beta_{m-1}$ (für $k \geq m$ werden die β_k periodisch wiederholt). — Die so gegenüber dem gewöhnlichen Gesamtschrittverfahren ohne Überrelaxation erreichte Konvergenzverbesserung ist erheblich; allerdings wird die Konvergenz beeinträchtigt, wenn man I und m mangels genauer Kenntnis der Eigenwerte von A ungünstig wählt.

H. Rutishauser.

Collatz, L.: Zur Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen. Z. angew. Math. Mech. 34, 71—72 (1954).

$A + F$ und $r + s$ seien die mit den Fehlern f_{ik} bzw. s_i behafteten Matrizen, mit denen numerisch eine Näherungslösung y des Gleichungssystems $Ax = r$ ermittelt wird. Mit $f = (A + F)y - r - s$ kann folgende Abschätzung angegeben werden:

$$|y - x| \leq (|s| + |f| + |\bar{F}| \cdot |y|) / (|A + F| - |\bar{F}|)$$

($|G|$ unterer, $|\bar{G}|$ oberer Betrag einer Matrix G ; $|v|$ Betrag eines Vektors v). Im Falle einer positiv definiten hermiteschen Matrix G werden zur Abschätzung von $|G|$ die Ergebnisse von H. Bartsch (vgl. dies. Zbl. 55, 12) verwendet.

H. Unger.

Gavrilov, Ju. M.: Über die Konvergenz von Iterationsprozessen und Kriterien für die Definitheit quadratischer Formen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 18, 87—94 (1954) [Russisch].

Ausgehend vom bekannten Konvergenzkriterium für das Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in Einzelschritten nach Seydel gelangt Verf. bei der Konvergenzuntersuchung des Iterationsverfahrens in Gesamtschritten zu einem analogen, aber durch eine Zusatzbedingung vermehrten notwendigen und hinreichenden Kriterium. Deshalb ist die Klasse der symmetrischen Matrizen mit positiven Hauptdiagonalelementen, für die das Verfahren in Einzelschritten konvergiert, größer als die Klasse, für die das Verfahren in Gesamtschritten konvergiert. Im allgemeinen ist es in der praktischen Analysis üblich, das Gleichungssystem vor der Iteration so umzuformen, daß es eine Matrix mit verschwindenden Hauptdiagonalelementen aufweist. Verf. benutzt außerdem eine Umformung, bei der diese Elemente nicht verschwinden, und zeigt mit Hilfe eines notwendigen und hinreichenden Konvergenzkriteriums, daß dann die Klasse der zugelassenen symmetrischen Matrizen für das Verfahren in Gesamtschritten weiter ist als bei der üblichen Umformung. Schließlich werden noch zwei Definitheitskriterien für quadratische Formen angegeben, die auf der Konvergenz der Iterationsverfahren in Einzel- bzw. Gesamtschritten beruhen.

H. Brandt.

Curtiss, J. H.: „Monte Carlo“ methods for the iteration of line-operators. J. Math. Physics 32, 209—232 (1954).

The author deals with the iteration $u_{N+1} = L(u_N) + c$, where $L(u)$ is an integral transform of a function $u(y)$ or the transformation of a vector (u_1, \dots, u_n) by matrix multiplication. He designs a stochastic („Monte Carlo“) method for the computation of u_N , considered as the expected value of a suitably constructed random variable, and discusses its connection with other model sampling procedures, e. g. for the inversion of matrices, and with random walk problems. The variance of the results (distinct from inaccuracies of computation) is also studied in some detail.

S. Vajda.

Booth, Andrew D.: Bashfort-Adams method for the numerical solution of differential equations. Nature 173, 635—636 (1954).

Ceschino, Francis: Critère d'utilisation du procédé de Runge-Kutta. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 986—988 (1954).

Betrachtet wird das gewöhnliche Runge-Kutta-Verfahren für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$. An der Stelle $x_1 = x_0 + h$ habe man bei der Berechnung von y_1 den Fehler ε_1 , der sich zusammensetzt aus dem Verfahrensfehler von der Größenordnung h^5 und dem Abrundungsfehler, der von derselben Größenordnung angenommen wird. Nimmt man $(\partial f / \partial y)_{y=y_1} = q$ konstant im Intervall x_0, x_1 an, so zieht der Fehler ε_1 für y_1 den Fehler

$$\varepsilon_1 = h \varepsilon_1 q (1 - h q 2! + h^2 q^2 3! - h^3 q^3 4!) \approx \varepsilon_1 e^{hq}$$

für y_2 nach sich, wozu ein zu ε_1 analoger Fehler ε_2 tritt. Für y_s bekommt man so schließlich, falls man alle ε_i durch ein festes ε ersetzt, den Fehler $\varepsilon(e^{shq} - 1)/(e^{hq} - 1)$. Im Fall $q > 0$ ist daher das Verfahren hinsichtlich der Fehlerfortpflanzung instabil.

W. Schulz.

Cohn, George I. and Bernard Saltzberg: Solution of non-linear differential equations by the reversion method through the first thirteen terms. J. appl. Phys. 25, 252—254 (1954).

Stellmacher, K. L.: Über erzwungene nicht-lineare Schwingungen hoher Erregerfrequenz und ihre Stabilität. Z. angew. Math. Mech. 34, 105—119 (1954).

Die mod 2 periodischen Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{q} = \alpha F(x, t, q)$ (F in allen drei Veränderlichen regulär, in t mod 2 periodisch) werden durch einen Potenzreihenansatz

$$(1) q = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{x}_k \text{ mit } \tilde{x}_k = x^k e^{i k t} \text{ näherungsweise bestimmt. Die Konvergenz von (1)}$$

wird bewiesen. Die verschiedenen Fälle, auf die die Berechnung der Gleichgewichtslagen q_0 und der Verzweigungen der periodischen Lösung führt, werden diskutiert. Zur Klärung der Stabilität der periodischen Lösung wird die Jacobische Derivierte $(2) d^2u/dt^2 + h(t)u = 0$ bei $\partial F / \partial q = h$ durch einen Floquetschen Ansatz $u = e^{i \omega t} v$ angenähert. Verf. benutzt nicht den im allgemeinen üblichen Weg über die Hillsche Determinante, sondern nähert μ und v durch Potenzreihen in x bzw. \tilde{x}_k an, deren Konvergenz gesondert bewiesen wird. — Diese Methode wird auf die Differentialgleichung des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt angewendet. Hier tritt ein zweiter von x unabhängiger Parameter auf. Diesen setzt Verf. proportional x und zeigt, daß eine Proportionalität zu x^0 oder x^2 mechanisch unbefriedigende Ergebnisse bringt. So erhält Verf. die Gleichgewichtslagen und deren Stabilitätsverhalten für lineare und elliptisch-polarisierte harmonische Bewegung des Aufhängepunktes wie auch für die durch ein Schubkurbelgetriebe erregte Bewegung. So verbessert Verf. frühere Untersuchungen (u. a. vom Ref.), die an Stelle der Hillschen Gleichung (2) eine Mathieusche Gleichung diskutierten. — Die Arbeit enthält einige Druckfehler, die aber die Ergebnisse nicht beeinflussen.

W. Haucke.

Collatz, L.: Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. Arch. der Math. 5, 233—240 (1954).

Im Raum der unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_m sei B ein Bereich mit den Randflächen $\Gamma_\mu: F(x_1, \dots, x_m, u)$ bzw. $\gamma_\mu(x_1, \dots, x_m)$ seien gegebene Funktionen auf B bzw. Γ_μ und $L[u]$ bzw. $\Gamma_\mu[u]$ homogene lineare Differentialausdrücke der Funktion $u(x_1, \dots, x_m)$. Das „vereinfachte Newtonsche Verfahren“ zur Lösung

der Randwertaufgabe

$$L[u] = F \text{ in } B, \quad U_\mu[u] = \gamma_\mu \text{ auf } \Gamma_\mu \quad (\mu = 1, \dots, k)$$

besteht in der fortgesetzten Lösung der linearen Randwertaufgabe

$$L[\eta_n] - \eta_n F_u(x_j, u_0) = F(x_j, u_n) - L[u_n], \quad U_\mu[\eta_n] = 0, \quad \eta_n = u_{n+1} - u_n \\ (n = 0, 1, \dots), \text{ wobei man sich praktisch oft mit dem ersten Schritt}$$

$$L[u_1] = F(x_j, u_0) + (u_1 - u_0) F_u(x_j, u_0), \quad U_\mu[u_1] = \gamma_\mu,$$

ausgehend von einer ziemlich beliebigen Funktion u_0 , begnügen muß. Verf. gibt einige, praktisch oft erfüllte Bedingungen für die Existenz und Einzigkeit der Lösung u und die Konvergenz der Folge u_n gegen u nebst einer Fehlerabschätzung an und erläutert die Methode an dem Beispiel $y'' = y + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 0$. Die Beweise stützen sich auf Sätze über Iteration in Banachschen Räumen (dies. Zbl. 48, 98; 46, 34).

J. Weissinger.

Williams, Kenneth P.: The numerical integration of $x''(t) = G(x)$. Math. Tables Aids Comput. 8, 121—122 (1954).

Hayes, Wallace D.: The method of superposition of planar wave systems. J. aeronaut. Sci. 21, 282 (1954).

M. H. Clarkson (Quart. J. Mech. appl. Math., erscheint demnächst) gab mittels der Rieszschen Methode eine Integraldarstellung für diejenige in $z > 0$ interessierende Lösung von $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$, die für $x < 0$ die Bedingung $\varphi = 0$ erfüllt, für $x \geq 0$ auf dem oberen Ufer von $z = 0$ dagegen vorgegebene Normalableitung $\varphi_z(x, y)$ hat. Diese Clarksonsche Lösung wird vom Verf. mittels geeigneter integraler Überlagerung von ebenen Wellen verifiziert.

H. Behrbohm.

Wagner, Carl: On the numerical solution of Volterra integral equations. J. Math. Physics 32, 289—301 (1954).

Frühere Arbeiten über numerische Auflösung von Volterraschen Integralgleichungen $\varphi(x) = f(x) + g(x) \int_0^x q(x) K(x, z) dz$ werden kurz referiert. Dann wird eine Lösungsmethode entwickelt, bei der die unbekannte Funktion $q(x)$ durch einen quadratischen Ausdruck approximiert wird und die sich auch auf nichtlineare Integralgleichungen übertragen läßt. Auch auf die Frage der anzuwendenden Intervallbreite wird eingegangen. Für Kerne der wichtigen Form $K(x, z)$ werden weitere Entwicklungen gegeben sowie ein Beispiel aus der Theorie der Wärmeströmung, mit in gewissen Fällen notwendigen Modifikationen des allgemeinen Verfahrens. Auf die Möglichkeit der instrumentellen Auswertung auftretender Stieltjesintegrale wird hingewiesen.

E. J. Nyström.

Zemanian, Armen H.: An approximate method of evaluating integral transforms. J. appl. Phys. 25, 262—266 (1954).

Um eine Integraltransformation $F(s) = \int_a^b f(t) H(s, t) dt$ numerisch auszurechnen, wird sie zunächst durch partielle Integration umgeformt:

$$F(s) = [f(t) G(s, t)]_a^b - \int_a^b \frac{df}{dt} G(s, t) dt \quad \text{mit} \quad G(s, t) = \int H(s, t) dt.$$

Dann wird die zu transformierende Funktion $f(t)$ durch ein Polygon approximiert und df/dt durch das Steigungsmaß der Polygonseiten ersetzt. Die Approximationsformeln werden explizit angegeben für die Laplace-, Fourier-, Mellin- u. Hankel-Transformation.

G. Doetsch.

Best, G. C.: A minimum problem solved by mesh methods. Math. Tables Aids Comput. 8, 11—13 (1954).

Verf. zeigt am Beispiel der Variationsaufgabe $y(0) = y(1) = 1$, $J =$

$\int_0^1 y^{-1} (1 + y'^2)^{1/2} dx = \text{Min.}$, daß es vorteilhaft sein kann, nicht die Eulersche (hier nichtlineare) Differentialgleichung, sondern unmittelbar das Differenzenverfahren zu verwenden; es werden Näherungswerte y_k bei $x = kh$ (mit $h = 1/8$) eingeführt, J angenähert durch die y_k ausgedrückt, für die y_k das nichtlineare Gleichungssystem $\mathcal{E}J \mathcal{E} y_k = 0$ aufgestellt, dieses auf eine für Anwendung einer Iteration bequeme Form gebracht, y'_k -Werte und aus diesen durch numerische Integration die Ausgangswerte y_k für die nächste Iteration berechnet. Die Zahlenrechnung zeigt rasche Konvergenz.

L. Collatz.

Price, P. C.: Gauss's formula of numerical integration and the design of experiments. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 491—494 (1954).

Kane, R. P.: Practical methods of harmonic analysis for geophysical problems. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **39**, 117—126 (1954).

Verf. gibt eine schnell fördernde praktische Methode an, aus 12 gegebenen Beobachtungswerten die Fourierkoeffizienten der ersten beiden Ordnungen zu berechnen. Diese Methode soll erlauben, in etwa 5 Minuten aus 12 zweistündlichen Werten einer täglichen Variation die Komponenten der Tages- und Halbtagsperiode ohne Zuhilfenahme von Tafeln oder Rechenmaschinen zu ermitteln. Eine Erweiterung des Verfahrens auf Folgen von 24 Werten wird angedeutet.

K. Stumpff.

Müller, Max: Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten. Math. Z. **60**, 81—87 (1954).

Nach einem von Terebesi beschriebenen Verfahren lassen sich die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer im Intervall $(0, \omega)$ graphisch gegebenen Funktion $f(x)$ aus den mit Hilfe eines Planimeters leicht bestimmbar Größen

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2\omega} \int_0^\omega f(x) C_n(x) dx = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{a_l(2l+1)n}{2l+1}, \quad \sigma_n = \frac{\pi}{2\omega} \int_0^\omega f(x) S_n(x) dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l(2l+1)n}{2l+1}$$

entwickeln, wo $C_k(x) = \text{sign} [\cos (2\pi/\omega) kx]$, $S_k(x) = \text{sign} [\sin (2\pi/\omega) kx]$ die bekannten Gitterfunktionen bedeuten, die in periodischem Wechsel die Werte ± 1 annehmen. Da in praktischen Fällen die nach l fortschreitenden Reihen sehr rasch konvergieren, genügt es, die ersten l der Größen $\gamma_n, \sigma_n, a_n, b_n$ allein zu betrachten und das so entstehende System von $2l$ linearen Gleichungen nach den a_n, b_n aufzulösen. Verf. untersucht die bisher anscheinend noch ungelöste Frage der Konvergenz dieses Näherungsverfahrens und gibt für den Fall eines quadratisch integrierbaren $f(x)$ den Konvergenzbeweis für die durch Umkehrung obiger Reihen gewonnenen Ausdrücke für a_n, b_n . Er gibt ferner Abschätzungen für die Restfehler der Terebesischen Näherungen $a_n^{(l)}, b_n^{(l)}$ an.

K. Stumpff.

Blanch, Gertrude: On modified divided differences. I. Math. Tables Aids Comput. **8**, 1—11 (1954).

Zur Interpolation reeller Funktionen mit nicht äquidistanten Ordinaten werden an Stelle der üblichen dividierten Differenzen aus rechentechnischen Gründen modifizierte, dividierte Differenzen verwendet. Dazu wird eine Ähnlichkeitstransformation der unabhängigen Veränderlichen so durchgeführt, daß die mittlere Intervalllänge eins ist. Die entstehenden Formeln entsprechen denen für Interpolation mit gewöhnlichen Differenzen bei äquidistanten Ordinaten. In Abhängigkeit von den Schwan- kungen der Intervalllänge wird untersucht, wie isolierte Fehler der Ausgangswerte aus dem Schema der modifizierten Differenzen erkennbar und größenordnungsmäßig zu bestimmen sind.

Fr.-A. Willers.

Blanch, Gertrude: On modified divided differences. II. Math. Tables Aids Comput. **8**, 67—75 (1954).

Fortsetzung vorsteh. bespr. Arbeit. Der Einfluß von Abrundungsfehlern auf die modifizierten dividierten Differenzen wird untersucht. Anschließend an eine Arbeit von Lowan und Laderman (dies. Zbl. **24**, 56) wird die Verteilung der Fehler in den Differenzen bis zur dritten Ordnung berechnet, wobei Gleichverteilung und Unabhängigkeit der Ausgangsfehler vorausgesetzt werden. Für Differenzen n -ter Ordnung kann die Verteilung durch eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streu-

ung $\sigma = a \left| \sum_{k=0}^n A_k^2 / 12 \right|$ angenähert werden, wenn $w_n = \sum_{k=0}^n A_k e_k$ der Fehler in der n -ten dividierten Differenz und e_k die Eingangsfehler (gleichverteilt zwischen $-\frac{1}{2}a + c$ und $\frac{1}{2}a + c$) sind. Abweichungen vom normalen Verhalten der n -ten dividierten Differenz, die größer als $2,8\sigma$ sind, lassen auf isolierte Fehler schließen. Bei gewöhnlichen Differenzen ist die Schranke etwa $2,4\sigma$. Für diesen Fall sind die σ für $n = 2$ bis $n = 10$ berechnet.

Fr.-A. Willers.

Tweadie, M. C. K.: A modification of the Aitken-Neville linear iterative procedures for polynomial interpolation. Math. Tables Aids Comput. 8, 13—16 (1954).

The method can be used for both direct and inverse interpolation. It does not require uniform spaced argument values. It is equivalent to the use of Lagrange's polynomial formula but consists principally of the repeated computation of an simple algorithm. Because the procedure depends on iterative linear processes, the linearity can be used to increase the order of approximation as shown in the present paper.

E. J. Nyström.

Vaughan, Hubert: Symmetry in central polynomial interpolation. J. Inst. Actuaries 80, 63—68 (1954).

Eigenschaften besonderer klassischer und neuerer oskulierender Interpolationsformeln werden als allgemein vorhanden erwiesen und als von symmetrischem Aufbau der Formeln herrührend.

E. J. Nyström.

Salzer, Herbert E.: New formulas for facilitating osculatory interpolation. J. Res. nat. Bur. Standards 52, 211—216 (1954).

Für die Anwendung der Hermiteschen Interpolationsformel mit zugehörigem Restglied bei etwa n äquidistanten Werten der zu betrachtenden Funktion und deren Ableitung werden nach geeigneter Umformung Hilfstafeln bis einschl. $n = 11$ gegeben.

E. J. Nyström.

Salzer, H. E.: Inverse interpolation for the derivative in the complex plane. Math. Tables Aids Comput. 8, 119—121 (1954).

Die Formeln einer früheren Arbeit [vgl. dies. Zbl. 44, 331] werden auf analytische Funktionen im komplexen Gebiet erweitert. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionswerte $f(z_k)$ in der komplexen Ebene an n Gitterpunkten eines kartesischen Netzes mit der Länge h tabelliert vorliegen. Die Formeln, die für $n = 3(1)7$ angegeben werden, dienen zur Bestimmung der Argumentstelle $z_0 + Ph$, an der die Ableitung $f'(z_0 + Ph)$ einen vorgeschriebenen Wert annimmt.

H. Unger.

Richter, W.: Koordinatentransformationen mit Hilfe eines Fluchtliniennomogramms und Anwendungen auf die graphische Lösung von Differentialgleichungen. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 39—47 (1954).

Für eine Punkttransformation der (x, y) -Ebene auf die (ξ, η) -Ebene $F_1(x, y, \xi, \eta) = 0$, $F_2(x, y, \xi, \eta) = 0$ lassen sich Fluchtliniennomogramme angeben, wenn sich aus diesen Gleichungen die folgenden Darstellungen herleiten lassen: $[f_1, g_1, \varphi_1] = 0$, $[f_2, g_2, \varphi_2] = 0$, $[\varphi_3, \psi_3, f_3] = 0$, $[\varphi_4, \psi_4, g_4] = 0$ mit

$$f_i = \begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ f_{i3} \end{pmatrix}, \quad g_i = \begin{pmatrix} g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \end{pmatrix}, \quad \varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{pmatrix}, \quad \psi_i = \begin{pmatrix} \psi_{i1} \\ \psi_{i2} \\ \psi_{i3} \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen f_{ik} von x , g_{ik} von y , φ_{ik} von ξ , ψ_{ik} von η abhängen. Man erhält dann 4 Fluchtliniennomogramme, von denen zwei wesentlich sind. Verf. untersucht die Fälle, bei denen man mit einem einzigen Nomogramm auskommt. Als Beispiel eines Fluchtliniennomogramms mit 3 doppelt bezifferten Leitern wird die Inversion am Kreis behandelt. Auf Fluchtliniennomogramme mit vier Leitern führen Affinitäten (4 parallele Leitern), Kollineationen (zwei Paar parallele Leitern) und die Transformation kartesischer Koordinaten in Polarkoordinaten (zwei parallele, eine dazu senkrechte und eine uneigentliche Leiter, festgelegt durch ein Geradenbüschel im Koordinatenursprung). Auf weitere Verallgemeinerungen und auf Anwendungen zur Vereinfachung und nomographischen Lösung von Differentialgleichungen wird hingewiesen.

R. Ludwig.

• **Lednev, N. A., A. V. Grošev, T. A. Elistratova, B. D. Nikitin, M. V. Pentkovskij, M. A. Preobraženskij und L. Z. Rumsiskij: Mathematisches Praktikum an Rechengegeräten und Instrumenten.** Unter Redaktion von N. A. Lednev. Moskau: Staatsverlag „Sowjetische Wissenschaft“ 1954. 366 S. R. 7,20 [Russisch].

Der vorliegende Lehrbehelf ist von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von N. A. Lednev für mathematische Praktika an höheren Lehranstalten verfaßt. Er soll den Studierenden eine Anleitung für die Durchführung und den Dozenten eine solche für die Organisation von Laboratoriumsarbeiten bieten, in denen angenäherte numerische Lösungen mathematischer Aufgaben mit Hilfe von Rechenmaschinen und mathematischen Instrumenten geführt werden sollen. Die beiden ersten Kapitel haben allgemein einführenden Charakter. Im ersten werden Rechenmaschinen und mathematische Instrumente beschrieben und die Regeln für ihre Anwendungen angegeben. Dabei werden die logarithmischen Rechenschieber, das russische Rechenbrett, Additionsmaschinen mit Staffel- und Sprossenrädern und halb- und vollautomatische elektrische Rechenmaschinen behandelt. Das zweite Kapitel bringt eine allgemeine Einführung in die Theorie der mathematischen Rechenmethoden, die sich auf die Genauigkeit der Näherungswerte, die Regeln für die Abrundung, die Fehlerfortpflanzung und die Regeln für die Zifferrechnung mit angenäherten Zahlenwerten erstreckt. Die folgenden Kapitel bringen die eigentlichen Anleitungen für die Praktikumsarbeiten. Sie beginnen stets mit einer kurzen Einführung in die mathematische Theorie der zu behandelnden Aufgaben. Dann folgen die Anleitung für die Durchführung der Übungen mit Ratschlägen für den Dozenten, Angabe der erforderlichen Formblätter, einem durchgeführten Beispiel und einer Sammlung von Aufgaben. Der behandelte Stoff ist folgenden Gebieten entnommen: Aufstellung und Gebrauch von Funktionentafeln, Interpolation und Extrapolation, numerische Differentiation tabellierter Funktionen, Näherungsweise Lösung von Gleichungen, Näherungsweise Integration, Planimeter, Näherungsweise Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, Angenäherte harmonische Analyse, Nomographie. Die Erläuterungen sind in einfacher, leichtverständlicher Form gegeben. Zu nicht angeführten Beweisen oder Ableitungen werden entsprechende Literaturhinweise gegeben. Das Buch stellt einen wertvollen Behelf für jeden Dozenten dar, der ähnliche praktische Übungen durchzuführen hat.

W. Schmid.

• **Rohrberg, A.: Theorie und Praxis der Rechenmaschinen.** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe 1.) Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954. 72 S. mit 12 Bildern. DM 3,90.

Nach kurzer Beschreibung der Schaltvorrichtungen verschiedener Vierspeziesmaschinen (Staffelwalzen, Sprossenräder, Schaltklinkenräder, Proportionalhebel und Herzstarksche Staffelwalzen), von Zehnerübertragung, Zählwerk und Schlitten, werden ohne Eingehen auf technische Einzelheiten eingehend die verschiedenen Methoden des Maschinenrechnens sowohl für Maschinen mit Handbetrieb wie für Vollautomaten an der Hand von Beispielen behandelt. Insbesondere werden die verschiedenen Methoden des Ausrechnens von Quadrat- und Kubikwurzeln und die Lösung quadratischer Gleichungen besprochen. Von der heute bei vielen Maschinen möglichen Übertragung von Zahlen aus dem Resultat- ins Einstellwerk wird dabei kein Gebrauch gemacht.

Fr.-A. Willers.

• **Heinhold, J.: Integriermaschinen mit nicht beschränkten Varianzbereichen.** Z. angew. Math. Mech. 34, 64—65 (1954).

• **Blanc, André: Dispositif à piles et relais permettant la résolution analogique d'équations aux dérivées partielles non linéaires au moyen d'une chaîne à résistances et capacités.** C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1377—1378 (1954).

Das Gleichungssystem $P \frac{\partial P}{\partial x} = -AQ^2$, $\frac{\partial P}{\partial t} = B \frac{\partial Q}{\partial x}$ wird mit einem Netzwerk aus Widerständen und Kondensatoren durch Anwendung der Analogie $P = V$, $Q = i$ gelöst. Die sich ergebende Spannungskurve $u = (a/V)^2$ wird durch einen Polygonzug ersetzt. Jedem Geradenstück entspricht eine Gleichstromquelle bestimmter EMK und inneren Widerstandes. Die Stromquellen und Widerstände werden in Abhängigkeit von V durch Relais über Kathodenverstärker geschaltet. Die Lösung einer Aufgabe erfordert etwa 20 s.

W. Breittling.

• **Young, Andrew: Techniques for the summation of products on Hollerith and National accounting machines.** Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 136—151 (1954).

Es werden sehr sorgfältig einige Methoden entwickelt, Produktsummen auf

Hollerith-Maschinen und zweierlei „National“-Rechenmaschinen zweckmäßig auszuwerten. Die Verfahren werden untereinander auf ihre Anwendbarkeit und ihren Zeitbedarf verglichen. Mit Hollerith-Maschinen kommt man zwar stets rascher zum Ziel als mit den National-Maschinen, doch sind die Betriebskosten pro Zeiteinheit bei jenen das vierfache, so daß die Wahl zu einer Frage der Wirtschaftlichkeit wird. Der Hollerith-Prozeß erfordert vom Bearbeiter ein geringeres Maß an Konzentration.

H. Wundt.

Schwarz, Eleonore: Numerische Lösung des Randwertproblems der Potentialgleichung mit Hilfe von Lochkarten. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 237—240 (1954).

Truter, Mary R.: The use of a „506“ Hollerith (Bull) multiplying punch for crystallographic calculations. *Proc. Leeds philos. lit. Soc., sci. Sect.* **6**, 140—153 (1954).

Es wird beschrieben, wie mittels des „506“-Multiplying Punch (Lochkarten-multipliziermaschine) Strukturfaktoren, Differentialsynthesen und Fouriersynthesen ausgeführt werden können. Die Einzelheiten der beiden ersten Berechnungsarten werden am Beispiel der monoklinen Symmetrie erläutert.

W. Nowacki.

Lotkin, Mark: Some problems solvable on computing machines. *Commun. pure appl. Math.* **7**, 149—158 (1954).

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über den Einsatz programmgesteuerter Rechenmaschinen beschreibt Verf. einige Probleme, die mit den 4 in den Ballistic Research Laboratories (Aberdeen, Md.) installierten Rechenautomaten (ENIAC, EDVAC, ORDVAC, BELL) gelöst werden. — Von besonderem Interesse dürften die folgenden Tatsachen sein: a) Für die Auflösung eines Systems von 40 linearen Gleichungen mit 40 Unbekannten braucht die ORDVAC ca. 15 Min., von denen jedoch nur ca. 3 Min. reine Rechenzeit sind, das übrige entfällt auf Eingabe der Koeffizientenmatrix und das Drucken der Resultate. b) Die Berechnung einer Geschosßflugbahn unter ballistischen Bedingungen dauert mit der ORDVAC ungefähr die Hälfte der wirklichen Flugzeit des Geschosses. c) Es wurden mit diesen Maschinen auch theoretische Untersuchungen über die Fehlerfortpflanzung bei numerischer Integration von Differentialgleichungen ausgeführt.

H. Rutishauser.

Hume, J. N. P.: Input and organization of sub-routines for ferut. *Math. Tables Aids Comput.* **8**, 30—35 (1954).

Stock, John R.: An arithmetic unit for automatic digital computers. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 168—172 (1954).

Verf. beschreibt das Rechenwerk für eine elektronische Rechenmaschine, die einen Magnettrommelspeicher enthält: die Register des Rechenwerks sind Umlaufspeicher auf derselben Trommel. Das Werk arbeitet im Dezimalsystem. Ferner ist ein Verzeichnis von Befehlen ausgearbeitet, welches mit 15 Befehlen das Minimum dessen darstellt, was zum rationellen Programmieren nötig ist. Bemerkenswert ist, daß neben dem normalerweise vorgesehenen Rechnen mit gleitendem Komma auch Befehle für Rechnen mit festem Komma vorgesehen sind, und daß Exponent und Mantisse in gemeinsamen Registern und im gleichen Addierwerk behandelt werden. Für die Abläufe von Multiplikation und Division sind besondere, zeitsparende Verfahren ausgearbeitet. — Verf. gibt ein Blockschema, jedoch keine elektrischen Schaltungen an.

Ambros. Speiser.

Cahill, W. F.: Programs for computing the hypergeometric series. *Math. Tables Aids Comput.* **8**, 36—37 (1954).

Nejsüler, L. Ja.: Gleichungen mit vier separierbaren Veränderlichen und ihre optimale zweigliedrige Tabulierung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **95**, 709—712 (1954) [Russisch].

Für die zweigliedrige Zerlegung der Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ in der Form $f_1(x_i, x_j) = f_2(x_i, x_q)$ (i, j, p, q ist eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4) hat Goursat eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben. Verf. ersetzt diese durch die wesentlich einfacher an-

wendbare, der Goursatschen äquivalente notwendige und hinreichende Bedingung (B): $(cf \partial x_i): (cf \partial x_j) = A(x_i, x_j)$, wobei $A(x_i, x_j)$ nur von x_i und x_j abhängt. (B) kann man ersetzen durch (B₁): $(cf \partial x_i): (cf \partial x_j) = B(x_i, x_j)$. Für $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ läßt sich die Darstellung $F[q_1(x_i, x_j), q_2(x_i, x_j)] = 0$ konstruieren, wenn man für q_1 bzw. q_2 irgendein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung $A(x_i, x_j) dx_i + dx_j = 0$ bzw. $B(x_i, x_j) dx_i + dx_j = 0$ nimmt. (B) und (B₁) sind auch notwendig und hinreichend für die Existenz der dreigliedrigen Darstellung $f_3\{f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_j)\}$ der Funktion der vier Veränderlichen. $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
R. Ludwig.

● **Sticker, Bernhard: Fünfstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen.**

Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag 1954. 52 S. DM 7,60.

Werte der trigonometrischen Funktionen sin, cosec, tg, etg, sec, cos mit 5 Dezimalen bzw. Ziffern für $0(1')90^\circ$ (Ausgabe A: Altgradteilung) mit Angabe erster Differenzen zur Interpolation bzw. mit Hilfsfunktionen für cosec und etg für $0(1')2^\circ$.

H. Unger.

● **Table of secants and cosecants to nine significant figures at hundredths of a degree.** (National Bureau of Standards Appl. Math. Ser. 40.) Washington: Government Printing Office 1954. VI, 46 p.

sec x und cosec x für $x = 0(0.01^\circ)90^\circ$ mit 9 gültigen Ziffern. Für die Durchführung der Interpolation ist die Lagrangeformel unter Angabe der notwendigen Punktzahl und der erzielbaren Genauigkeit vorgesehen.

H. Unger.

● **Flügge, W.: Four-place tables of transcendental functions.** London: Pergamon Press Ltd. 1954. 136 p. £ 1.5.0.

Auch höhere transzendente Funktionen als die bekannten trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen haben in den letzten Jahren mehr und mehr Eingang in die Welt des Physikers und Ingenieurs gefunden. Wohl gibt es genügend gute Tafeln für ihre numerischen Werte, aber viele von ihnen haben entweder zu große Intervallschritte oder sie geben viel mehr Stellen an, als für ein schnelles und bequemes Arbeiten mit dem Rechenschieber notwendig und wünschenswert ist. Das vorliegende Buch liefert die Werte der gebräuchlichsten transzendenten Funktionen mit etwas größerer als Rechenschiebergenaugkeit, und es ist vor allem gedacht für diejenigen, welche, wie der Autor schreibt, „altmodisch genug sind, ihr tägliches Arbeitspensum mit dem Rechenschieber zu erledigen, aber modern genug, um auch die Mathematik jenseits von Sinus und Cosinus zur Lösung ihrer Probleme zu benutzen“. Das Buch enthält vierstellige Tabellen folgender Funktionen: der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, der Exponentialfunktion, des natürlichen Logarithmus, der Besselschen Funktionen, der Thomsonschen oder Kelvinschen Funktionen, der elliptischen Integrale, der Fehlerfunktion, der Fresnelschen Integrale, des Integralsinus, Integralcosinus, Exponentialintegrals (Integrallogarithmus) und der Gammafunktion. Außerdem bringt es noch eine Zusammenstellung von Formeln, die für die Arbeit mit diesen Funktionen notwendig sind und die auch ohne genaue Kenntnis der vollen Theorie benutzt werden können. — Das Buch soll nach Wunsch des Autors „ein immer zur Verfügung stehendes Werkzeug sein und soll seinen Platz dicht neben dem Rechenschieber in der Schreibtischschublade haben“.

St. Schottlaender.

● **Chandrasekhar, S. and Donna Elbert: The roots of $Y_n(\lambda\eta)J_n(\lambda) - J_n(\lambda\eta)Y_n(\lambda) = 0$.** Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 266—268 (1954).

Es sind die Wurzeln λ_j der obigen Gleichung und der Normierungsfaktor $N_{j,n}$ für $j = 1, \eta = 0.2, \dots, (0.1), \dots, 0.6; 0.8$ und $n = 1, 2, \dots, 5$ bzw. 6 bzw. 8 bzw. 12 und für $j = 2, 3; \eta = 0.5$ und $n = 1, 2, \dots, 6$ mit einem Maximalfehler von 10^{-5} berechnet und tabellarisch mit den zugehörigen Werten der Zylinderfunktionen dargestellt.

O. Volk.

● **Byrd, Paul F. and Morris D. Friedman: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXVII.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. 22 Fig., XIII, 355 S. Ganzleinen DM 39,60.

Das Buch enthält eine Sammlung von mehr als 3000 unbestimmten und bestimmten Integralen, die sich auf die Legendreschen Normalformen der elliptischen Integrale der drei Gattungen zurückführen lassen. Dabei sind mehrfache Integrale, spezielle, auf elliptische reduzierbare hyperelliptische Integrale und eine große Zahl von anderen typischen und nicht typischen Integralen mit berücksichtigt. Dieses gewaltige Formelmateriale ist so übersichtlich geordnet, daß man jedes Resultat in wenigen Minuten finden kann. Tatsächlich braucht der Benutzer nicht einmal etwas von elliptischen Funktionen zu wissen, wenn er etwa den numerischen Wert der Integrale

(mit Ausnahme der auf unbestimmte Integrale dritter Gattung führenden) berechnen will. Es genügt, zunächst im Inhaltsverzeichnis den Abschnitt aufzusuchen, dessen Titel zeigt, wo das betreffende Integral zu erwarten ist. Diese Abschnitte sind nicht zu lang und nach wachsendem Grade der Komplikation der Integranden geordnet. Die Integrale werden dort in andere mit elliptischen Funktionen als Integranden transformiert. Der Wert des Integrals, ausgedrückt durch Normalintegrale, Jacobis Zetafunktion und Heumanns Funktion

$$A_0 = (2/\pi) [E(k)F(\beta, k') + K(k)E(\beta, k') - K(k)F(\beta, k')]$$

kann dann durch einen Hinweis auf eine Formelnummer, meist aus Kapitel III oder IV, gefunden werden. Sechsstellige Tabellen der Normalintegrale erster und zweiter Gattung und der Hilfsfunktionen sind am Schluß des Buches angefügt. Alle Bezeichnungen und Symbole sind am Anfang des Werkes aufgeführt, mit Erklärungen und Hinweisen auf den Text. Die Formelnnummern sind (auch in den Verweisen) fett gedruckt, was das Aufsuchen der Formeln sehr erleichtert. Der Satz ist vorzüglich und ermöglicht die rasche Auffassung der teilweise sehr komplizierten Ausdrücke. Für Benutzer, die mit der Theorie der elliptischen Funktionen wenigstens flüchtig bekannt sind, ist ein wohlgegliedertes Verzeichnis der Hauptresultate der Theorie beigefügt. Alle Formeln, die zum Verständnis und erweiterten Gebrauch der Integraltafeln beitragen, sind im ersten Kapitel zusammengestellt und durch graphische Darstellungen ergänzt. Der Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen von Weierstrass wird in einem Anhang dargestellt; ein weiterer Anhang enthält ein nützliches Formelverzeichnis für die Thetafunktionen. Eine kurze Note über elliptische Integrale, die auf elementare Funktionen führen, beschließt den Textteil; es wird hervorgehoben, daß dieser Abschnitt insofern entbehrlich ist, als die Integraltafeln automatisch darüber Auskunft geben, in welchen Fällen ein elliptisches Integral in eine elementare Funktion entartet. Es ist zu erwarten, daß das Buch die Stellung eines Standardwerkes einnehmen und auf lange Zeit behalten wird. — Verzeichnis der Kapitelüberschriften: Definitionen und grundlegende Beziehungen. Reduktion algebraischer Integranden. Jacobis elliptische Funktionen. Reduktion trigonometrischer Integranden auf Jacobis elliptische Funktionen. Reduktion hyperbolischer Integranden auf Jacobis elliptische Funktionen. Integraltafeln für Jacobis elliptische Funktionen. Elliptische Integrale dritter Gattung. Integraltafeln für vermischte Integrale mit trigonometrischen und hyperbolischen Integranden (mit Einschluß mehrfacher Integrale). Elliptische Integrale, die von Laplace-Transformationen herrühren. Hyperelliptische Integrale. Integrale elliptischer Integrale (in bezug auf den Modul oder die Variable). Ableitungen (nach dem Modul, der Variablen oder dem Parameter). Vermischte Integrale und Formeln. Reihenentwicklungen. Anhänge. Numerische Tafeln.

W. Magnus.

Shanks, Daniel: A logarithm algorithm. Math. Tables Aids Comput. 8, 60—64 (1954).

Zur Berechnung von ${}^n\log a_1 = 1/x_0$ wird eine Kettenbruchentwicklung $1/x_0 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{\dots}$ angegeben. $n_1 = [x_0]$ ist bestimmbar aus $a_1^{n_1} \leq a_0 < a_1^{n_1+1}$. Setzt man $x_0 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{x_1}$, ergibt sich $a_2^{n_1} = a_1$ als Bestimmungsgleichung für x_1 mit $a_2 = a_0/a_1^{n_1}$. Entsprechend bestimmt man $n_2 = [x_1]$ aus $a_2^{n_2} \leq a_1 < a_2^{n_2+1}$. So fortfahrend erhält man eine Folge $\{n_i\}$, definiert durch $a_i^{n_i} \leq a_{i-1} < a_i^{n_i+1}$ und eine Folge $\{a_i\}$, definiert durch $a_{i-1} = a_i^{1/n_i} a_i^{n_i}$. Die entstehende Kettenbruchentwicklung ist zur Berechnung in programmgesteuerten Rechenautomaten verwendbar. Man dividiert dann a_{i-1} so oft durch a_i , bis der Quotient $\leq a_i$. Die Zahl der Divisionen ist dann n_i , der Quotient a_{i-1} . Die Folge der Näherungsbrüche eines derartigen Kettenbruches konvergiert etwa linear mit einem Konvergenzfaktor von etwa 1/10, wie Verf. aus einem Satz von Khintchine schließt, nach welchem das geometrische Mittel der n_i fast immer $K = 2.685$ ist. Fr.-A. Willers.

Wrench jr., J. W.: A new approximation to the reciprocal of π . Math. Tables Aids Comput. 8, 49—51 (1954).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Clarke, R. D.: The concept of probability. J. Inst. Actuaries 80, 1—31 (1954).

Bernoulli, Daniel: Exposition of a new theory on the measurement of risk. Econometrica 22, 23—36 (1954).

Translated from Latin into English by L. Sommer, from „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis“, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V, 175—192 (1738).

Steinhaus, Hugo: Table of shuffled four-digit numbers. Rozprawy mat. Nr. 6, 46 S. mit russischer und engl. Übersetzung (1954) [Polnisch].

This paper is remarkable in that it produces what is, in effect, a table of random numbers by a well-defined repeatable process. The last four digits of 4567 n ($n = 0, 1, \dots, 9999$) were arranged in a 100 by 100 table and then mixed up by a method precisely described in an introduction. Various ways of using the table are suggested and the limits of the sample sizes indicated beyond which (presumably) systematic effects would intrude. There are 25 pages of 100 blocks each, every block containing 4 four digit numbers. S. Vajda.

Koźniewska, I.: The first absolute central moment for Pólya's distribution. Zastosowania Mat. 1, 206–210, russische und engl. Zusammenfassgn. 210–211, 211 (1954) [Polnisch].

A convenient measure of the spread of a random variable is its first absolute central moment. In the present paper the author works out a formula for the first absolute moment of a central random variable having Pólya's distribution, i. e. particularly for a random variable with a binomial and hypergeometric distribution. — It should be pointed out that the formula for the first absolute central moment is known for a binomial distribution, its proof being based on Euler's theorem on homogeneous functions. The proof given in the present paper is simpler, as it does not go beyond combinatorial considerations. Autoreferat.

Thompson, H. R.: A note on contagious distributions. Biometrika 41, 268–271 (1954).

Verf. beschreibt ein von J. H. Darwin (1951) stammendes, unpubliziertes Modell zur Konstruktion der für ökologische Probleme wichtigen Ansteckungsverteilungen. Auf eine Ebene mit rechtwinkligem Koordinatensystem werden Elternindividuen zufällig verteilt mit durchschnittlicher Anzahl m pro Flächeneinheit. Für einen Elter in ξ, η folgen die Ortskoordinaten x, y eines Nachkommens der Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x = \xi, y = \eta) dx dy$; mithin ist für einen Nachkommen eines Eltern in ξ, η die bedingte Wahrscheinlichkeit, in die Testregion R zu fallen, $P(\xi, \eta) = \int_R f(x = \xi, y = \eta) dx dy$, und, wenn $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit für eine n -gliedrige Nachkommenschaft bedeutet, $f(z) = \sum_n p(n) [z P(\xi, \eta) + 1 - P(\xi, \eta)]^n$ die Erzeugende der Verteilung der Anzahl der in R fallenden Nachkommen eines Eltern in ξ, η . Bei Annahme gegenseitig unabhängiger Aktivität der Elternindividuen ergibt sich hieraus für die Erzeugende $\pi(z)$ der Verteilung der Gesamtzahl der in R fallenden Tochter-Individuen $\log \pi(z) = \int m [f(z) - 1] d\xi d\eta$ und speziell, wenn $P(\xi, \eta) = P(r)$ kreissymmetrisch ist, $\log \pi(z) = \int_0^\infty 2\pi m [f(z) - 1] r dr$.

Diese Klasse von Ansteckungsverteilungen ist infolge der beliebigen Wahl von $p(n)$ und $P(\xi, \eta)$ bzw. $f(x = \xi, y = \eta)$ sehr umfassend und enthält als Spezialfälle Neymans Typ A-Verteilung [für $p(n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$, $P(r) = 1/A$ für $r \leq A\pi$] und die negative Binomialverteilung [für $p(n) = (1 - \mu) \mu^n$, $P(r) = e^{-r^2/2\sigma^2} 2\pi\sigma^2$]. Verf. untersucht die 20 Verteilungen, die sich durch Kombination der speziellen Verteilungen $p(n) = (1 - \mu) \mu^n$, $p(n) = (1 - \lambda)^n (n + 1) \lambda^n$, $p(n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$, $p(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ mit einer der Verteilungen $P(r) = e^{-r^2/2\sigma^2} / 2\pi\sigma^2$, $P(r) = e^{-r/\sigma} 2\pi\sigma^2$, $P(r) = 3(R - r)/\pi R^2$, $P(r) = 6r(R - r)/\pi R^3$, $P(r) = 1/\pi R^2$ ergeben, und vergleicht ihren „Ansteckungsgrad“ mit Hilfe des Dispersionsindex μ_2/μ_1^2 . M. P. Geppert.

Huron, R. et J. Mérie: Sue une application du schéma d'urnes de Poisson. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV, Sér. 17, 265–272 (1954).

Betrachtung des Verteilungsgesetzes einer Zufallsvariablen im Falle eines Poisson-Schemas mittels der charakteristischen Funktion und des Fourierschen Reziprozitätstheorems. Anwendung des sogenannten „problème du T^* “ auf die Blattella germanica. J. M^e Orts.

Dufresne, Pierre: Problèmes de dépouillements. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 42–44 (1954).

Bei Ziehung von $a + b$ Gegenständen der Typen A und B seien a_i und b_i gezogen in den ersten t Ziehungen ($0 \leq t \leq a + b$, analog für A, B, \dots, N). Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß immer $a_i + b_i = m$ (angenommen: $a + m \geq b \geq m > 0$; sonst $W = 0$ oder $= 1$), ist $W = 1 - [a! b! / (a + m)! (b + m)!]$;

ähnliche, aber kompliziertere Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß immer: II. $r > a_i - b_i > -m$; III. $a_i > b_i > c_i > \dots > m_i > n_i$; IV. $a_i \geq b_i \geq c_i \geq \dots \geq m_i \geq n_i$. *B. de Finetti.*

Lukaes, Eugène: Sur une propriété de la loi de Gauss-Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 444—445 (1954).

Es sei $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine eindeutige meßbare Funktion der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n , die die Bedingung

$$(1) \quad g(x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

für jedes a erfüllt. Wenn dann X_1, X_2, \dots, X_n stochastisch unabhängige Wahrscheinlichkeitsgrößen sind, die alle nach demselben Gauss-Laplaceschen Verteilungsgesetz verteilt sind, so ist bekannt, daß $g(X_1, \dots, X_n)$ und $\sum_{i=1}^n X_i$ stochastisch unabhängig sind. Hier wird nun die

folgende Umkehrung dieses Satzes gegeben: Es seien $g_s(x_1, \dots, x_n)$ ($s = 1, \dots, n-1$) Funktionen, die die Bedingung (1) erfüllen. Das Gleichungssystem $g_s(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0) = z_s$ ($s = 1, \dots, n-1$) habe die Lösung $y_s = h_s(z_1, \dots, z_{n-1})$, $s = 1, \dots, n-1$, wo $h_s(z_1, \dots, z_{n-1})$ eindeutige, reelle und meßbare Funktionen sind. Wenn dann X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige Wahrscheinlichkeitsgrößen sind und wenn die Variablen $g_s(X_1, \dots, X_n)$ von $\sum_{i=1}^n X_i$ stochastisch unabhängig sind, so müssen die X_i nach dem Gauß-Laplaceschen Verteilungsgesetz und mit derselben Streuung verteilt sein. Für den Beweis wird ein Satz von G. Darmon benutzt. *H. Bergström.*

Lord, R. D.: The use of the Hankel transform in statistics. I. General theory and examples. Biometrika 41, 44—55 (1954).

Sei X_i ein s -dimensionaler stochastischer Vektor mit einer sphärischen Verteilung, d. h. die Wahrscheinlichkeit $p(X_i)$, daß X_i in ein bestimmtes Raumelement dX_i fällt, ist nur von $|X_i| = r$ abhängig. Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über zum Teil eigene Resultate und zum Teil vorhandene Publikationen von Loper, Kluver und Chandrasekhar betr. die Berechnung der charakteristischen Funktion von $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ und der zugehörigen Momente und Cumulanten. Die charakteristische Funktion ist in diesem Fall eine Hankelsche Transformierte und kann mit Hilfe gewisser Bessel-Funktionen und Integrale — behandelt von Watson — dargestellt werden. Verf. behandelt Projektionen solcher Verteilungen und spezielle Fälle. *W. Saxon.*

Girault, Maurice: Transformation de fonctions caractéristiques par intégration. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2223—2224 (1954).

Verf. beweist den folgenden Satz: Wenn $q(t)$ eine charakteristische Funktion darstellt, so ist auch $\Phi(t)$ eine solche, wobei $\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t q(s) ds$. *W. Saxon.*

Lévy, Paul: Trois théorèmes de calcul des probabilités. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2283—2286. (1954).

Verf. formuliert die folgenden 3 Sätze: 1. Wenn $q(z)$ sich im 0-Punkt analytisch verhält und die charakteristische Funktion einer stochastischen Variablen $X = 0$ darstellt, so ist $q(iz)$ auch eine charakteristische Funktion. 2. Der 2. Satz verallgemeinert ein Resultat von Wiener betr. die C -Kurve der Brownschen Bewegung. 3. Beim 3. Satz wird eine bestimmte, stochastische, stetige Massenverteilung auf der Geraden, der Ebene und dem Raum und ihre gegenseitige Anziehung diskutiert. *W. Saxon.*

Linnik, Ju. V.: Über stabile Wahrscheinlichkeitsgesetze mit einem Index kleiner als Eins. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 619—621 (1954) [Russisch].

Es sei $p(x, \alpha)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte zur stabilen Verteilungsfunktion mit der charakteristischen Funktion $f(t) = \exp \{ -|t|^\alpha \cdot [1 - i \cdot \text{sign } t \cdot \text{tg } \pi \alpha / 2] \}$ bei $0 < \alpha < 1$. Es ist $p(x, \alpha) = 0$ für $x \leq 0$. Satz 1 gibt die Entwicklung für kleine $x > 0$ an:

$p(x, \alpha) = [(\cos \pi \alpha / 2) / 2 \pi \alpha (1 - \alpha)]^{1/2} \cdot (\alpha / x \cos \pi \alpha / 2)^{(2-\alpha)/2(1-\alpha)} \cdot E(x) \cdot (1 + A(x))$ mit $\ln E(x) = -[\alpha / x \cos \pi \alpha / 2]^{1/(1-\alpha)} \cdot (1 - \alpha) / \cos \pi \alpha / 2$ und $|A(x)| \leq B(\varepsilon) \cdot x^{\alpha/2(1-\alpha)-\varepsilon}$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ und der in jedem abgeschlossenen ε -Intervall, das $\varepsilon = 0$ nicht enthält,

beschränkten Funktion $B(x)$. Eine entsprechende Formel gilt für die Ableitungen von $p(x, \lambda)$ nach x . — Der analytische Charakter von $p(x, \lambda)$ folgt aus Satz 2: Es ist $2\pi x \cdot p(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x^n \cdot \cos n\alpha/2)^{-m}$ mit der ganzen Funktion $\chi(\xi) = \sum a_n \xi^n$. — Ist speziell $\lambda = 1/q$ mit ganz-

rationalen q und ist $r(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} d\tilde{\xi} \cdots \int_{\xi}^{\infty} d\tilde{\xi} \cdot \chi(\tilde{\xi})$ mit $(q-1)$ -maliger Integration, so genügt

$r(\xi)$ der Differentialgleichung $q \cdot r^{(q-1)} + (-1)^q \cdot \xi \cdot r = 0$. — Im Beweis wird aus der Fourierumkehrformel von $p(x, \lambda)$ eine Integraldarstellung für $\chi(\xi)$ gewonnen und diese für große ξ nach der Sattelpunktmethode ausgewertet.

H. Richter.

Diananda, P. H.: The central limit theorem for m -dependent variables asymptotically stationary to second order. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 287–292 (1954).

Verf. überträgt seinen für „ m -abhängiger“ stochastische Variablen bewiesenen zentralen Grenzwertsatz [Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 239–246 (1953)] auf weitere, in einem bestimmten Grade abhängige Variablen und Vektoren. Die für die Gültigkeit seiner Sätze formulierten hinreichenden Bedingungen sind ganz ähnlich der klassischen Bedingung von Lindeberg.

W. Sauer.

Nash, Stanley W.: An extension of the Borel-Cantelli lemma. Ann. math. Statistics **25**, 165–167 (1954).

Let E_1, E_2, \dots be an infinite sequence of events. Chung and Erdős (this Zbl. **46**, 352) have derived a sufficient condition for the probability of $\limsup E_k$ (for definition see, for instance, the review mentioned above) to be unity. (A correction to the statement of their theorem is given in a footnote to the present paper.) The author gives a necessary and sufficient condition for the same result. S. Vajda.

Fortet, Robert et Édith Mourier: Sur les fonctionnelles de certaines fonctions aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1557–1559 (1954).

Extension des théorèmes de convergence des suites de lois de probabilité aux variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach X . Soit x_j une suite d'éléments aléatoires appartenant à X , mutuellement indépendants, de même loi, et tels que $E(x_j) = 0$, $E(x_j^2) < +\infty$. Soit $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j$. On sait que la caractéristique de Z_n tend vers une fonction définie positive „laplacienne“, et que, si X est un espace \mathcal{D} séparable, cette fonction est la caractéristique d'un élément aléatoire laplacien $Y \in X$. L'objet de cette note est d'énoncer le théorème suivant: „si $f(x)$ est une fonction numérique de $x \in X$, uniformément continue sur toute sphère de X , la fonction de répartition de $f(Z_n)$ tend, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers celle de $f(Y)$ “, et de l'appliquer à des exemples.

J. Bess.

Lukacs, Eugene: On strongly continuous stochastic processes. Sankhyā **13**, 219–228 (1954).

In this refreshingly clearly written paper the author uses a theorem of Khintchine [cf. Gnedenko, Uspechi mat. Nauk **10**, 115–165 (1944) and Amer. math. Soc. Translation No. 45 (1951)] to prove that if $y(t)$ is a process with independent increments and is strongly continuous in $[a, b]$ (for definition see H. B. Mann, Introduction to the theory of stochastic processes depending on a continuous parameter, Washington 1953), then $y(b) - y(a)$ is normally distributed. From this, he derives necessary and sufficient conditions (i) for a process to be a fundamental random (Wiener) process (see the paper for definition) and (ii) given certain assumptions, for a process to be a Gaussian process with stated properties. It is also shown, incidentally, that a process can be strongly continuous with independent increments and yet the variance of the increments $y(t + \tau) - y(t)$ may depend on t .

S. Vajda.

Hille, Einar: On the integration of Kolmogoroff's differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 20–25 (1954).

Given a matrix $A = (a_{ij})$ such that $a_{ii} \geq 0$ ($i \neq j$), $a_{ii} = 0$ and $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0$. The integration problem of the Kolmogoroff's differential equations $p'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} p_{kj}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots$) are discussed by the semi-group theory. Let M be the Markoff algebra of matrices $B = (b_{ij})$

with the norm $\|B\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| < \infty$. Let $D(A)$ be the subspace of M for which the matrix

product AB is defined as an element of M , and let $D(A)$ be denoted by M_A . The author considers the special case of triangular matrices $A = (a_{ij})$; $a_{ij} = 0$ for $j > i$. It is proved that the resolvent matrix $R(\lambda) = R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ exists for $\lambda > 0$ in such a way that $\lambda R(\lambda, A)$ is a transition operator (non-negative matrix whose row sums are equal to unity), though $D(A)$ is not necessarily dense in M . Hence there exists a semi-group of transition operators $P(t)B = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t n A R(n, A)) B$, strongly continuous for $t \geq 0$ when acting in M_A . The in-

finitesimal generator A_0 of $P(t)$ is the contraction of A to the subset of $D(A)$ in which $AB \in M_A$. Hence $D(A^2) \subseteq D(A_0) \subseteq D(A)$. The $P(t)$ satisfies both equations of Kolmogoroff: $P'(t) = A P(t) = P(t) A$. While $P(t)B$ is the only solution of $Y'(t) = A Y(t)$, $Y(t) \in D(A)$, $t > 0$, $\lim_{t \downarrow 0} Y(t) - B = 0$, it is shown, by an example, that $P(t)$ is not the only solution of $Z'(t) = Z(t) A$, $\lim_{t \downarrow 0} z_{ij}(t) = \delta_{ij}$.

By making use of the Laplace transform, the explicit expression for the triangular matrix $P(t)$ is indicated.
K. Yosida.

Cox, D. R. and Walter L. Smith: On the superposition of renewal processes. *Biometrika* **41**, 91—99 (1954).

Verf. betrachten N Zeitgeraden, auf welchen von Zeit zu Zeit Ereignisse eintreten; auf jeder derselben bilden die Zeitintervalle zwischen den aufeinanderfolgenden Ereignissen eine Folge gegenseitig unabhängiger stochastischer Variablen X_n , die alle der gleichen kontinuierlichen Verteilung [kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ mit $f(x) = dF(x)/dx$] folgen. Zunächst behandeln Verf. die Eigenschaften der N einzelnen Erneuerungsprozesse; und zwar die Verteilung der Verzögerungszeit $Y(t)$, d. h. des von t aus zurückreichenden ereignisfreien Zeitintervalls, und deren Grenzfunktion, die Gleichgewichts-Verzögerungsfunktion (equilibrium delay)

$g(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - F(y)] \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t - y) = [1 - F(y)] E(X_n)$ mit $f_n(x) = 1$ (Aufgabeverteilung)

von $X_1 + \dots + X_n$; ferner die Verteilung der Anzahl von Ereignissen in einem Zeitintervall t , für deren Varianz $V(t) \sim C^2 t E(X_n)$ für $t \rightarrow \infty$ und $V(t) \rightarrow t E(X_n) = \alpha t$ für $t \rightarrow 0$ bewiesen wird. Sodann untersuchen Verf. den zeitlichen Gesamtverlauf aller auf einer Zeitgeraden vereinigten Einzelergebnisse unter der Voraussetzung, daß die Zeitintervalle X_n der N verschiedenen Zeitgeraden alle gegenseitig unabhängig der gleichen Verteilung $F(x)$ folgen. Nach Betrachtung der Verteilung der insgesamt ereignisfreien Zeitintervalle $Y = \min(Y_1, \dots, Y_N)$ wird unter der

Annahme $\int_0^t f(x) dx = O(t^\beta)$ mit $0 < \beta < 1$ mit Hilfe der Moment-Erzeugenden bewiesen, daß die Gesamtzahl von Ereignissen, die in ein Intervall der Länge t fallen, für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch Poisson-verteilt ist. Die Resultate wenden Verf. auf neurophysiologische Versuchsdaten von P. Fatt und B. Katz an.
M. P. Geppert.

Smith, Walter L.: Asymptotic renewal theorems. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, Sect. A **64**, 9—48 (1954).

The renewal theory concerns with the integral equation $H(x) = F(x) + \int_0^{\infty} F(x - z) dH(z)$, where $F(x)$ and $H(x)$ respectively denote the distribution of the lifetime and the expectation of renewals in the half-open interval $(0, x]$. Let $R(x, \omega)$ be 0 or x/ω or 1 according as $x < 0$ or $0 \leq x < \omega$ or $x \geq \omega$, and let $H_\omega(x) = R(x, \omega) \otimes H(x)$. The author proves, by appealing to Wiener-Pitt's Tauberian theorem, the theorem 1: If $k(x) = 0$ for $x < 0$, and is bounded, and non-increasing in $(0, \infty)$, then $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) \otimes H(x) = \mu_1^{-1} \int_0^{\infty} k(z) dz$ with $\mu_1 \int_0^{\infty} x dF(x)$. From this theorem, he derives the continuous time analogue of the discrete time renewal theory due to Feller, Doob and Täcklind. Thus, for example, Corollary 1.2 states $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^{-1} (H_\omega(x) - H_\omega(x - \alpha)) = \mu_1^{-1}$ (for every $\alpha > 0$). This is an extension of the results due to P. Erdős-W. Feller-H. Pollard (this Zbl. **32**, 278) and D. Blackwell (this Zbl. **30**, 201). Also the theorem 4 gives the proof of the proper convergence of the arbitrary initial age distribution, as $x \rightarrow \infty$, towards the stationary age distribution. This latter result improves Doob's Cesaro convergence (this Zbl. **41**, 454).

K. Yosida.

Haskey, H. W.: A general expression for the mean in a simple stochastic epidemic.

Biometrika **41**, 272—275 (1954).

In Bailey's study of a mild infection without withdrawals (this *Zbl.* **38**, 291) caused by the introduction of a single infectious individual into a community of n susceptibles there occurs a function $g_r(x)$ defined by a differential equation. The author gives a method for computing $g_r(1)$ by evaluating the coefficients A_{sr} in $g_r(1) = \sum_{s=1}^{n-r+1} s A_{sr}$. (Bailey had already obtained an expression for $r=1$). The paper contains tables for calculations referring to $n=30$ and compares the stochastic with the deterministic treatment in this case.

S. Vajda.

Lévy, Paul: Rectification à un théorème sur le mouvement brownien à p paramètres. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 2140—2141 (1954).

Berichtigung eines Satzes aus dem in dies. *Zbl.* **34**, 226 besprochenen Buch des Verf.

Chen Moy, Shu-Teh: Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces. *Pacific J. Math.* **4**, 47—63 (1954).

Dans la théorie mathématique de la turbulence, on est conduit à introduire certaines opérations T qui, à tout élément x d'un certain espace S , font correspondre un élément Tx de S , dit valeur moyenne de x . T satisfaisant aux axiomes suivants:

- (A) 1. $T(x+y) = Tx + Ty$, $T(\alpha x) = \alpha Tx$;
2. Si x est borné, Tx est borné; 3. $T(x \cdot Ty) = (Tx) \cdot (Ty)$.

L'A. se propose de montrer, sous certaines hypothèses, que T peut toujours être représenté par une espérance mathématique conditionnelle. Soient: S un ensemble de fonctions x, y, \dots à valeurs réelles sur un espace Ω , J un corps de Borel dans Ω , μ une mesure sur J , T une application de S sur S , satisfaisant aux axiomes (A). Soit $E\{x|J\}$ l'espérance mathématique conditionnelle de x relativement à J . 1° Si les x sont des fonctions non négatives, si $\alpha \geq 0$, et si on complète les axiomes (A) par la condition „ $\lim T x_n = T \lim x_n$ pour toute suite x_n non décroissante“, on a $Tx = E\{xg|J_T\}$, où J_T est un corps de Borel contenu dans J , et g une fonction mesurable non négative, telle que $E\{g|J_T\}$ soit borné. — 2° Théorème analogue lorsque S est un espace L^p ($p \geq 1$ ou $p=1$).

J. Bass.

Birkhoff, Garrett: Fourier synthesis of homogeneous turbulence. *Commun. pure appl. Math.* **7**, 19—44 (1954).

L'A. essaie de donner des bases mathématiques à la théorie statistique de la turbulence en milieu incompressible. Il se propose d'introduire, dans l'espace fonctionnel des vitesses, une mesure σ -additive, telle que toute grandeur physique soit mesurable, cette mesure ayant les caractères d'homogénéité et d'isotropie désirables. Il montre, en plusieurs étapes, qu'il existe une „mesure gaussienne“ qui, dans des conditions très générales, est compatible avec les moments d'ordre 1 et 2, donnés a priori, du champ de vitesses. Cette mesure est telle qu'une quantité de fonction linéaire des vitesses est normalement distribuée, et que, dans un développement de Fourier, des quantités provenant d'harmoniques distincts sont indépendantes. On peut définir en particulier cette mesure sur un espace d'Hilbert tel que, si f_n est une base orthonormale quelconque, tout élément soit de la forme $\sum c_n f_n$ et que $\sum c_n^2 < \infty$ corresponde à l'énergie totale du fluide, supposée finie. Les c_n sont des variables aléatoires normales et indépendantes, équivalentes aux coefficients du développement de la vitesse en série de Fourier. Cette sorte de statistique a des conséquences numériques précises, dues à ses symétries. Mais certaines d'entre elles ne sont vérifiées que dans la „phase finale“ de la turbulence, ce qui en diminue la portée. L'A. retrouve cependant l'expression générale classique des fonctions de corrélation à partir de la fonction de distribution spectrale de l'énergie $E(k)$. À partir d'un „principe d'approximation“, il établit ensuite, pour le type de statistique adoptée, l'équivalence des moyennes spatiales et des „moyennes d'ensembles“, et il montre que, si la turbulence obéit aux équations de Navier-Stokes sans termes d'inertie, une statistique initialement normale reste normale. L'A. termine par une discussion des formes habituellement acceptées pour $E(k)$. Selon lui, il n'est pas prouvé que $E(k)$ soit $O(k^4)$, et ceci correspondrait au fait que l'invariant de Loitsvansky serait une intégrale divergente.

J. Bass.

Pollaczek, Félix: Sur la théorie stochastique des compteurs électroniques. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 766—768 (1954).

Assume that events happening at times X_0, X_1, \dots have associated with them paralysis times („temps morts“) T_0, T_1, \dots , so that only those events are being registered which happen after the termination of all times $X_i + T_i$, associated with earlier events. The author derives the distribution function $p_n(t)$ of the time interval between two successive registered events when n intermediate events have remained unregistered, and $p(t) = \sum_n p_n(t)$, the unconditional distribution function of intervals between successive registered events. The result involves the solution of an integral equation. S. Vajda.

Vaulot, Émile: Délais d'attente des appels téléphoniques dans l'ordre inverse de leur arrivée. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1188—1189 (1954).

Angenommen es seien alle Linien besetzt, die Anrufe mögen im Wartezustand gehalten werden und die letzteren die zuerst frei werdenden Linien benutzen. Es wird die Verteilungsfunktion $G_n(t)$ der Wartedauer bestimmt für einen Ruf, dem n weitere vorhergegangen sind (bei Exponentialverteilung e^{-t} für die Dauer jeder Konversation); $G_n(t)$ ist mittels eines (auf Besselsche Funktionen zurückführbaren) Integrals dargestellt. Einige Schlüsse bleiben bei beliebiger Ordnungsannahme gültig bzw. führen zu Ungleichungen. B. de Finetti.

Mazelsky, Bernard: Extension of power spectral methods of generalized harmonic analysis to determine non-Gaussian probability functions of random input disturbances and output responses of linear systems. J. aeronaut. Sci. **21**, 145—153 (1954).

L'A. considère un système linéaire soumis à un signal $x(t)$, et qui, par l'intermédiaire d'une fonction de transfert $h(t)$, fournit une réponse $y(t) = \int_0^\infty x(t-s) \cdot h(s) ds$. La barre désignant une moyenne temporelle, il pose

$R_x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = x(t) x(t + \tau_1) \cdots x(t + \tau_n)$, $R_y(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = y(t) y(t + \tau_1) \cdots y(t + \tau_n)$ et désigne par $G(f_1, f_2, \dots, f_n)$ la transformée de Fourier de R . Il démontre alors que
(1) $G_y = G_x H^*(f_1 + \dots + f_n) H(f_1) \cdots H(f_n)$ (H^* conjugué de H).

Cette formule généralise à $n > 1$ la formule classique reliant la distribution spectrale d'énergie de la réponse à celle du signal. Une fois G , connue, elle permet de calculer le moment d'ordre $n + 1$ de $y(t)$. Un problème qui se pose dans les applications est celui de l'estimation de la loi de probabilité de $y(t)$, considérée comme une variable aléatoire, connaissant celle de $x(t)$, lorsque ces lois ne sont pas gaussiennes. La série d'Edgeworth donne un développement de la fonction de répartition F de $y(x)$, dont les coefficients dépendent des moments de F . Pour le calcul de ces moments, on fait appel à la formule (1). En se limitant au quatrième ordre, on a une approximation suffisante. L'A. cherche ensuite des conditions pour que la réponse $y(t)$ soit approximativement gaussienne. Les hypothèses du théorème de Liapounoff lui en fournissent qui ne font intervenir que des moments pratiquement mesurables. Quelques exemples sont donnés. J. Buss.

Statistik:

• **Savage, Leonhard, J.:** The Foundations of Statistics. (Wiley Publications in Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc. 1954. XV, 294 p. \$ 6.—.

In dem vorliegenden Buch gibt Verf. eine gründliche und umfassende Darstellung seiner augenblicklichen Ansicht über die logischen Grundlagen der Statistik wieder, wobei jedoch in der Vorrede der provisorische Charakter derselben offen zugegeben wird. Verf. unterscheidet bei der Interpretation des zunächst rein mathematisch, axiomatisch definierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs den objektivistischen, den „personalistischen“ (= subjektivistischen) und den „notwendigen“ Standpunkt und baut auf der personalistischen Wahrscheinlichkeitsdeutung B. de Finettis einerseits und dem von von Neumann und Morgenstern geprägten Nützlichkeitsbegriff andererseits als Grundpfeilern eine Theorie „vernünftigen Verhaltens gegenüber Ungewißheit“ auf, die als „behavioral“ (Walds (auf objektivistischer Wahrscheinlichkeitsdeutung fußende) Theorie der Entscheidungen umfaßt und personalistisch umdeutend ausbaut und dem „verbalen“, nur Erkenntnis- und Behauptungsentscheidungen betreffenden Gesichtspunkt gegenüber gestellt wird, wie er in Neyman-Pearsons Theorie der Hypothesenprüfung zum Ausdruck kommt. — In den ersten 7 Kapiteln baut Verf. schrittweise auf Grund von 5 Definitionen und 7 Postulaten über Zustände, Ereignisse, Folgerungen, Handlungen, Entscheidungen zwischen solchen und die als einfache Ordnung gekennzeichnete Beziehung \leq des „Nichtvor-

gezogenwerdens“, unter Einbeziehung und entsprechender Deutung der Begriffe Wahrscheinlichkeit, Spiel, Nützlichkeit, Beobachtung, seine abstrakte Theorie des Verhaltens einer idealisierten Person angesichts von Ungewißheit auf, die bis zu den Grundzügen der Versuchsplanung sowie zu suffizienter Statistik, Wahrscheinlichkeitsverhältnis und dessen Benutzung in der Sequenzanalyse führt. Auf diesem Boden entwickelt Verf. in den weiteren 10 Kapiteln die Grundzüge der von der britisch-amerikanischen Schule ausgebauten statistischen Methodik: Walds Minimaxtheorie, R. A. Fishers Theorie der Punktschätzungen und Neyman-E. S. Pearsons Theorie der Hypothesenprüfung (Signifikanzteste). Im Gegensatz hierzu lehnt Verf. die Theorie der Intervallschätzungen, insbesondere der Confidenz- und Toleranzintervalle ab, da sie sich seiner Verhaltenstheorie nicht einordnen lassen, während er eine Stellungnahme zu Fishers Fiduzialwahrscheinlichkeit vorläufig aufzieht. — Auch für denjenigen Leser, der den „personalistischen“ Ausgangspunkt des Verf. nicht teilt, erweist sich die Lektüre des Buches als nützlich und höchst interessant, zumal er nicht nur seine eigenen Ansichten überzeugend darlegt, sondern die vom gegensätzlichen Standpunkt zu erwartenden Einwände ehrlich und vorurteilsfrei erörtert, umgekehrt aber auch alle in den Bereich der Betrachtung gezogenen Grundgedanken und -begriffe der modernen Statistik einer sorgfältigen kritischen Durchleuchtung unter dem objektivistischen sowie dem personalistischen, unter dem „Verhaltens“- sowie dem „verbalen“ Blickwinkel unterwirft.

M. P. Geppert.

MacDonald, D. K. C.: Information theory and knowledge. J. appl. Phys. 25, 619—622 (1954).

L'A. pose six axiomes, incompatibles entre eux, que devrait satisfaire une mesure de la „connaissance“, qui généraliserait l'„information“ de Shannon. Il propose, sans la motiver, une expression satisfaisant cinq de ces axiomes. B. Mandelbrot.

Grab, Edwin L. and L. Richard Savage: Tables of the expected value of $1/x$ for positive Bernoulli and Poisson variables. J. Amer. statist. Assoc. 49, 169—177 (1954).

Für die „positive“ Binomialverteilung $\binom{n}{x} p^x q^{n-x} (1 - q^n)^{-1} (x = 1, 2, \dots, n)$ und „positive“ Poisson-Verteilung $e^{-m} (1 - e^{-m})^{-1} m^x x!$ ($m > 0, x = 1, 2, \dots$) tabulieren Verf. $E(1/x)$ für folgende Parameterwerte: $n = 2, 3, \dots, 20, p = 0,01; 0,05; (0,05); 0,95; 0,99; n = 21, 22, \dots, 30, p = 0,01; 0,05; (0,05); 0,50; m = 0,01; 0,05; (0,05); 1,0; (0,1); 2,0; (0,2); 5,0; (0,5); 7,0; (1); 10,0; (2); 20,0$ auf 5 Dezimalen genau. Die Werte von $E(1/x)$ werden z. B. benötigt bei der Bestimmung der Varianz des Stichprobenmittelwertes, wenn der Stichprobenumfang Zufallsvariable ist. Für große Werte von n p ist $(n p - q)^{-1}$ eine gute Näherung für $E(1/x)$. Es werden einige weitere Approximationen für $E(1/x)$ bei positiver Binomial- und positiver Poissonverteilung gegeben.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Tumanjan, S. Ch.: Über die asymptotische Verteilung des χ^2 -Kriteriums. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 1011—1012 (1954) [Russisch].

Gumbel, E. J.: Applications of the circular normal distribution. J. Amer. statist. Assoc. 49, 267—297 (1954).

Weil, Herschel: The distribution of radial error. Ann. math. Statistics 25, 168—170 (1954).

L'A. considère deux variables aléatoires normales ξ, η , indépendantes, de valeurs moyennes m_1 et m_2 et de variances σ_1 et σ_2 ($m_1 \neq m_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$). Il représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ par un développement en série faisant intervenir les fonctions de Bessel.

J. Bass.

Cadwell, J. H.: The statistical treatment of mean deviation. Biometrika 41, 12—18 (1954).

Kruskal, William: The monotonicity of the ratio of two non-central t density functions. Ann. math. Statistics 25, 162—165 (1954).

The ratio of two non-central t -densities, with equal degrees of freedom and non-central parameters δ_0 and δ_1 ($\neq \delta_0$) respectively, is strictly monotonic, increasing (decreasing) when $\delta_0 < \delta_1$ ($\delta_1 < \delta_0$).

S. Vajda.

Gumbel, E. J.: The maxima of the mean largest value and of the range. Ann. math. Statistics 25, 76—84 (1954).

Let x_n be the largest value and w the range of a sample from an arbitrary continuous distribution with mean 0 and variance 1. Universal upper bounds for $E(x_n)$ and $E(w)$ are derived as functions of the sample size n , and the maximizing distributions indicated. Similar results for symmetric distributions have been obtained by Plackett and Moriguti; cf. this Zbl. 30, 40 and 44, 136. *G. Elfving.*

Hartley, H. O. and H. A. David: Universal bounds for mean range and extreme observation. *Ann. math. Statistics* 25, 85—99 (1944).

Cf. the preceding review. — The validity of Gumbel's $\max E(x_n)$ is established for arbitrary (not necessarily continuous) initial distributions. The main part of the paper is devoted to distributions subject to an additional restriction $|x| \leq X$; for this class, $\max E(w)$ and $\min E(w)$ are derived as functions of n and X , and the corresponding initial probability laws are indicated; the minimizing one is a two-point distribution. Some minor steps in the argument are based on numerical evidence only. *G. Elfving.*

Abdel-Aty, S. H.: Tables of generalized k -statistics. *Biometrika* 41, 253—260 (1954).

Wishart (this Zbl. 46, 357) has described a technique which uses generalised k -statistics for the determination of moments of the k -statistics of population cumulants, when the population is finite. The present paper contains tables which allow the generalised k -statistics to be found in terms of symmetric functions and vice versa, for functions of weight 12 and below. Wishart's tables only went as far as 6. The author adds remarks concerning alternative ways of proceeding when expressions for moments of sample results are required. *S. Vajda.*

Ruben, H.: On the moments of order statistics in samples from normal populations. *Biometrika* 41, 200—227 (1954).

Verf. untersucht das Integral $\Phi(s; \alpha; \beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s e^{-\beta x^2} p^{\alpha} q^{\gamma} dx$ mit $s = -r^2/2$ $\int 2\pi$.
 $p = \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi / \sqrt{2\pi}$, $q = \int_x^{\infty} e^{-\xi^2/2} d\xi / \sqrt{2\pi}$, $\alpha \geq 0$ und s, β, γ ganz, nicht negativ.
 Die durch partielle Integration sich ergebende Rekursionsgleichung für Φ benutzt Verf. durch Einführung geeigneter Operatoren zur rekursiven Berechnung von Φ . Da Φ im s -ten Moment des r -ten Stufwertes (order statistic) einer n -gliedrigen Stichprobe aus normal verteilter Gesamtheit auftritt: $s! \mu'_{r,n} = n \binom{n-1}{r-1} \Phi(s; 1; r-1, n-r)$, führt die geometrische Deutung von Φ zu einer solchen für die Momente sowie für die Moment-Erzeugende des Quadrates des r -ten Stufwertes, sowie zu Zusammenhängen mit dem Flächeninhalt einer bestimmten Klasse mehrdimensionaler Flächen. *M. P. Geppert.*

Fraser, D. A. S.: Completeness of order statistics. *Canadian J. Math.* 6, 42—45 (1954).

Conditions are given for order statistics of a sample to form a complete sufficient statistic. The known result that this is the case if the population distribution is absolutely continuous follows as a special case. *S. Vajda.*

Masuyama, Motosaburo: Mathematical note on area sampling. *Sankhyā* 13, 241—242 (1954).

Short note summarizing known results due to the author and to others. *S. Vajda.*

Rajski, C.: On a method of calculating the optimal size of a sample. *Zastosowania Mat.* 1, 212—222, russische und engl. Zusammenfassgn. 223, 223—224 (1954) [Polnisch].

Sterne, Theodore E.: Some remarks on confidence or fiducial limits. *Biometrika* 41, 275—278 (1954).

Chanda, K. C.: A note on the consistency and maxima of the roots of likelihood equations. *Biometrika* **41**, 56—61 (1954).

Considering multi-parameter distributions, the author shows that, under stated assumptions, the matrix, $\{(\partial^2 \log \Phi / \partial \theta_r \partial \theta_s)_{\theta = \hat{\theta}}\}$, where θ_r and θ_s are components of the parameter vector, Φ is the likelihood and $\hat{\theta}$ is a consistent root of the likelihood equations, is negative definite with probability tending to 1, and hence that of all possible solutions of the likelihood equations one and only one tends in probability to the true parameter vector.

S. Vajda.

Ghurye, S. G. and Herbert Robbins: Two-stage procedures for estimating the difference between means. *Biometrika* **41**, 146—152 (1952).

Let two populations P_i with unknown means θ_i be given and let it be required to estimate $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, subject to an upper limit to the cost of sampling, which is assumed to be a known linear function of the numbers of observed items from P_1 and P_2 . The authors determine first those numbers of observations from the two populations which minimize the variance of $\Delta\theta$, when this is estimated by the difference of sample means, and give a formula for the minimum variance. The optimal numbers depend on the ratio of the two population variances. When this ratio is not known, they obtain estimates of the variances from a preliminary sample of $m_1 = m_2$ observations, m , from P_i . The variance of the resulting two-stage estimate is evaluated for normal P_i and asymptotic formulae are derived for this and for more general cases, concerning the ratio of this variance to that obtainable when the variance ratio is known, and when the number of observations is continuous.

S. Vajda.

Goodman, Leo A.: Some practical techniques in serial number analysis. *J. Amer. statist. Assoc.* **49**, 97—112 (1954).

Verf. betrachtet — wie auch schon in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **48**, 121) — die „Analyse von Seriennummern“, d. h. das Problem der Schätzung des Parameters p auf Grund einer zufälligen Stichprobe von n aus den natürlichen Zahlen zwischen s und $s + p$, und zwar a) bei bekanntem, b) bei unbekanntem s . Unter der Voraussetzung einer kontinuierlichen Gleichverteilung zwischen s und $s + p$ (p groß) werden in beiden Fällen behandelt: 1. Bestimmung von Confidenzintervallen, 2. Hypothesenprüfung, Angabe von Potenz-Funktionen (power functions), 3. Schätzungen von begrenztem relativem Fehler, d. h. Confidenzintervalle für p der Form $[k_1 p, k_2 p]$ mit Confidenzkoeffizienten $(1 - \alpha)$ und vorgegebenem k_1, k_2 . Im Falle a) gilt z. B.: 1. Wenn g die größte Seriennummer in der Stichprobe und $[g, a, g]$ das „ $(1 - \alpha)$ 100% Confidenzintervall“ ist, ist $\alpha = 1 - a^2$, woraus entweder a oder n bestimmt werden kann; 2. sei $H_0: p = p_0$; $H_1: p = p_1$ und $p_0 \leq p_1 \leq p_0$, dann muß bei vorgegebenem α und $\beta \geq \log [(1 - \beta)/\alpha] / \log [p_0/p_1]$ sein; 3. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Schätzung cg zwischen $k_1 p$ und $k_2 p$ liegt, ist maximal für $c = k_2$. Ähnliche Aussagen werden auch im Falle b) gemacht. In beiden Fällen wird gezeigt, wie die Voraussetzung, daß die n Seriennummern eine zufällige Stichprobe aus einem gleichverteilten Kollektiv sind, geprüft werden kann. Es werden Confidenzintervalle und Hypothesenteste im Falle b) für die exakte, diskrete Gleichverteilung betrachtet und ein Beispiel aus der Praxis gegeben, bei dem die Theorie gut mit der Erfahrung übereinstimmt.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Barnard, G. A.: Simplified decision functions. *Biometrika* **41**, 241—251 (1954).

An introduction to decision theory in the case of testing a simple hypothesis against a composite alternative. The emphasis lies on conceptual aspects and on avoiding cumbersome mathematics.

G. Elfving.

James, G. S.: Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown. *Biometrika* **41**, 19—43 (1954).

Anknüpfend an das Behrens-Fisher-Problem und dessen Verallgemeinerungen durch B. L. Welch (dies. Zbl. **29**, 408; **43**, 141) und G. S. James (dies. Zbl. **43**, 140) behandelt Verf. zunächst folgendes umfassendere Problem: Testung der Nullhypothese $\theta_1 = \dots = \theta_r = 0$ auf Grund einer Stichprobe über n stochastische Variablen, die mit unbekannten Varianzen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gegenseitig unabhängig normal verteilt sind um Mittelwerte, welche bekannte lineare Funktionen von k unbekannten Parametern $\theta_1, \dots, \theta_k$ sind. Sind a_i ($i = 1, \dots, n$) gegenseitig unabhängig mit r_i Freiheitsgraden χ^2 -verteilte, erwartungstreue (unbiased) Schätzungen der α_i , so bestimmt man unter der Alternativhypothese uneingeschränkter θ die plausibelste (Maximum-likelihood-) Schätzung $\hat{\theta}$ der θ und deren Varianzmatrix, als ob die a_i mit α_i übereinstimmen. Ist f der von den ersten r Elementen $\hat{\theta}$ gebildete Vektor und Γ der entsprechende Teil der Varianzmatrix, so besteht der Test für große r , im Vergleich von $f' \Gamma^{-1} f$ mit den Fraktilen der χ^2 -Verteilung mit r F. G.; sonst hingegen im Vergleich von $f' \Gamma^{-1} f$ mit einer Funktion $2 \cdot h(u)$, die Verf. durch

Reihenentwicklungen bis zur Ordnung v^{-2} genau approximiert, und zwar getrennt für den „einfachen Fall“, in welchem t von den α_i tatsächlich nicht abhängt, und für den „allgemeinen Fall“, in welchem t von den α_i abhängt. Illustriert wird das Verfahren an zwei einfachen Beispielen: gleichzeitige Prüfung von k vorgegebenen Mittelwerten und Prüfung der Gleichheiten von k Mittelwerten, und an einem zweifaktorigen Versuch zur Prüfung der Wechselwirkungen bzw. Haupteffekte. Die Methode wird sodann übertragen auf n p -dimensionale stochastische Vektoren, für deren Varianzmatrizen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Wishart-verteilte Schätzungen A_1, \dots, A_n vorliegen, und führt zur approximativen Lösung des Behrens-Fisher-Problems für k p -dimensionale Ausgangsgesamtheiten (Populationen). *M. P. Geppert.*

Birnbaum, Allan: Admissible tests for the mean of a rectangular distribution. *Ann. math. Statistics* **25**, 157—161 (1954).

Für die Gleich-(Rechteck-)Verteilung: $p_\theta(x) = 1$ für $\theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}$, $p_\theta(x) = 0$ sonst, sei auf Grund einer Stichprobe von n zufälligen unabhängigen Beobachtungen die Hypothese $H_0: \theta = 0$ gegen $H_1: \theta \neq 0$ zu testen. Verf. bestimmt eine „minimale wesentlich vollständige Klasse“ (minimal essentially complete class) und die „minimale vollständige Klasse“ (minimal complete class) von zulässigen Testen. Gleichmäßig schärfste Teste (uniform most powerful tests) werden angegeben gegen $H_1: \theta > 0$ und $H_1: 0 < |\theta| \leq (1 - \alpha^{1/n})/2$.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Strebel, K.: Asymptotische Entwicklung einer Summe, die beim Problem der zwei Stichproben auftritt. *Math. Ann.* **127**, 401—405 (1954).

In a paper by van der Waerden (this Zbl. **50**, 361) the function $Q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi^2\left(\frac{k}{n+1}\right)$ appeared as the variance of a certain random variable, where $z = \psi(w)$ is the inverse of the normal distribution function $w = \Phi(z)$. In the present paper the author develops the asymptotic formula

$$Q = 1 - 2n^{-1} \log n + n^{-1} \log(\log n) - n^{-1} \log(\pi/e) + o(1/n).$$

A comparison shows that the accuracy of this formula is quite good even for small values of n . *S. Vajda.*

Bechhofer, Robert E.: A single-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variances. *Ann. math. Statistics* **25**, 16—39 (1954).

Es seien X_{ij} unabhängig mit Mittelwert μ_i und Streuung σ_i normalverteilte Zufallsvariablen ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, N_i$) mit μ_i unbekannt, σ_i bekannt. Die μ_i seien dem Range nach geordnet: $\mu_{[1]} \leq \mu_{[2]} \leq \dots \leq \mu_{[k]}$. Auf Grund einer Stichprobe von $N = \sum_{i=1}^k N_i$ unabhängigen

Beobachtungen sollen statistische Entscheidungen bezüglich der Rangordnung der μ_i getroffen werden; z. B. soll die „beste“ Gesamtheit, d. h. die mit $\mu_{[k]}$, gewählt werden oder allgemeiner

die „besten“ k_s , die zweitbesten k_{s-1}, \dots , die „schlechtesten“ k_1 ($\sum_{i=1}^s k_i = k$). Die Wahr-

scheinlichkeiten dafür, die richtigen Rangentscheidungen zu treffen, werden mit Hilfe von $(k-1)$ -dimensionalen Normalverteilungen oder durch iterierte Integrale gegeben. Es werden auch Experimente behandelt, in denen die Populationen gleichzeitig nach mehreren Merkmalen zu klassifizieren sind (ohne gegenseitige Beeinflussung). In der Varianzanalyse gebräuchliche Planungsmethoden, z. B. Lateinische Quadrate, spielen beim obigen Rangproblem dieselbe Rolle; der Unterschied besteht darin, daß im einen Fall die Hypothese geprüft wird, daß alle Populationsmittelwerte gleich sind, während im andern Entscheidungen über die Rangordnung dieser Mittelwerte getroffen werden. Zwei Tafeln sollen diese Entscheidungen erleichtern: Tafel I enthält Werte von $\sqrt{N} \lambda$ (λ = standardisierte Differenz der Populationsmittelwerte), wenn die t „besten“ Gesamtheiten gesucht sind, in Abhängigkeit von k, t und den oben erwähnten Wahrscheinlichkeiten; Tafel II $\sqrt{N} \lambda$, wenn von drei Gesamtheiten die mit dem größten, zweitgrößten und kleinsten Mittelwert gesucht ist. Die Theorie läßt sich auch auf andere Parameter als Mittelwerte von normal verteilten Gesamtheiten und auf Mehrfachstichproben- oder Sequenzentscheidungen ausdehnen.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

David, F. N. and N. L. Johnson: Statistical treatment of censored data. *Bio-metrika* **41**, 228—240 (1954).

Einer der kontinuierlichen Verteilung $f(x) = dF(x)/dx$ folgenden Ausgangsgesamtheit werde eine zufällige Stichprobe $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ entnommen. Aus der Simultan-Verteilung

der N Variablen $F_{r_i} = F(x_{r_i})$ ($i = 1, 2, \dots, N$; $r_1 < r_2 < \dots < r_N$), für welche sich

$$E \left[\prod_{i=1}^N F_{r_i}^{l_i} \right] = \left[n! / \left(n - \sum_{i=1}^N l_i \right)! \right] \cdot \prod_{j=1}^N \left[\left(r_j - \sum_{i=1}^j l_i - 1 \right)! / \left(r_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_i - 1 \right)! \right]$$

ergibt, und deren Schwerpunktsmomente und Kumulanten für $N \leq 4$ tabuliert werden, leiten Verf. durch inverse Taylor-Entwicklung von x um X_r mit $F(X_r) = r_j(n+1)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) formale Entwicklungen der Momente der Stufwerte (order statistics) x , nach Potenzen von $(n+2)^{-1}$ ab und approximieren die Kumulanten bis zur Ordnung 4. Aus ihnen ergeben sich spezielle Resultate für Mediane, Korrelation zwischen Stufwerten, Quartile und Quartilabstand, die insbesondere für normal, rechteckig, Cauchy- und exponentiell verteilte Ausgangsgesamtheiten handliche Ausdrücke liefern. Die Prüfung einfacher Hypothesen über $f(t)$ auf Grund einer speziellen, rechtszensurierten Stichprobe, nämlich auf Grund der k kleinsten Werte $t_1 < \dots < t_k$ einer n -gliedrigen Stichprobe, wird auf der eine rechteckig verteilte Ausgangsgesamtheit er-

zwingenden Variablentransformation $x = \int_{-\infty}^{t_r} f(t) dt$ aufgebaut; als Kriterien für Ortungs-

parameter betrachten Verf. sodann $y_k = k^{-1} \cdot \sum_{i=1}^k x_i$ und $\bar{x}_k = y_k - (n+1)^{-1} \frac{(k+1)}{2}$ und

vergleichen ihre Schärfe mit derjenigen analoger Tests anderer Autoren. Die Arbeit bildet Teil I einer umfassenderen, in welcher diese vorbereitenden, grundlegenden Ergebnisse zur Behandlung allgemeinerer zensurierter Stichproben dienen sollen. *M. P. Geppert.*

Walter, Edward: χ^2 -Test zur Prüfung der Symmetrie bezüglich Null. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 6, 92—104 (1954).

Zur Prüfung der Symmetrie bezüglich Null wird folgender nichtparametrischer Test vorgeschlagen: Eine (nachträglich) nach der absoluten Größe geordnete Stichprobe von n Beobachtungen $|x_1| < |x_2| < \dots < |x_n|$ sei in m Klassen von möglichst gleich vielen Beobachtungen eingeteilt, d. h. die ersten p Klassen enthalten je k , die letzten $m-p$ ($p \leq m$) je $k-1$ Beobachtungen. Es gibt zwei Formen des Tests: 1. Die klassentrennenden Beobachtungen werden unterdrückt; 2. sie werden den Klassen zugeordnet. Das Prüfmaß ist

$$\chi^2 = \frac{4}{k} \sum_{i=1}^p \left(v_i - \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{4}{k-1} \sum_{i=p+1}^m \left(v_i - \frac{k-1}{2} \right)^2,$$

wobei v_i die Anzahl der positiven Beobachtungen in der i -ten Klasse ist. Für $m=1$ sind die beiden Formen des Tests mit dem zweiseitigen Vorzeichentest von R. A. Fisher identisch. Verf. beweist, daß der Test für $m=2$ in der ersten Form gegenüber allen Alternativen, bei denen die n Beobachtungen der gleichen Gesamtheit mit einer stetigen, bezüglich Null nicht symmetrischen Verteilungsfunktion entnommen sind, überall wirksam im strengen Sinne (strictly unbiased) und consistent ist. Für $m=2$ ist eine Tabelle der kritischen Werte von χ^2 für $\alpha = 5\%$, 1% und 0.1% beigelegt. *M. P. Geppert-O. Ludwig.*

David, Florence N. and N. L. Johnson: A test for skewness with ordered variables. *Ann. Eugenics* 18, 351—353 (1954).

Anscombe, F. J. and E. S. Page: Sequential tests for binomial and exponential populations. *Biometrika* 41, 252—253 (1954).

Mérie, Jean: Ajustement des constantes d'un test binomial de Wald permettant d'obtenir les expressions exactes de ses caractéristiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 2142—2143 (1954).

It is known that the functions OC and ASN of a sequential binomial probability ratio test can be precisely evaluated when $s = \log(q_0/q_1) / [\log(q_0/q_1) - \log(p_0/p_1)]$ is rational, where $1 - q_0 = p_0 = p' - \frac{1}{2}\epsilon$, $1 - q_1 = p_1 = p' + \frac{1}{2}\epsilon$ and the hypothesis to be tested is $p \leq p'$ against $p > p'$. The author announces tables which allow the calculation to be carried out for general s , after an appropriate slight modification of p' and ϵ . *S. Vajda.*

Obalski, J.: On the reliability of testing measuring instruments. *Zastosowania Mat.* 1, 105—124, russische und engl. Zusammenfassgn. 124 (1954) [Polnisch].

When, in testing the accuracy of a measuring instrument, we obtain an error which is near the admissible limit, it is possible to make a wrong decision as to the rejection or acceptance of the instrument, especially if it shows a comparatively wide spread of readings. With regard to mass produced measuring instruments, the author gives a method of calculating the probability that the limit is not exceeded. The method is based on the results of measurements and on data concerning the distribution of systematic errors in lots of instruments delivered for testing

after regulation, and the distribution of readings in a single specimen. The method may be applied both to single and to repeated measurements. Autoreferat.

Oderfeld, J. and S. Zubrzycki: On testing flowmeters. *Zastosowania Mat.* 1, 125—126, russische und engl. Zusammenfassgn. 136—137, 137 (1954) [Polnisch].

Measuring instruments, mass produced in stabilized production conditions, e. g. flowmeters, have systematical errors x and random errors. Each instrument is tested with the object of ascertaining whether it fulfils the condition of accuracy $|x| \leq g$, where g is a positive number fixed arbitrarily beforehand. The paper deals with the problem of the producer, who wants to know the relation between the probability P of the instrument produced passing the test as good and the fraction defective w of the lot, i. e. the ratio of the number of instruments which fall short of the requirements of the test to the size of the lot.

Aus der englischen Zusammenfassung.

Oderfeld, J.: The greatest difference between the ordinates of the operating characteristic curves of single sampling plans. *Zastosowania Mat.* 1, 225—230, russische und engl. Zusammenfassgn. 231 (1954) [Polnisch].

In a certain problem of statistical quality control it has been found necessary to determine the greatest difference between the ordinates of the operating characteristic curves of two single sampling acceptance plans by attributes, assuming the sizes n_1 and n_2 of the samples and the acceptance numbers m_1 and m_2 respectively. With regard to practical applications we are interested only in the case of $n_2 > n_1$, $m_2 > m_1$, $n_2 - n_1 \geq m_2 - m_1$. We seek, therefore, the extremes of the expression $p_2(w; n_2, m_2) - p_1(w; n_1, m_1)$, where w is the percent defective of the lot. The solution, sufficiently exact for many practical purposes, is found by looking up the tables of the Poisson distribution and by simple arithmetic operations. A description of iterative procedure has been given, together with an example.

Autoreferat.

James, A. T.: Normal multivariate analysis and the orthogonal group. *Ann. math. Statistics* 25, 40—75 (1954).

The first part of the paper contains an exposition of the concepts of exterior differential forms and of their use for the representation of the invariant measures on the orthogonal group and its coset spaces, the Stiefel and the Grassmann manifolds. In the second part, this theory is applied to the derivation of the distribution of the canonical correlation coefficients and the root of certain determinantal equations, and to the decomposition of a distribution arising in the normal multivariate case.

S. Vajda.

Harley, B. I.: A note on the probability integral of the correlation coefficient. *Biometrika* 41, 278—280 (1954).

Sugar, George R.: Estimation of correlation coefficients from scatter diagrams. *J. appl. Phys.* 25, 354—357 (1954).

Statt exakter Berechnung schlägt Verf. vor, den Korrelationskoeffizienten ρ einer n -gliedrigen Stichprobe von Wertepaaren (x, y) zeichnerisch zu ermitteln aus den empirischen Niveaulinien gleicher Punktdichte im Korrelationsdiagramm auf Grund der bekannt gedachten zweidimensionalen Verteilungsform. Bei standardisierter Binormalverteilung ergibt sich $\rho = \frac{1}{2} (1 - R^2) / (1 + R^2)$ aus dem (konstanten) Achsenverhältnis R der Niveauellipsen; bei Raleigh-Verteilung

$$g(x, y) = 2xy(x^2 - 2r^2)^{-1} \cdot J_0[2xyr/(x^2 - 2r^2)] \cdot \exp[-(x^2 + y^2)\sqrt{x^2}/(\bar{x}^2 - 2r^2)\sqrt{2}]$$

mit J_0 = Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0 und $\bar{x}^2 = \mu^2 - 2$ werden die Niveaulinien punktweise durch Schnitt einer Geraden mit einem Kreis im transformierten Koordinatensystem $\xi = (x^2 - y^2)/2$, $\eta = x \cdot y$ bestimmt und sodann mit den den verschiedenen Werten von

$$\rho = \{4 \cdot [E(r) - 2^{-1}(1 - r^2)K(r)] - \pi\} \cdot (4 - \pi)^{-1} \approx r^2$$

entsprechenden Niveaulinien verglichen, wobei $E(r)$, $K(r)$ vollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art sind. Es folgen Erörterungen über die Genauigkeit dieser zeichnerischen Ermittlung von ρ , über den Einfluß des Zufalls und über die Auswirkung der Unkenntnis bezüglich der wahren Verteilungsform.

M. P. Geppert.

Garza, A. de la: Spacing of information in polynomial regression. *Ann. math. Statistics* 25, 123—130 (1954).

Let $P(x) = \sum_0^m \alpha_j x^j$ be a polynomial the coefficients of which are to be determined by experiments. Assume that to any set (x, w) of distinct numbers x_1, \dots, x_n in a fixed interval I , and equally many positive numbers w_1, \dots, w_n with a fixed sum Q , there exists a combined experiment consisting of n uncorrelated observations y_1, \dots, y_n with $E(y_j) = P(x_j)$ and

var $y_j = 1 w_j$; the w_j may be interpreted as allocation numbers. It is proved that to any set (x, w) with $n = m + 1$, there is a set (x, w) , with precisely $m + 1$ observations, which is equally advantageous for estimating $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, in the sense that the two corresponding combined experiments have the same information matrix with respect to the unknown parameters.

G. Elfving.

Durand, David: Joint confidence regions for multiple regression coefficients.

J. Amer. statist. Assoc. **49**, 130—146 (1954).

A discussion of the difficulties arising when confidence statements have to be made about several parameters on the basis of one and the same material, especially in regression theory. The author advocates and illustrates the use of confidence ellipsoids with subsidiary intervals. The subsidiary confidence intervals, for linear combinations $\sum h_i \beta_i$ of the parameters, correspond to pairs of parallel tangent planes to a confidence ellipsoid; the totality of the „subsidiary statements“ is equivalent to the confidence ellipsoid statement. Cf. Scheffé [Biometrika **40**, 87—104 (1953)] and Roy-Bose [Ann. math. Statistics **24**, 513—536 (1953)]. *G. Elfving.*

Stuart, Alan: Asymptotic relative efficiencies of distribution-free tests of randomness against normal alternatives. J. Amer. statist. Assoc. **49**, 147—157 (1954).

Es sei für das standardisierte Normal-Regressionsmodell $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$ [$E(\varepsilon) = 0$; $V(\varepsilon) = 1$] die Hypothese $H_0: \beta = 0$ zu prüfen. Verf. vergleicht mit Hilfe des von E. J. G. Pitman (Lecture notes on non-parametric inference, Univ. of North Carolina 1948) eingeführten Maßes die asymptotische relative Effizienz von fünf verteilungsfreien (nichtparametrischen) konsistenten Testverfahren: 1. Differenz-Vorzeichen-Test (difference-sign-test) [G. H. Moore und W. A. Wallis, J. Amer. statist. Assoc. **38**, 153—164 (1943)]. 2. M. G. Kendalls Rangkorrelations-test. 3. Spearmans Rangkorrelationstest. 4. Umschlagpunkttest (turning point test) [W. A. Wallis und G. H. Moore, J. Amer. statist. Assoc. **36**, 401—409 (1941)]. 5. Serien-Rang-Korrelationstest (rank serial correlation test). — Verglichen mit dem üblichen Test auf Grund des Stichprobenregressionskoeffizienten haben die Tests 1., 4., 5. die asymptotische relative Effizienz 0, die Tests 2., 3. dagegen $3/\pi \approx 0,955$. Im vorliegenden Fall sind daher die beiden Tests 2. und 3. vorzuziehen; aus rechentechnischen Gründen ist 3. praktischer als 2. *M. P. Geppert-O. Ludwig.*

Connor, W. S. and W. H. Clatworthy: Some theorems for partially balanced designs. Ann. math. Statistics **25**, 100—112 (1954).

Let N be the incidence matrix of a partially balanced incomplete block design with m associate classes. Let the number of replicates be r and consider $AN' = 0$ as an equation in r . The authors determine the roots of this equation for general m and their multiplicities for $m = 2, 3$ or 4, in terms of the parameters of the design. They derive new necessary conditions for the parameters to make such a design possible and find lower bounds for b (the number of blocks). The case $m = 2$ is studied in greater detail. *S. Vajda.*

Hall jr., Marshall and W. S. Connor: An embedding theorem for balanced incomplete block designs. Canadian J. Math. **6**, 35—41 (1954).

From a symmetric balanced incomplete block design another design may be derived by deleting one block and all its varieties throughout. The parameters of the new design satisfy then the relations $r = k + \lambda$, $r\lambda = k(k + \lambda - 1)$, $b\lambda = (k + \lambda)(k + \lambda - 1)$. The authors derive necessary and sufficient conditions for a design with parameters satisfying these relations to be a derived design and conclude that this is always uniquely the case when $\lambda = 1$ or $= 2$. The proofs are based mainly on results of W. S. Connor, this Zbl. **46**, 361 (which contains also a counterexample for $\lambda = 3$, due to Bhattacharya). *S. Vajda.*

Clatworthy, Willard H.: A geometrical configuration which is a partially balanced incomplete block design. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 47—55 (1954).

The author shows that a geometrical configuration consisting of certain lines of the finite projective geometry $PG(3, p^n)$ may be interpreted as a partially balanced incomplete block design with 2 associate classes, when p is a prime number ≥ 1 , and n is an integer ≥ 0 . Incidentally, relations between parameters are derived which

serve then as lemmas for the proof of the main theorem. The construction is illustrated for $PG(3, 3)$ in tabular form. *S. Vajda.*

• **Wold, Herman:** A study in the analysis of stationary time series. With an appendix by Peter Whittle. 2nd ed. Stockholm: Almqvist & Wiksell 1954. VIII, 236 p. Sw. kr. 28,—.

The main text of this pioneer work is practically unaltered in the present second edition (cf. this Zbl. 19, 356). The short Appendix 1, by Wold, comments of certain points in the light of later development. Appendix 2, by Whittle, is called „Some recent contributions to the theory of stationary processes“ and gives, on 33 pages, a condensed and somewhat sketchy account of spectral and inference theory for stationary time series, partly based on Whittle's own work. — Due to its didactic merits, the book as a whole is still a very valuable introduction to the subject, particularly for readers interested in the applications. *G. Elfving.*

Walker, A. M.: The asymptotic distribution of serial correlation coefficients for autoregressive processes with dependent residuals. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 60—64 (1954).

Let X_1, \dots, X_{n+u} be consecutive observations from a stationary autoregressive process $\sum_{i=0}^p \alpha_i X_{t-i} = Y_t$ where $\{Y_t\}$ is a stationary m -dependent process [cf. Diananda, Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 239—246 (1953)] with mean zero and finite fourth moment. Then for $n \rightarrow \infty$ the distribution function of

$$Z_{n,u} \equiv n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (X_t X_{t+u} - E(X_t X_{t+u}))$$

tends to that of a normal variable with zero mean and finite variance, and the joint distribution of $Z_{n,u}$ ($u = 0, 1, \dots, q$) tends to the multinomial form with zero means and finite covariance matrix. *S. Vajda.*

Anderson, R. L.: The problem of autocorrelation in regression analysis. J. Amer. statist. Assoc. 49, 113—129 (1954).

A historical and bibliographical survey of the analysis of autocorrelation in time series. *G. Elfving.*

Masuyama, Motosaburo: Analysis of the 1939 model sample survey results from the viewpoint of integral geometry. Sankhyā 13, 229—234 (1954).

A formula derived in an earlier paper (this Zbl. 50, 364) and other models are discussed on the basis of experimental results due to J. M. Sen Gupta. *S. Vajda.*

Moszyński, W.: On determining construction safety factors. Zastosowania Mat. 1, 83—100, russische und engl. Zusammenfassgn. 100—102, 102—104 (1954) [Polnisch].

In einem Sicherheitsfaktor $n = Q \cdot F(P \cdot K)$, der stets die Bedingung $n > 1$ erfüllen muß, seien Q, F, P, K voneinander unabhängige, log-normal-verteilte stochastische Variablen. Sind Q_0, F_0, P_0, K_0 deren Medianwerte und Q', Q'' usw. jeweils die durch

$$\int_{-\infty}^{\ln Q'} e^{-(\ln q - \ln Q_0)^2 / 2 \sigma^2} d(\ln Q) = \int_{\ln Q'}^{\infty} e^{-(\ln q - \ln Q_0)^2 / 2 \sigma^2} d(\ln Q) = \frac{q}{\sigma \sqrt{2\pi}} = \frac{(1-p)}{2}$$

usw. definierten, zur Restwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ gehörenden unteren und oberen Zufallsgrenzen von Q usw., dann ergeben sich die zugehörigen „relativen Normalabweichungen“ durch Übersetzung von $\ln Q'' - \ln Q_0 = (\ln Q'' - \ln Q') : 2 = \ln |Q''/Q'| = \ln g_q$ zu $g_q = |Q''/Q'|$ usw. Hieraus bestimmt sich die entsprechende Normalabweichung g_u nach der (aus der Varianzen-additivität folgenden) allgemeinen Regel:

$$\ln g_u = \sqrt{\alpha_1^2 \ln^2 g_{u_1} + \dots + \alpha_m^2 \ln^2 g_{u_m}}$$

für $u = b u_1^{x_1} \dots u_m^{x_m}$ mit gegenseitig unabhängigen log-normal verteilten u_1, \dots, u_m . Mit Hilfe von 10 verschiedenen p -Werten (0,98 bis 0,99998) grenzt Verf. 10 verschiedene Sicherheitsklassen ab. Es folgt ein Zahlenbeispiel. *M. P. Geppert.*

Matschinski, Matthias: Résultats d'observations et leurs probabilités a priori et a fortiori. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1861—1863 (1954).

Fucks, Wilhelm: On Nahordnung and Fernordnung in samples of literary texts. *Biometrika* **41**, 116—132 (1954).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Steinhaus, H.: On establishing paternity. *Zastosowania Mat.* **1**, 67—81, russische und engl. Zusammenfassgn. 81—82, 82 (1954) [Polnisch].

Smith, C. A. B.: The separation of the sexes of parents in the detection of linkage in man. *Ann. Eugenics* **18**, 278—301 (1954).

In various works previously published by several authors, the scoring system for the detection of linkage in human genetics has been developed on the assumption that the recombination fraction is the same in the father and in the mother. The present author describes a method for the separation of the sexes. In case of families in which the parental genotypes of two inherited characters to be tested are known, the method of calculating the score for linkage is explained with illustration by some examples. Main idea depends on a classification of phenotype of child according to the probability of having received a definite gene from one parent. In case where the parental genotypes are unknown or not directly tested, it is stated how a modification might be made. Further a method of score correction is explained. In every case, formulas for mean, variance and covariance of the score are derived. Finally a rough test is given for a difference in recombination fraction in the two sexes.

Y. Komatu.

Bell, D. A.: Statistics of a population with creation and recombination dependent on existing numbers. *Proc. phys. Soc., Sect. B* **67**, 227—231 (1954).

By substitution into a formula given by Fry (Probability and its engineering uses, New York 1928) the author derives the probabilities of a stable population having l members ($l = 0, 1, \dots$) when the rates of creation and of destruction are, respectively, as follows: (i) constant, and proportional to l , (ii) constant, and proportional to l^2 , (iii) proportional to $N - l$ and proportional to l^2 . The resulting distributions may be described as of Poisson, Bessel, and Laguerre type. The variances of the distributions are also investigated.

S. Vajda.

Vntema, L.: Demographic extensions of the simple birth- and death-process. *Verzekerings-Arch.* **31**, Bijvoegsel actuar. 6—20 (1954).

Den klassischen „Geburt-Tod-Prozeß“ dehnt Verf. in Anlehnung an die Bedürfnisse der Demographie durch sukzessive Berücksichtigung des Geschlechtes und des Familienstandes aus. Aus den entsprechend definierten Übergangswahrscheinlichkeiten werden teils durch direkte Differentiationen, teils durch Lösung der für die erzeugende Funktion geltenden partiellen Differentialgleichungen Erwartungswerte und Momente zweiter Ordnung hergeleitet.

M. P. Geppert.

Jager, J. de: Sampling distributions and graduations. *Verzekerings-Arch., Bijvoegsel* **31**, 29—50 (1954).

Fortführung einer Untersuchung über die Streuung der Sterbewahrscheinlichkeiten (dies. Zbl. **51**, 373) und der versicherungstechnischen Barwerte.

E. Zwinggi.

Vogel, Walter: Die Faktorenmethode der individuellen Witwenrentenversicherung. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* **54**, 47—56 (1954).

Zur einfachen Gestaltung der Tarife für einseitige Überlebensrenten kann die Relation $\dot{a}_{x:r-A} \sim f(x, A) \dot{a}_{x:r-1}$ verwendet werden. Verf. prüft $f(x, A)$ als Funktion von x und als Funktion von A allein. Die beste Lösung ergibt sich bei Annahme einer logistischen Funktion für $f(x, A)$. Zur Ermittlung der einzelnen Werte von $f(x, A)$ genügt weitgehend Interpolation, die rationell mit Hilfe von Lochkarten durchgeführt werden kann.

E. Zwinggi.

Leepin, Peter: Reserverechnung in der Volksversicherung. Mitt. schweiz. Versicherungsmath. **54**, 39—46 (1954).

Sofern die Bruttoprämie der gemischten Versicherung „1“ nach der Formel $\Pi_x = (A_{x:n} + \alpha - \gamma \ddot{a}_{x:n}) / (1 - \beta) \ddot{a}_{x:n}$ berechnet wird, läßt sich die Nettoprämie nach den gleichen Rechnungsgrundlagen schreiben als $P_x = (1 - \beta) \Pi_x / (1 + \alpha) - (\alpha d + \gamma) / (1 + \alpha) = a \Pi_x - b$. Die entsprechende Nettoreserve wird ${}_tV_x = 1 - (d - b) \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}} - a \Pi_x \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}}$. Zur gruppenweisen Berechnung der Nettoreserve nach der prosp. Methode entfällt bei Anwendung der letzten Formel die Berechnung und Summation der Nettoprämie; es genügt die Kenntnis der Versicherungssummen und der Bruttoprämien. Sofern die Nettoprämie nicht nach Abschlußgrundlagen bestimmt wird, gelten die angegebenen Beziehungen nicht genau. Es ist aber möglich, mittlere Werte für a und b zu finden, so daß die Approximation genügend genau wird.

E. Zwinggi.

Jecklin, H. und P. Strickler: Eine Variante zur F -Methode der Reserveberechnung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **54**, 71—80 (1954).

Verf. leitet aus der F -Methode zur gruppenweisen Reserveberechnung ein von ihm als φ -Methode bezeichnetes modifiziertes Verfahren ab, das auf folgenden Annahmen beruht. Im Segment ${}_0V$ bis ${}_nV$ wird der Unterschied $Y(t)$ zwischen der linear interpolierten Reserve und der genauen Reserve angesetzt als $Y(t) = [t/n - A t / (1 - \varphi t)] C$, wo φ eine geeignet gewählte (durch Bestandsstruktur, Sterbetafel und Zins bestimmte) Konstante und A und C aus drei gegebenen Reservewerten ${}_0V < {}_AV < {}_nV$ berechenbar sind. Für eine Versicherung mit abgelaufener Zeit t ist dann die approximierte Einzelreserve

$${}_tV = {}_0V + ({}_nV - {}_0V - C) t/n + C (1/n - \varphi) t (1 - \varphi t) = k - g t - h t (1 - \varphi t)$$

und für eine Gruppe mit gleicher Bestandsdauer die Totalreserve $\sum S_i k_i + t \sum S_i g_i + [t/(1 - \varphi t)] \sum S_i h_i$. Sofern der Bestand vorwiegend aus gemischten Versicherungen besteht, kann $\varphi = 0,002 + 0,4 i$ angesetzt werden.

E. Zwinggi.

Maurer, Willy und Max Boss: Eine verfeinerte t -Methode. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **54**, 99—110 (1954).

Bei der t -Methode zur gruppenweisen Reserveberechnung werden in der einfachsten Anwendungsform die verschiedenen Eintrittsalter x_i durch ein mittleres Alter \bar{x}_0 derart ersetzt, daß $\sum S_i q_{x_i} = q_{\bar{x}}, \sum S_i$ gilt. Die mit zunehmendem t ziemlich rasch wachsenden Abweichungen zwischen genauer und approximativer Reserve zwingen zur Einführung eines weiteren mittleren Abschlußalters \bar{x}_{15} , das aus der Bedingung bestimmt werden kann, daß approximative und genaue Reserve z. B. nach $t = 15$ rechnungsmäßig übereinstimmen müssen. Für die dazwischen liegende Zeitspanne führt $\bar{x}_t = (1 - \lambda_t) \bar{x}_0 + \lambda_t \bar{x}_{15}$ mit $\lambda_t = (t/100) (t/5 + 11/3)$ oder $\lambda_t = (1/100) (2 t^2 + 30 t + 100)$ zu befriedigenden Ergebnissen, wobei der zweite Ansatz zu einer (gewünschten) Reserveverstärkung führt.

E. Zwinggi.

Heer, W. J. C. de: Das Zinsfußproblem. Verzekerings-Arch., Actuar. Bijvoegsel **31**, 55—66 (1954).

Nach Diskussion der von J. Lah gegebenen Gleichungen [Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **47**, 167—247 (1947)] gibt der Verf. mit einer ähnlichen Methode solche Gleichungen für eine approximative Lösung des Zinsfußproblems, die sich für die Rechnung besser eignen.

W. Saxer.

Zwinggi, E.: Ein Verfahren zur Bestimmung der Rendite von festverzinslichen Anleihen. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **54**, 57—70 (1954).

Setzt man $\varepsilon = (1 + i_0) / (1 + i)$ (i_0 nomineller und i effektiver Zinsfuß), und entwickelt den Wert einer Anleihe als Potenzreihe in ε (bis zum Term in ε^2), so ergibt sich ε aus $1/\varepsilon = (M_2/2 M_1) + (M_1/4)$ (M_i — Konstanten; A = Differenz zwischen den Werten für i und i_0). Mehrere Beispiele: Annäherung gut.

B. de Finetti.

Robertson, D. J. and I. L. B. Sturrock: Active investment policy related to the holding of matched assets. Trans. Fac. Actuaries **22**, 36—96 (1954).

Leontief, Wassily: Mathematics in economics. Bull. Amer. math. Soc. **60**, 215—233 (1954).

Bailey, Martin J.: Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand functions. *Econometrica* 22, 72—76 (1954).

Unter verallgemeinerten Annahmen (veränderliches Einkommen) ist eine Ungleichung Hotellings nicht mehr notwendig gültig. Andererseits, wenn sie gültig ist, kann Edgeworths Paradoxon (Preisverminderung bei Steuereinführung) nicht für zwei Produkte einer monopolistischen Wirtschaft zutreffen. *B. de Finetti.*

McKenzie, Lionel: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. *Econometrica* 22, 147—161 (1954).

In Grahams Wirtschaftsmodell (sowie in ähnlich gebildeten Verallgemeinerungen) gibt es eine einzige Lösung, d. h. einen einzigen Produktionsvektor y_0 , so daß der ihm vermöge der Nachfragegleichungen entsprechende Preisevektor p_0 auch die Gleichgewichtsbedingung befriedigt ($p_0 \cdot y = \max$ für $y = y_0$; d. h. $p_0 \in \pi_0$, wo π_0 Menge der Vektoren, die senkrecht zu einer Stützebene in y_0 zum Bereiche der möglichen y stehen). Der Existenzbeweis beruht auf Kakutanis Festpunktsatz (es entspricht jedem p eine konvexe π ; daher existiert $p_0 \in \pi_0$). Der Eindeutigkeitsbeweis beruht auf Samuelsons Nachfrageaxiomen (es wird eine Ungleichung für Grahams Modell bewiesen, die mit der Existenz von zwei senkrechten Paaren y_1, p_1 und y_2, p_2 im Widerspruch steht). *B. de Finetti.*

Brown, T. M.: Standard errors of forecast of a complete econometric model. *Econometrica* 22, 178—192 (1954).

Es seien Y_t und Z_t (t = Zeit) die Vektoren der vorherzusagenden bzw. der als bekannt betrachteten Größen: wenn man ein ökonometrisches Modell $Y_t = FZ_t + \mu_t$ angibt (F = Matrix, μ_t = zufälliger Fehlervektor), ist FZ_t die Erwartung von Y_t ; die Streuung von Y_t ist die Summe der Streuung von μ_t und der Streuung von FZ_t (die durch die Fehler der statistischen Schätzmethoden bei Bestimmung der Matrix F entsteht). Es wird die Rechnungsmöglichkeit diskutiert und die Vereinfachung betrachtet, die bei Benutzung der (weniger befriedigenden) Regressionsform erreichbar ist. *B. de Finetti.*

Clower, R. W. and D. W. Bushaw: Price determination in a stock-flow economy. *Econometrica* 22, 328—343 (1954).

Corlett, W. J.: Effects on demand of changes in the distribution of income. A comment. *Econometrica* 22, 344—347 (1954).

Borch, Karl: Effects on demand of changes in the distribution of income. A reply. *Econometrica* 22, 348—349 (1954).

Farrell, M. J.: An application of activity analysis to the theory of the firm. *Econometrica* 22, 291—302 (1954).

Champernowne, D. G.: A note on Mr. Farrell's model. *Econometrica* 22, 303—309 (1954).

Ancombe, F. J.: Le meilleur procédé pour l'inspection rectifiante d'un lot. *Trabajos Estadíst.* 5, 67—76 (1954).

Cookerboo jr., Leslie: Costs of operating crude oil pipe lines. *Rice Inst. Pamphlet* 41, 35—113 (1954).

Arbous, A. G. and H. S. Siehel: New techniques for the analysis of absenteeism data. *Biometrika* 41, 77—90 (1954).

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Lenz, Hanfried: Herleitung von Dimensionsformeln der projektiven Geometrie aus eingeschränkten Verknüpfungsaxiomen. *S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* 1953, 81—87 (1954).

Die Dimensionsformeln der projektiven Geometrie, insbesondere die Tatsache, daß die Summe der Dimensionen zweier Unterräume gleich der Summe der Dimen-

sionen ihres Durchschnitts und ihres Verbindungsraumes ist, werden aus den folgenden Axiomen hergeleitet: I. Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, auf der beide liegen. II. Gibt es zu den verschiedenen Punkten A, B, C, D einen Punkt, der mit A, B sowohl wie mit C, D auf je einer Geraden liegt, so gibt es auch einen Punkt, der mit A, C und mit B, D auf je einer Geraden liegt. III. Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte. G. Pickert.

Lenz, Hanfried: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **57**, 20—31 (1954).

In einer projektiven Ebene werden die miteinander inzidierenden Paare Punkt-Gerade betrachtet, bezüglich derer der kleine Satz von Desargues mit diesem Paar als Zentrum und Achse gültig ist. Verf. zeigt, daß in einer projektiven Ebene nur folgende Konfigurationen \mathfrak{F} für die als Achse und Träger einer kleinen Desarguesfigur fungierenden miteinander inzidierenden Paare Punkt-Gerade möglich sind: (I) \mathfrak{F} ist leer. (II) \mathfrak{F} besteht aus einer Geraden und einem damit inzidierenden Punkt. (III) Alle Achsen in \mathfrak{F} gehen durch einen Punkt, der nicht Zentrum ist, alle Zentren liegen auf einer Geraden, die nicht Achse ist. (IVa) \mathfrak{F} besteht aus einer Achse a mit allen Punkten von a als Zentren. (IVb) ist dual zu (IVa). (V) Es gibt einen Punkt A und eine Gerade a durch A , so daß alle und nur die Punkte von a Zentren, alle und nur die Geraden durch A Achsen sind. (VIa) Jeder Punkt ist Zentrum, alle Achsen gehen durch einen festen Punkt A . (VIb) ist dual zu (VIa). (VII) \mathfrak{F} besteht aus allen Geraden und Punkten. — Offenbar sind Ebenen von einem der Typen (IVa), (IVb), (VIa) oder (VIb) nicht selbstdual. Der Koordinatenbereich der genannten Typen von projektiven Ebenen wird näher untersucht, und es wird nach echten Beispielen gefragt. Solche finden sich [außer für (I)] nach Pickert (dies. Zbl. **47**, 264) jedenfalls für einen der Typen (II) oder (III). Dem Typ (IVa) oder (IVb) gehören gewisse Ebenen über von Dickson (Göttinger Nachr. **1905**, 358—393; vgl. auch H. Zassenhaus, dies. Zbl. **11**, 103) angegebenen endlichen vollständigen Fastkörpern an. Man hat so Beispiele für endliche nicht selbstduale projektive Ebenen. Andere von Dickson stammende zweiseitig distributive Zahlensysteme liefern Beispiele für (selbstduale) Ebenen von Typ (V). Ebenen vom Typ (VIa) oder (VIb) sind nicht bekannt. Man weiß, daß sie nur über Zahlensystemen der Charakteristik 2 existieren können. Denn nach Skorniakov (dies. Zbl. **42**, 35) hat für eine von 2 verschiedene Charakteristik die Konfiguration (VIa) oder (VIb) die Konfiguration (VII) zur Folge, welche einer Ebene über einem Alternativkörper entspricht. W. Klingenberg.

Karzel, Helmut: Erzeugbare Ordnungsfunktionen. Math. Ann. **127**, 228—242 (1954).

Gegeben sei der n -dimensionale projektive Raum über einem Schiefkörper K . Unter einer Ordnungsfunktion wird nach E. Sperner eine für alle Paare: Hyperebene g , Punkt α , erklärte Funktion $g(\alpha)$ verstanden, welche nur die Werte 0, +1, -1 annimmt und für die $g(\alpha) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn g, α inzidieren. Ist in K eine Zweiteilung, d. h. eine beliebige Einteilung der von Null verschiedenen Elemente in zwei Klassen $> 0, < 0$, und ferner für die Hyperebenen g und die Punkte α eine Normierung der Koordinatenvektoren gegeben, d. h. ist aus der Gesamtheit der proportionalen Vektoren je ein fester u_g bzw. x_α ausgewählt, und setzt man dann $g(\alpha) = 0, +1, -1$, je nachdem $u_g x_\alpha = 0, > 0, < 0$ ist, so ist $g(\alpha)$ eine Ordnungsfunktion. Jede Ordnungsfunktion, die so erhalten werden kann, wird erzeugbar genannt. Die erzeugbaren Ordnungsfunktionen bilden ein Erzeugendensystem der Gruppe aller Ordnungsfunktionen. — Der Verf. setzt sich das Ziel, die erzeugbaren Ordnungsfunktionen geometrisch zu kennzeichnen. Ist jedem Punktepaar $\alpha \neq \beta$ ein Punkt $\varepsilon_{\alpha\beta}$ der Verbindungsgeraden so zugeordnet, daß für je drei Punkte α, β, γ die zugeordneten Punkte $\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\gamma}, \varepsilon_{\beta\gamma}$ kollinear sind, und ist jedem Hyperebenenpaar $g \neq h$ eine Hyperebene j_{gh} so zugeordnet, daß die duale Bedingung gilt, so werden die entstandenen $\varepsilon_{\alpha\beta}, j_{gh}$ ein Äquatorsystem genannt. Ferner wird eine Äquivalenz von zwei Paaren g, α und h, β in bezug auf ein Äquatorsystem A eingeführt: sie bedeutet bei allgemeiner Lage, daß $\alpha, \beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$ und die Schnittpunkte von h, g, j_{gh} mit der Verbindungsgeraden von α, β ein „quadrangular set“ bilden. Das Ergebnis ist: Eine Ordnungsfunktion ist dann und nur dann erzeugbar, wenn es ein Äquatorsystem A gibt, so daß die Ordnungsfunktion für alle bezüglich A äquivalenten Paare denselben Wert hat. — Für eine erzeugbare Ordnungsfunktion gilt: Ist g eine Hyperebene durch $\varepsilon_{\alpha\beta}$, so ist $g(\alpha) = g(\beta)$, also gilt die Spernersehe Hyperebenenrelation für den Äquatorpunkt, und die duale Tatsache. Aber diese Eigenschaft ist nicht kennzeichnend; die Ordnungsfunktionen mit dieser Eigenschaft bilden eine natürliche Verallgemeinerung der erzeugbaren. Zum Schluß wird gezeigt, wie sich aus den Überlegungen dieser Arbeit die Tatsache ergibt, daß die Ordnungsfunktionen, für die die Hyperebenenrelation allgemein gilt, erzeugbar sind. F. Bachmann.

Klingenberg, Wilhelm: Eine Begründung der hyperbolischen Geometrie. Math. Ann. **127**, 340—356 (1954).

Kürzlich (dies. Zbl. **50**, 369) hat der Ref. die Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen

$PGL(2, K)$ über einem beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ als abstrakte Gruppe durch vier Axiome $A1 - A4$ gekennzeichnet, denen die involutorischen Elemente genügen. Hierdurch ist für das gruppentheoretisch, in Aussagen über Geraden- und Punktspiegelungen formulierte Axiomensystem A der absoluten Geometrie (dies. Zbl. **43**, 351) die Frage angreifbar geworden: Welche Axiome hat man hinzuzufügen, um die hyperbolische Geometrie auszusondern? Der Verf. definiert eine hyperbolische Bewegungsgruppe G als eine Gruppe, welche A und den Zusatzaxiomen $A2, A3, A4$ genügt; diese bedeuten: es gibt Enden; je zwei Enden sind durch eine Gerade verbindbar; eine Gerade gehört höchstens zwei Enden an. Die Gültigkeit des „Transitivitäts-Axioms“ $A1$ kann man dann mit geäußerten Schlußweisen der absoluten Geometrie beweisen, nachdem man erkannt hat, daß wegen $A4$ der ordinäre Fall vorliegt. Also ist G als eine $PGL(2, K)$ darstellbar. Hierbei induziert die in G gegebene Einteilung der involutorischen Elemente in Geraden- und Punktspiegelungen eine Anordnung von K . Es ergibt sich also: Die hyperbolischen Bewegungsgruppen sind genau die Gruppen der gebrochen-linearen Transformationen über geordneten Körpern. — Weiter wird über eine hyperbolische Bewegungsgruppe bewiesen: 1. Jede eigentliche Bewegung aus G läßt sich als Produkt von höchstens vier Punktspiegelungen darstellen. 2. G besitzt freie Beweglichkeit (es wird die Äquivalenz dieser Forderung mit mehreren anderen gezeigt) dann und nur dann, wenn in dem geordneten Körper K jedes positive Element Quadrat ist. 3. Die Untergruppen von G , welche die Spiegelungen an allen Geraden, die Enden angehören, enthalten und welche A genügen, also absolute Teilgeometrien mit Enden definieren, entsprechen eineindeutig den „Positivbereichen“ aus K . — Bemerkung: P. Bergau hat gezeigt (Diss. Kiel 1953), daß man in der obigen Definition der hyperbolischen Bewegungsgruppe $A3$ entbehren kann. Nennt man zwei Geraden, die weder einen Punkt noch ein Lot gemein haben, randparallel, so genügen also die Zusatzaxiome: Es gibt Randparallelen; ein Lot gemein haben, randparallel, so genügen höchstens zwei Randparallelen. Ferner kann man nach Bergau jede eigentliche Bewegung als Produkt von höchstens drei Punktspiegelungen darstellen, da folgender Satz gilt: Ist in einer $PGL(2, K)$, mit K von Charakteristik $\neq 2$ und $K \neq \text{Primkörper } K_0$, eine Untergruppe U vom Index 2 gegeben, so ist jedes Element aus U darstellbar als Produkt von höchstens drei involutorischen Elementen aus U . F. Bachmann.

Szász, Paul: Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene. *Acta Sci. math* **15**, 126—129 (1954).

Die Hauptformeln der hyperbolischen Trigonometrie werden mit einem Minimum von Elementargeometrie im Poincaréschen Modell hergeleitet. F. A. Behrend.

Fladt, Kuno: Über die Transformationen der Hauptgruppe in der nicht-euklidischen Geometrie und die komplexe Trigonometrie. *J. reine angew. Math.* **192**, 129—154 (1954).

Verf. stellt sich zwei Aufgaben: Die Bestimmung der Bewegungen und Umlegungen in der nichteuklidischen Raumgeometrie und die Begründung der allgemeinen komplexen Trigonometrie im nichteuklidischen Raum. Er will diese Aufgaben ohne die auf Felix Klein zurückgehenden projektiven Begriffsbildungen lösen. Seine Methode ist rechnerisch und bedient sich des von W. K. Clifford geschaffenen Begriffs der Biquaternionen. Mit Benutzung einiger Ergebnisse von E. Kosiol (Grundlagen der Kinematik im hyperbolischen Raum, Diss. Bonn 1922) führt Verf. die erste Aufgabe vollständig durch. Sodann erhält er die allgemeinste Trigonometrie im Raum und für komplexe Argumente $q + \sqrt{K}\sigma$ mit Hilfe eines Satzes von Friedrich Schilling über ein aus drei windschiefen Geraden des nicht-euklidischen Raumes und den Geraden ihrer kürzesten Abstände gebildetes Sechseck. Diese allgemeinste Trigonometrie umfaßt alle möglichen Fälle, z. B. die ebene und die sphärische, als Sonderfälle. M. Zacharias.

Tits, J.: Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7 . *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **40**, 29—40 (1954).

Eine notwendige Ergänzung einer früheren Beweisskizze (dies. Zbl. **50**, 258). — Klassifikation der Polaritäten der Oktavenebene: außer den hermiteschen elliptischen und hyperbolischen gibt es noch eine Art, die sich (bis auf Kollineationen) affin schreiben läßt als $u = -\widehat{x y^{-1}}$, $v = -\widehat{y^{-1}}$ mit $\widehat{\sum a_i e_i} = \sum \varepsilon_i a_i e_i$, $\varepsilon_i = -1$ ($i = 1, 2, 6$), $\varepsilon_i = 1$ (sonst). Wie die ersten zwei zur elliptischen und hyperbolischen Form der F_4 , so führt die dritte zu einer der C_4 . — Zusammenhang zwischen den Polaritäten und den Elementen der Jordanschen Ausnahme-Algebra. — Ein

etwas provisorischer Versuch einer geometrischen Interpretation der E_7 als Transformationsgruppe einer 33-dimensionalen Mannigfaltigkeit, der im Hinblick auf eine Arbeit des Ref. [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 218–230, 363–368 (1954)] wohl befriedigender überarbeitet werden könnte. *H. Freudenthal.*

Elementargeometrie:

Piza, Pedro A.: Une généralisation du théorème de Pythagore. *Mathesis* 63, 26–28 (1954).

Barlotti, Adriano: Un'estensione di alcuni noti teoremi relativi al triangolo. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 32, 35–37 (1954).

Svenonius, Björn: Dreiecke ABC mit halbzahligen Seiten und gegebenem $\cos(B-A)$. *Elementa* 37, 102–106 (1954) [Schwedisch].

Conte, Luigi: Sul centro isogono. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 32, 23–34 (1954).

Thébault, Victor: Au sujet de l'orthopôle. *Mathesis* 63, 21–26 (1954).

In der Ebene des Dreiecks $T = ABC$ sei P ein beliebiger Punkt und P' sein isogonal konjugierter Punkt bezüglich T . α, β, γ seien die Spiegelbilder von P und α', β', γ' diejenigen von P' bezüglich BC, CA, AB . Die Kreise $BC\alpha, CA\beta, AB\gamma$ schneiden sich in einem Punkt φ des Kreises $\alpha\beta\gamma$, der dem Punkt P auf der gleichseitigen Hyperbel $ABCP$ diametral gegenüberliegt. Analog ergibt sich ein Punkt φ' für α', β', γ' und P' . O sei der Umkreismittelpunkt von T . O_i, O'_i ($i = a, b, c$) seien die Mittelpunkte der Kreise $BC\alpha, CA\beta, AB\gamma, BC\alpha', CA\beta', AB\gamma'$. Dann gilt der Satz: Die Punkte O, φ und O, φ' sind die Brennpunkte zweier den Dreiecken $O_a O_b O_c$ und $O'_a O'_b O'_c$ einbeschriebener Kegelschnitte, deren Fokalachsen dem Umkreisdurchmesser von T gleich sind. Eine Transversale Δ treffe BC, CA, AB in A', B', C' . $(O, R), (O_i, R_i)$ seien die Umkreise der Dreiecke $T, T_a \equiv AB'C', T_b \equiv BC'A', T_c \equiv CA'B'$. Dann liegen die Orthopole der zu Δ, BC, CA, AB parallelen Durchmesser der Kreise $(O, R), (O_i, R_i)$ bezüglich der Dreiecke T, T_a, T_b, T_c auf einem Kreis, dem „Kreis der Orthopole“ des Vierseits (ABC, Δ) . Die Mittelpunkte der Kreise der Orthopole der drei Vierseite $PABC, PCBA, PACB$ liegen in einer Geraden. In dem vollständigen Vierseit $Q \equiv (ABC, \Delta)$ seien (O') der Miquelsche Kreis, M der Miquelsche Punkt, O_a, O_b, O_c die Umkreismittelpunkte der vier Dreiecke von Q ; q, q_a, q_b, q_c die Orthopole der zu Δ, BC, CA, AB parallelen Durchmesser von (O') bezüglich der Dreiecke $t = O_a O_b O_c, t_a = O_b O_c, t_b = O_c O_a, t_c = O_a O_b$: Die Orthopole $\varphi, \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ fallen mit den Spiegelbildern der Mitten der Strecken MO, MO_a, MO_b, MO_c bezüglich des Schwerpunktes der Punkte O, O_a, O_b, O_c zusammen. *M. Zacharias.*

Thébault, Victor: Pascal hexagons associated with a triangle. *Amer. math. Monthly* 61, 328–330 (1954).

Stefánsson, Sigurkarl: Über zwei mit gleichseitigen Hyperbeln zusammenhängende geometrische Örter. *Nordisk mat. Tidskrift* 2, 44–52 (1954) [Norwegisch].

Bekannt ist der Satz I: Der geometrische Ort (g. O.) der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks gehen, ist dessen Neunpunktekreis. Satz II: Der g. O. der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die die Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, ist sein Polarkreis, d. h. der Kreis, der festliegt in der Inversion, die die Ecken in die Höhenfußpunkte überführt. Satz Ia: Der g. O. der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die eine feste Gerade t in einem festen Punkt S berühren und durch einen festen Punkt C gehen, ist der Kreis durch C, S und die Projektion von C auf t . Satz IIa: Der g. O. der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die eine feste Gerade l in einem gegebenen Punkt S und eine andere feste Gerade m berühren, ist der Kreis, der l im Schnittpunkt von l und m berührt und seinen Mittelpunkt auf dem Lot von S auf m hat. Neun Aufgaben können mit Hilfe dieser Sätze gelöst werden. *M. Zacharias.*

Cavallaro, Vincenzo G.: Sur l'emploi des axes de l'ellipse de Steiner. *Mathesis* 63, 29–36 (1954).

Mittels der Längen der Achsen der Steinerschen Inellipse des Dreiecks werden ausgedrückt: Die Inhalte der beiden Napoleonischen Dreiecke, der Fußpunktdreiecke der beiden isodynamischen Punkte, des Lemoineschen Punktes und der beiden

Brocardschen Punkte, des Lemoineschen Sechsecks, der äquimedialen Dreiecke (d. h. der Dreiecke, deren Seiten auf den Medianen oder Seitenhalbierenden senkrecht stehen und diese in gleichen Verhältnissen teilen), und eine große Zahl weiterer bemerkenswerter Strecken, deren Anführung hier zu weit führen würde.

M. Zacharias.

Briquet, André: Sur les cubiques de MacCay. *Mathesis* **63**, 105—111 (1954).

Wenn a, b, c die Koordinaten der Ecken eines dem Einheitskreis der Ebene der komplexen Zahlen eingeschriebenen Dreiecks T sind, und wenn man $a + b + c = s_1$, $ab + bc + ca = s_2$, $abc = s_3$ setzt, so beschreiben zwei isogonale Punkte, deren Fußpunktkreis in T den Eulerschen Kreis unter einem gegebenen Winkel θ schneidet, zwei Kubiken $\Gamma_\theta, \Gamma_{\bar{\theta}}$, die konjugiert genannt werden, mit den Gleichungen $(z - a)(z - b)(z - c) = s_3 t e^{i\theta}$ (bzw. $= s_3 t' e^{-i\theta}$), in denen t und t' reelle Parameter bedeuten. Für $\theta = 0$ ergibt sich die Kubik von MacCay, die ihre eigene Konjugierte ist. Γ_θ wird deshalb die verallgemeinerte Kubik von MacCay für den gegebenen Winkel θ genannt. Verf. untersucht die Eigenschaften dieser Kurve. Γ_θ ist verallgemeinerte MacCay-Kubik für eine einfach unendliche Menge von Dreiecken T_1 vom Winkel $\theta = \varphi$. Die MacCay-Kubiken stehen in engen Beziehungen zur Steinerschen Inellipse und ihren Brennpunkten.

M. Zacharias.

Robison, G. B.: Doodles. *Amer. math. Monthly* **61**, 381—386 (1954).

Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe CD , dann die Höhe DE im Dreieck ACD , EF in ECD usw., so konvergiert die Punktfolge C, D, E, F, \dots gegen einen Punkt P . Fällt man ebenso die Höhen CD in ABC , DE' in BCD , $E'F'$ in $E'CD$, \dots , so konvergiert die Folge C, D, E', F', \dots gegen einen Punkt Q . P ist in ACD homolog zu Q in ABC , und Q in BCD ist homolog zu P in ABC . Die Konstruktion hängt zusammen, wie an Beispielen gezeigt wird, mit der Abbildung einer Strecke auf ein zweidimensionales Gebiet. Interessant ist auch der Zusammenhang mit den Brocardschen Punkten: Konstruiert man im Dreieck ABC auf derselben Seite von BC wie A den Winkel $BCE = \frac{1}{2} BAC$ und auf derselben Seite von AC wie B den Winkel $ACB = \frac{1}{2} CBA$, wodurch die dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke CBE und ACD entstehen, so haben die Brocardschen Punkte von $\triangle ABC$ die obige Eigenschaft, daß P in ACD homolog zu Q in ABC und Q in CBE homolog zu P in ABC ist, und sie sind das einzige Punktpaar mit dieser Eigenschaft.

M. Zacharias.

Schuh, Fred: Geometrische Örter, die im Zusammenhang mit dem Umkreis des Fußpunktdreieckes stehen. I—V. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 92—103, 129—139, 140—151, 238—249, 250—257 und französ. Zusammenfassg. 257—262 (1954) [Holländisch].

I. Zieht man durch einen Punkt P die Lotlinien PD, PE, PF auf die Seiten eines Dreieckes ABC , dann habe der Umkreis von DEF den Halbmesser ρ . Es wird nach dem geometrischen Ort K gefragt, auf dem P liegen muß, darauf ρ einen vorgegebenen Wert habe. Für K ergibt sich eine Kurve sechster Ordnung, für die A, B und C Doppelpunkte und die Kreispunkte dreifache Punkte sind. An Hand der auf elegante Weise erhaltenen Gleichung von K in rechtwinkligen Koordinaten werden eine Reihe von Eigenschaften von K bewiesen, besondere Fälle untersucht und für den reellen Fall das Wichtigste über die Gestalt von K erörtert. II. Es werden die Kurven K für verschiedene Werte von ρ besprochen. Für markante Werte von ρ wird die Gestalt von K angegeben. In III werden die Fälle betrachtet, in denen das Grunddreieck gleichschenkelig-rechtwinklig oder gleichseitig ist. Teil IV behandelt einige Grenzfälle. Im besonderen den, der sich ergibt, wenn einer der drei Eckpunkte des Ausgangsdreieckes ins Unendliche rückt. V. Im letzten Teil dieser Arbeit werden weitere Grenzfälle besprochen und die dazugehörigen Kurven sechster Ordnung mit deutlichen Figuren dargestellt. Im besonderen wird der Fall behandelt, daß zwei Eckpunkte des Ausgangsdreieckes zusammenrücken. Am Ende der Arbeit findet sich eine (französische) Zusammenfassung aller Resultate. *R. W. Weitzenböck.*

Gorissen, L.: Sur les droites d'Euler d'un quadrangle orthocentrique. *Mathesis* **63**, 123—126 (1954).

Clawson, J. A.: A chain of circles associated with the 5-line. *Amer. math. Monthly* **61**, 161—166 (1954).

Ausgehend von den bekannten Ketten von Clifford und de Longchamps.

erhält Verf. die Sätze: l_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) seien die Seiten eines ebenen vollständigen Fünfeits; A_{ik} der Schnittpunkt von l_i, l_k ; \mathcal{C}_{45} der Umkreis von A_{12}, A_{23}, A_{13} ; \mathcal{C}_{45} sein Mittelpunkt usw. Dann haben $\mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{13}, \mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{15}$ einen gemeinsamen Punkt F_1 ; $\mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{13}, \mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}_{15}, F_1$ liegen auf einem Kreis $\mathcal{C}_1(C_1)$; F_p, F_q liegen auf $\mathcal{C}_{pq}, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ liegen auf einem Kreis $\mathcal{F}(F)$; $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ haben einen gemeinsamen Punkt K ; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 liegen auf einem Kreis $\mathcal{C}(C)$; \mathcal{F} geht durch K . — Ferner: F_p, A_{pq}, F_q, A_{pq} schneiden sich in einem Punkt von \mathcal{F} (das ergibt 10 Punkte auf \mathcal{F}). K und F liegen invers bezüglich \mathcal{C} . — Durch Inversion an einem Kreis \mathfrak{M} um K ergeben sich weitere neue Systeme von Punkten und Kreisen. *M. Zacharias.*

Dutron, O.: Sur la puissance d'un point. *Mathesis* **63**, 120—123 (1954).

Court, Nathan Altshiller: Sur les tétraèdres circonscrits par les arêtes à une quadrique. *Mathesis* **63**, 12—18 (1954).

Wenn ein Tetraeder (T) mit seinen Kanten eine Quadrik Σ berührt, so schneidet jede Fläche von (T) Σ in einem dem Dreieck dieser Fläche eingeschriebenen Kegelschnitt; jeder der vier Kegelschnitte berührt die drei andern; die sechs Berührungspunkte der Quadrik mit den Kanten von (T) bilden einen Ceva-Sechser („sexterne cévien“), d. h. die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der drei Paare von Gegenkanten gehen durch einen Punkt, den „Kontaktpol“ von Σ mit (T). Es folgen weitere Sätze über die Eigenschaften von (T), deren Anführung zu weit führen würde. *M. Zacharias.*

Rangaswami Aiyer, K.: On a quartic curve associated with a tetrahedron. *Math. Student* **21**, 87—96 (1954).

Sind l und l' zwei gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders \mathcal{J} und Achsen zweier Ebenenbüschel, so bilden die Schnittgeraden der zueinander senkrechten Ebenen der beiden Büschel eine Fläche 2. Ordnung H , die dem Tetraeder \mathcal{J} umgeschrieben ist. Zu den drei Paaren (l, l') erhält man so drei Flächen H_1, H_2, H_3 . Wie N. A. Court bewiesen hat [Duke math. J. **13**, 123—128 (1946)], gehören diese drei H_i mit der die vier Höhen von \mathcal{J} enthaltenden F_2 demselben F_2 -Büschel an, gehen also durch dieselbe Raumkurve F vierter Ordnung. Verf. untersucht metrische Spezialfälle von F und zeigt, daß sich diese am einfachsten behandeln lassen, wenn man von den Rotationsflächen 2. Ordnung ausgeht, die apolar zu \mathcal{J} sind.

R. W. Weitzenböck.

Coxeter, H. S. M., M. S. Longuet-Higgins und J. C. P. Miller: Uniform polyhedra. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **246**, 401—450 (1954).

Ein Polyeder mit regulären Flächen und unter einander äquivalenten Ecken wird uniform genannt. Außer den 5 platonischen Körpern, den 13 archimedischen Polyedern, den halbregulären Prismen und Antiprismen und den 4 regulären Sternpolyedern wurden noch insgesamt 41 uniforme Polyeder von Hess (1878), Badoureau und Pitsch (1881) entdeckt. In vorliegender Arbeit werden in systematischer Weise 12 weitere uniforme Polyeder gefunden und beschrieben. Es wird vermutet, daß damit eine vollkommene Aufzählung der uniformen Polyeder erzielt wurde. Die Arbeit ist von ausgezeichneten Zeichnungen und Modellphotographien begleitet.

L. Fejes Tóth.

Shephard, G. C.: A construction for Wythoffian polytopes. *Canadian J. Math.* **6**, 128—134 (1954).

Einige Anwendungen eines Verfahrens von W. A. Wythoff und H. S. M. Coxeter für die Untersuchung gewisser Polytope (s. H. S. M. Coxeter, dies. Zbl. **10**, 275). Die betrachteten Polytope sind diejenigen, deren Symmetriegruppen aus Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt werden können. Die gegebenen Hyperebenen p_1, p_2, \dots, p_n gehen alle, im allgemeinen Falle, durch den Koordinatenanfangspunkt O hindurch; sie schneiden auf der Einheitskugel um O einen Fundamentalbereich $P_1 P_2 \dots P_n$ aus; auf die Geraden $O P_i$ werden n von O ausgehende Vektoren r_i gelegt, deren Endpunkte R_i von den Hyperebenen p_i die Entfernung $\frac{1}{2}$ haben. Es gibt

einen degenerierten Fall, in welchem eine der gegebenen Hyperebenen durch O nicht hindurchgeht: der entsprechende Vektor ist Null. Aus den Vektoren r_i und je nach der Wahl einer ersten Polyederecke, erhält man leicht die Koordinaten aller Polyederecken der Polyeder, die die gegebene Symmetriegruppe gestatten. Es folgen zwei Beispiele für die beiden Fälle, den allgemeinen und den degenerierten, im Raume S_3 .

E. Togliatti.

Finsler, Anne: Volumen und Oberfläche von Kreuzkern und Kugel. *Elemente Math.* 9, 36—39 (1954).

In ganz elementarer, jedoch sehr eleganter Weise wird mittels des Prinzipes von Cavalieri das Volumen eines Kreuzkerns (Kloster- oder Kappengewölbes) berechnet. Unter Heranziehung des Parallelbereiches nach Außen wird dann (nach Minkowski) auch die Oberfläche ermittelt. Schließlich wird das Volumen einer über einem konvexen Polygon errichteten „Kuppel“ und das der eingeschriebenen Pyramide (mit gleicher Grundfläche) verglichen (Verhältnis 2:1). Die Kuppel entsteht hierbei so: Über einem inneren Punkt O des Polygons wird eine Strecke OS senkrecht aufgetragen. S wird mit den einzelnen Polygonecken durch Viertel-ellipsen so verbunden, daß OS jeweils eine Ellipsenhalfachse ist. Der kleinste konvexe Körper, der diese Figur enthält, ist die Kuppel. — Die Verf. gelangt schließlich so zum Halbkugel- und Kegelvolumen über der gleichen Grundfläche, die als reguläres n -Eck, mit $n \rightarrow \infty$ gewählt wird.

H. R. Müller.

Riedwil, H. und H. Debrunner: Drei neue Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Kreises. *Elemente Math.* 9, 16—18 (1954).

Jamison, Free: Trisection approximation. *Amer. math. Monthly* 61, 334—336 (1954).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• **Leja, Franciszek:** *Analytische Geometrie.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1954. 288 S. zł 22,50 [Polnisch].

Ein zugängliches Lehrbuch der analytischen Geometrie auf der Ebene und im Raume, bestimmt hauptsächlich für den Leser, welcher die analytische Geometrie als Instrument in anderen Wissenschaftszweigen oder für Anwendungen gebraucht. Im Anhang findet man eine kurze Einführung in die Matrizen- und Determinantentheorie samt den Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme und quadratische Formen.

W. Wrona.

Shephard, G. C. and J. A. Todd: Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.* 6, 274—304 (1954).

Die Verff. untersuchen hier die endlichen Gruppen G kongruenter Transformationen in einem unitären Raum U_n mit n Dimensionen (s. G. C. Shephard, dies. Zbl. 52, 164), die den Koordinatenanfangspunkt invariant lassen und die von Spiegelungen der Ordnung n an Hyperebenen erzeugt werden können. Die Abhandlung ist in zwei Teile eingeteilt. Im 1. Teil werden alle irreduziblen Gruppen G der gewünschten Art bestimmt; der Grundgedanke des Verfahrens besteht in der Bemerkung, daß die Matrizen der Operationen einer jeden Gruppe G als Kollineationsmatrizen in einem projektiven Raum S_{n-1} mit $n-1$ Dimensionen betrachtet werden können, und daß man so in S_{n-1} eine Kollineationsgruppe G' erhält, die von Homologien erzeugt werden kann; umgekehrt liefert jede Gruppe G' eine endliche Anzahl von Gruppen G . Mit dieser Methode werden zunächst die imprimitiven Gruppen G bestimmt, dann die primitiven; und alles das im Falle $n > 2$, da für den Fall $n = 2$ eine besondere Behandlung nötig ist. Man findet insgesamt 37 Arten von Gruppen G . — Im 2. Teil werden verschiedene Eigenschaften der Gruppen G bewiesen. Jede Gruppe G besitzt n algebraisch unabhängige invariante Formen I_1, I_2, \dots, I_n mit den Graden $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_n + 1$. Das Produkt dieser Grade ist die Ordnung g der Gruppe gleich. Jede Invariante von G ist ein Polynom in I_1, I_2, \dots, I_n . Die Jacobische Determinante von I_1, I_2, \dots, I_n zerfällt in ein Produkt von linearen Faktoren, die, gleich Null gesetzt, die Spiegelhyperebenen der Gruppe liefern (jeder lineare Faktor erscheint mit der Multiplizität $p-1$, wenn die entsprechende Spiegelung die Ordnung p hat). Jede endliche Gruppe unitärer Transformationen in n Veränderlichen, die eine Basis invarianter Formen wie I_1, I_2, \dots, I_n besitzt, gehört der hier betrachteten Gruppenart an. Die Anzahl der Spiege-

lungen in der Gruppe G ist gleich der Summe der Gruppenexponenten m_i . Die Anzahl der Operationen der Gruppe G , die alle Punkte eines Raumes S_{n-k} invariant lassen, ist gleich dem Koeffizienten von t^k im Produkt $\prod_{i=1}^n (1 + m_i t)$. Die Spiegelungen von G können so angeordnet werden, daß ihr Produkt die Periode $m_n + 1$ hat; usw. Die Beweise einiger dieser Eigenschaften beschränken sich darauf zu verifizieren, daß diese für alle im 1. Teil gefundenen Gruppenarten gültig sind.

E. Togliatti.

Goormaghtigh, R.: Sur une affinité complexe. Mathesis 63. Suppl. 3 5, 1–28 (1954).

Die vom Verf. in zahlreichen Arbeiten benutzte komplexe Affinität wird in rechtwinkligen Koordinaten definiert durch die Gleichungen $x = x_1, y = i y_1$ ($i^2 = -1$). Verf. faßt die Grundeigenschaften dieser Transformation (Transformation zweier senkrechten Richtungen, Länge einer Strecke, Winkeleigenschaften, Dreiecksinhalt) kurz zusammen und gibt dann zahlreiche Anwendungen auf die Dreiecksgeometrie, die affine Transformation spezieller Kurven und die Transformation infinitesimaler Eigenschaften, insbesondere Krümmungsmittelpunkt, von Kurven.

M. Zacharias.

Bagehi, Hari Das and Shib Sankar Sarkar: The relationship between harmonic and anharmonic collineations in a plane. Amer. math. Monthly 61, 397–401 (1954).

Die ebene Kollineation $\varrho x' = \lambda x, \varrho y' = \mu y, \varrho z' = \nu z$ heißt „anharmonisch“, wenn einer der drei Parameter λ, μ, ν das geometrische Mittel zwischen den beiden andern, „harmonisch“, wenn $\lambda:\mu:\nu = -1:1:1$ oder $1:-1:1$ oder $1:1:-1$ ist. Verff. beweisen den Satz: Das Produkt zweier h. K. ist eine a. K., und umgekehrt ist jede a. K. auf unendlich viele Weisen als das Produkt zweier h. K. ausdrückbar.

M. Zacharias.

Edge, W. L.: Geometry in three dimensions over $GF(3)$. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 222, 262–286 (1954).

Die projektive Geometrie über $GF(3)$ ist dadurch ausgezeichnet, daß die 4 Punkte einer Geraden in jeder Reihenfolge harmonisch liegen und daher alle ihre Permutationen durch Projektivitäten erzeugt werden können. Es gibt 2 projektiv verschiedene Typen von nicht ausgearteten Flächen 2. Ordnung: Regelflächen mit je 16 Punkten und „Ellipsoide“ mit je 10 Punkten. In beiden Fällen werden die außerhalb der Fläche liegenden Punkte in 2 Klassen geteilt, die Systeme der Imprimitivität sind für die Projektivitäten, welche die Fläche invariant lassen. Ein Punkt gehört zur positiven oder zur negativen Seite der Fläche, je nachdem das Flächenpolynom in ihm einen quadratischen Rest von 3, oder einen Nichtrest als Wert annimmt. Im Falle des Ellipsoids bilden die Kollineationen, die jede Seite invariant lassen, die engere orthogonale Gruppe (second projective orthogonal group $PO_2(4, 3)$). Es gehen durch jeden Punkt des Ellipsoids 2 auf der positiven und 2 auf der negativen Seite liegende Tangenten. Ferner gibt es auf jeder Seite je 6 Pentaeder, die das Ellipsoid in allen seinen Punkten berühren. Alle geraden Permutationen der 6 positiven (negativen) Pentaeder werden von der engeren orthogonalen Gruppe erzeugt. Man erhält so einen neuen Beweis des Isomorphismus dieser Gruppe mit A_6 , d. h. eine Darstellung der A_6 über $GF(3)$ vom Darstellungsgrad 4. Die Arbeit enthält 2 Konstruktionen des Ellipsoids über $GF(3)$ und eine ausführliche Diskussion geometrischer Eigenschaften.

F. W. Levi.

Lauffer, Rudolf: Die nichtkonstruierbare Konfiguration (10_3) . Math. Nachr. 11, 303–304 (1954).

Analytischer Beweis der von H. Schroeter (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1889. 193–236) bemerkten Tatsache, daß die von S. Kantor [S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. II 84, 1291–1314 (1881)] mit C bezeichnete Konfiguration (10_3) in einer Geometrie über einem kommutativen Körper unmöglich ist.

M. Zacharias.

Camier, E. D.: Some theorems on conics. Math. Gaz. 38, 18–25 (1954).

Zu zwei Kegelschnitten Σ und Σ' gibt es einen dritten F , der „harmonic locus“ genannt wird. Er ist der Ort aller Punkte der Ebenen von Σ und Σ' , in denen die an Σ in Σ' gezogenen Tangenten sich harmonisch trennen. Über die Figur Σ, Σ', F und die vier zu Σ und Σ' gezogenen Tangenten wird eine Reihe von Sätzen (Theorem I bis XIV) bewiesen, die sich auf affine und metrische Spezialfälle beziehen, wo also

z. B. F ein Kreis oder Σ eine Parabel ist usf., Beweise meist analytisch mit homogenen Koordinaten.

R. W. Weitzenböck.

Jakobi, R.: Einige Parabeleigenschaften. *Elemente Math.* **9**, 76–80 (1954).

Tenea, Luigi: Sull'iperboloide a una falda di rotazione. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **9**, 89–91 (1954).

Balliccioni, A.: Application des coordonnées barycentriques à des propriétés relatives à la courbure des coniques et des cubiques. *Mathesis* **63**, 112–117 (1954).

Mittels baryzentrischer Koordinaten untersucht Verf. oskulierende Kegelschnitte. Krümmungskreis, Krümmungsradius, Krümmungen in zwei Punkten eines Kegelschnitts; Krümmung in einem Punkt, Krümmungen in zwei Punkten, Krümmungen in drei in einer Geraden liegenden Punkten einer Kubik.

M. Zacharias.

Goldberg, Michael: Rotors within rotors. *Amer. math. Monthly* **61**, 166–171 (1954).

Die Kurve von Ribaucour (eine Parallelkurve der Astroide) kann einer Deltoidinvolute einbeschrieben und stetig in einer bestimmten Weise durch alle Richtungen gedreht werden. Die Deltoidinvolute kann in einem umschriebenen Quadrat, die Ribaucour-Kurve in einem umschriebenen gleichseitigen Dreieck rotieren. Verf. weist auf mögliche Verallgemeinerungen hin.

M. Zacharias.

Semple, J. G.: Some investigations in the geometry of curve and surface elements. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **4**, 24–49 (1954).

Ein Linienelement E_k , der Ordnung k , in einem projektiven Raume S_r , bedeutet eine Reihe von $k-1$ aufeinanderfolgenden unendlich benachbarten Punkten $O (= O_0, O_1, \dots, O_k)$. Die Fragen der Aufstellung eines Koordinatensystems für die E_k und ihrer Abbildung auf die Punkte einer geeigneten Mannigfaltigkeit ist, besonders für $k=1, 2$ und $r=2$, viel behandelt worden; so z. B. hat G. Gherardelli (dies. Zbl. **26**, 150) als Minimalmodell für die E_2 einer Ebene eine M_1^4 gefunden. Diese Fragen werden hier wieder behandelt und vertieft. — Die E_1 einer Ebene, d. h. die Paare eines Punktes (x_0, x_1, x_2) und einer Geraden (u_0, u_1, u_2) in vereinigter Lage, werden auf die Punkte der Schnitt- V_3^2 der Segreschen $X_{ij} = x_i u_j$ mit der Hyperebene $X_{00} + X_{11} + X_{22} = 0$ abgebildet. Durch jeden Punkt P der V_3^2 , Bild des Linienelementes (O, a) der Ebene, gehen zwei Geraden g_x, g_u der V_3^2 hindurch, deren Verbindungsebene als Fokalebene von P bezeichnet wird. Einem von O ausgehenden E_2 entspricht auf V_3^2 ein von P ausgehendes und in der Fokalebene von P liegendes E_1 ; allen E_2 , die (O, a) enthalten, entsprechen so auf V_3^2 alle E_1 des Büschels g_x, g_u ; läßt man a um O , und so P auf g_x variieren, so beschreibt g_u eine rationale normale kubische Regelfläche, mit g_x als Leitgerade; und allen von O ausgehenden E_2 entsprechen die E_1 dieser Regelfläche längs ihrer Leitgerade g_x ; diese $\infty^2 E_1$ können weiter auf die Punkte einer rationalen normalen Regelfläche 5. Ordnung des S_3 , mit einer Leitgerade, abgebildet werden. Läßt man dann auch O in der Ebene wandern, so bekommt man wieder das Minimalmodell M von G. Gherardelli. Als erste Derivierte $C^{(1)}$ einer ebenen Kurve C bezeichnet man das Bild auf V_3^2 aller E_1 von C ; sie ist eine Fokalkurve $C^{(1)}$ der V_3^2 , d. h. eine Kurve der V_3^2 , welche in jedem ihrer Punkte die betreffende Fokalebene berührt. Das Verfahren kann fortgesetzt werden; denn es ist möglich, für jeden Punkt von M eine Fokalebene zu definieren, so daß allen E_2 der ebenen Kurve C die Punkte einer Fokalkurve von M entsprechen, die zweite Derivierte $C^{(2)}$ von C . — Alles Gesagte wird dann auf die E_1 und die E_2 des S_3 ausgedehnt. Die E_1 werden auf die Punkte einer V_3^2 des S_3 abgebildet; durch jeden Punkt dieser V_3^2 geht ein Fokal- S_3 hindurch; die E_2 des S_3 bilden sich auf die Fokal- E_1 der V_3^2 ab; insbesondere kann man die E_2 mit festem Ursprung O auf die Punkte einer W_1 des S_{22} abbilden; Verf. gibt auch eine Abbildung dieser W_1 auf einen Raum S_1 an. — Die weitere Ausdehnung auf die E_1 und E_2 des S_r liegt jetzt auf der Hand. — Schließlich noch etwas über die Flächenelemente E_1 des S_3 ; sie werden ähnlicherweise auf eine V_3^2 des S_{11} abgebildet; in jedem Punkt P der V_3^2 gibt es ∞^3 Fokalebenen, die die Geraden eines linearen Strahlenkomplexes projizieren; usw.

E. Togliatti.

Algebraische Geometrie:

Arvesen, Ole Peder: Sur les paraboles, considérées comme des courbes I' . *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **26**, 85–88 (1954).

Ebene Kurven I'' definiert der Verf. in einer frühen Arbeit (dies. Zbl. **26**, 146), ebenso die geometrische Summe zweier Kurven I'' (dies. Zbl. **26**, 147). Die einzigen Kurven I'' zweiter Klasse sind die Parabeln, an ihnen wird die geometrische Addition ausführlich erläutert.

R. W. Weitzenböck.

Peeples jr., W. D.: Elliptic curves and rational distance sets. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 29—33 (1954).

L'A. considera le cubiche ellittiche C^3 di equazione: $a x(y^2-1) - b y(x^2-1) = 0$ con a e b razionali, e assegna alcuni teoremi per l'esistenza di infiniti punti razionali su C^3 . Se x è razionale e $x = (r/s) 2^t$ con r ed s dispari, l'A. collega al numero x la funzione numerica $v(x) = t$ e con questo accorgimento risultano facilitate le dimostrazioni dei suoi teoremi.

G. Sansone.

Barlotti, Adriano: Alcune osservazioni sulle quartiche piane dotate di un tacnodo simmetrico. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 55—58 (1954).

Sia Γ_4 una quartica piana, razionale, con un nodo A , e un tacnodo O ; se M_1, M_2, N_1, N_2 sono le intersezioni — fuori di A — di Γ_4 con due rette per A , e le coppie $M_1, N_1; M_2, N_2$ sono allineate con O , questo è un tacnodo armonico. — Questo teorema, assieme ad altri analoghi sulle quartiche piane, è dimostrato dall'A., che ne fa poi alcune applicazioni a una quartica gobba di seconda specie, dotata di punto doppio a tangenti distinte.

V. Dalla Volta.

Salmon, Paolo: Sulla postulazione di una curva semplice dello spazio S_r . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 46—50 (1954).

In un qualunque iperspazio, S_r , sia C^n una curva dell'ordine n . L'A. ricerca la „postulazione“ della C^n , cioè il numero, θ_m , delle condizioni che debbono essere imposte alle ipersuperficie dell'ordine m , appartenenti all' S_r , affinché contengano la C^n . Egli trova, per m sufficientemente alto: $(^c) \theta_m = m n - (n-1)(n-2)/2 - c + 1$, dove c rappresenta una costante indipendente da m , della quale si determina il significato (invero non molto espressivo) in relazione al confronto della θ_m con un'altra funzione di analoga natura, che, nel procedimento seguito dall'A., ha mansioni ausiliarie. Attraverso la rappresentazione parametrica della C^n , il problema viene ricondotto al computo delle condizioni perché le curve di un particolare sistema lineare piano acquistino una componente prefissata. La $(^c)$ risulta valida anche nell'ipotesi che la C^n possa essere spezzata, ma tuttavia non aggiunge nulla alla formula classica del Castelnuovo, della quale anzi appare assai meno significativa. Così, nel complesso, l'interesse del lavoro non va oltre quello di una ingegnosa esercitazione scolastica di tono elevato.

L. Campedelli.

Knight, A. J.: Some surfaces containing irrational pencils of maximum genera. J. London math. Soc. **29**, 38—43 (1954).

Verf. betrachtet im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume zwei projektive Netze algebraischer Flächen der Ordnungen m, μ , mit $m \geq \mu$ und $m + \mu \geq 4$: (1) $x_1 S_1(y) + x_2 S_2(y) + x_3 S_3(y) = 0$; $x_1 \Sigma_1(y) + x_2 \Sigma_2(y) + x_3 \Sigma_3(y) = 0$: die y sind hier die homogenen Punktkoordinaten; x_0, x_1, x_2 sind die Parameter der beiden Flächennetze; und alles wird in der allgemeinsten Lage vorausgesetzt. Betrachtet man jetzt eine allgemeine algebraische Gleichung: (2) $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ der Ordnung $n > 3$, und eliminiert man x_0, x_1, x_2 zwischen (1), (2), so erhält man die Gleichung einer algebraischen Fläche F der Ordnung $(m + \mu)n$, Ort der ∞^1 Schnittkurven C der Flächenpaare (1), die die Bedingung (2) erfüllen. Die Kurven C haben die Ordnung $m\mu$ und bilden auf F ein Büschel des Geschlechts $(n-1)(n-2)/2$. Die Kurve $S_1/\Sigma_1 = S_2/\Sigma_2 = S_3/\Sigma_3$ ist für F eine n -fache Kurve. Die Ausrechnung der Geschlechter p_a, p_g von F zeigt, daß $p_g - p_a = (n-1)(n-2)/2$, so daß F ein irrationales Kurvenbüschel mit dem höchstmöglichen Geschlecht enthält.

E. Togliatti.

Knight, A. J.: On overlapped algebraic surfaces. J. London math. Soc. **29**, 43—48 (1954).

Verf. hat schon gezeigt (dies. Zbl. **50**, 372), daß jede algebraische Fläche F , welche ein irrationales Kurvenbüschel des Geschlechts $p \geq 1$ enthält, wo p die Irregularität der Fläche bedeutet, einen „overlap“ größer als Null aufweist. Für die Bedeutung dieses Wortes s. dies. Zbl. **37**, 225. Hier gibt Verf. einen Beweis für die Umkehrung dieses Satzes. Der Beweis besteht aus transzendenter-topologischen Betrachtungen. Man setzt voraus, daß F in einem S_3 liegt und lauter normale Singularitäten besitzt; man betrachtet auf F ein System u_1, u_2, \dots, u_p von unabhängigen einfachen Integralen 1. Gattung mit der betreffenden Periodenmatrix Ω ; man kon-

truiert die entsprechende Abelsche V_i mit den Gleichungen $x_i = f_i(c_1, \dots, c_p)$, $i = 1, \dots, n$), wo die f_i $2p$ -periodische meromorphe Funktionen sind; man findet dann, daß der Punkt $f_i[u_1(\xi, \eta, \zeta), \dots, u_p(\xi, \eta, \zeta)]$, wo (ξ, η, ζ) die Fläche F durchläuft, eine Fläche G beschreibt, die aus F durch eine rationale Transformation entsteht. Man weiß, daß G sich auf eine Linie reduziert nur im Falle, daß F ein irrationales Kurvenbüschel des Geschlechts p enthält. In jedem anderen Falle, wo G eine Fläche ist, beweist man, daß F den „overlap“ Null hat. E. Togliatti.

Burniat, Pol: Surfaces algébriques à système canonique dégénéré. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 209–214 (1954).

Important travail, où l'A. établit que pour toute valeur du genre géométrique $2p_g$, il existe des surfaces algébriques irréductibles, régulières ou non, dont le système canonique est formé d'une partie fixe et de courbes de genre trois d'un faisceau linéaire. Le genre linéaire $p^{(1)}$ satisfait à la double inégalité $8p_g - 11 \leq p^{(1)} \leq 8p_g + 1$. En utilisant les propriétés des plans quadruples abéliens, l'A. construit une surface dont le système canonique est formé d'une courbe fixe de genre $2p_g + 5 - i$, d'une courbe de genre virtuel -1 et de courbes de genre 3 d'un faisceau linéaire ($0 \leq i \leq 8$), ainsi qu'une surface dont le système canonique est formé d'une courbe de genre virtuel $2p_g - 1 - i$ et de courbes de genre 3 d'un faisceau linéaire ($0 \leq i \leq 4$). — Exemple d'une surface analogue d'irrégularité 2. L. Godeaux.

Roth, Leonard: Sull'estensione di un teorema di Castelnuovo-Humbert. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 376–380 (1954).

Der im Titel genannte Satz von Castelnuovo-Humbert ist folgender: Enthält eine algebraische Fläche ein algebraisches System rationaler Kurven, mit einem Index $\nu > 1$, so ist sie rational. Es handelt sich hier um die Ausdehnung dieses Satzes auf Mannigfaltigkeiten V_r mit $r > 2$ Dimensionen, welche eine Kongruenz F , des Indexes ν , rationaler Kurven C enthalten. Verf. betrachtet zunächst den Fall $\nu = 1$. In diesem Falle, und wenn F birational ist, kann V_r sowohl birational als irrational sein (und insbesondere unirational). Außerdem sind das geometrische Geschlecht und alle Mehrgeschlechter gleich Null, sobald $\nu = 1$ ist; und falls F auch birational ist, so ist V_r flächenregulär. — Im Falle $\nu > 1$ ist V_r unirational und auf eine Involution I_ν des Raumes S_r abbildbar, sobald die Mannigfaltigkeit der reduzierbaren Kurven von F reduzibel ist. Das geometrische Geschlecht und die Mehrgeschlechter von V_r sind auch jetzt gleich Null; und wenn F birational ist, so ist V_r flächenregulär. — Es folgen noch einige Bemerkungen über die unirationalen V_r . E. Togliatti.

Godeaux, Lucien: Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple. III, IV. V. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 81–86, 200–208, 355–370 (1954).

Suite des notes de même titre (ce Zbl. 52, 168). Par la méthode classique d'étude de la congruence $l - am = 0$, $m - bl = 0 \pmod{p}$, l'A. établit que si le cône tangent en un point de diramation est décomposé en quatre cônes rationnels s_a, t_a, b, s_b se coupant consécutivement selon une seule génératrice, le point infiniment voisin du point considéré sur la génératrice commune à t_a et t_b est double biplanaire, lorsque les deux premières solutions de la congruence rangées par valeurs croissantes de $l + m$, vérifient les relations, $l_2 = 2l_1, m_2 = 2m_1$. Dans la note 4 construction d'un exemple: $p = 61, a = 39, b = 36$, alors s_a, t_a, s_b sont des plans, t_b un cône quadrique coupant t_a selon une droite sur laquelle est un point double biplanaire infiniment voisin du sommet. Dans la note 5, construction et étude de l'exemple $p = 199, a = 113, b = 118$: s_a et s_b sont des plans, t_a un cône cubique, t_b un cône quadrique; ces deux cônes se coupent selon une droite sur laquelle est un point double biplanaire infiniment voisin du sommet, et auquel est infiniment voisin un autre point biplanaire. B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur la représentation plane de la surface cubique et sur une transformation birationnelle qui s'en déduit. Mathesis 63, 97–102 (1954).

La représentation plane classique de la surface cubique peut s'obtenir à partir de son équation mise sous forme de déterminant à trois lignes et trois colonnes, de deux manières distinctes correspondant aux lignes et aux colonnes. Ces deux re-

présentations se correspondent par la transformation birationnelle, qui associe aux droites d'un plan les quintiques à 6 points doubles de l'autre. *B. d'Orgeval.*

Gröbner, Wolfgang: Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H -Ideals bei rationalen Transformationen. Arch. der Math. 5, 1—3 (1954).

In einer früheren Arbeit [Arch. der Math. 3, 351—359 (1952)] definierte der Verf. das arithmetische Geschlecht der Mannigfaltigkeit mit Hilfe der Hilbertfunktion $H(t; \alpha_x)$ ihres homogenen Ideales α_x . Daher das Interesse am Thema der vorliegenden Abhandlung. — Wenn die rationale Transformation durch $n + 1$ Formen vom Grade μ , $y_j = \varphi_j(x_0, x_1, \dots, x_m)$, vermittelt wird, gilt für das transformierte Ideal

$$H(t; \alpha_y) = H(\mu t; \alpha_x) - H(\mu t; \alpha_x + u'),$$

wobei $u = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ ist. Diese Formel wird durch eine einfache Abzählung gewonnen. Ihr schließen sich einige Anwendungen an: z. B. werden die Formeln der früheren Arbeit neu hergeleitet, und es wird der Satz bewiesen, daß $H(\mu t; \alpha_x + u')$ ein Polynom in t vom Grade $\leq d$ ist, $d = \text{Dim } \alpha_x$. *E. A. Behrens.*

Snapper, Ernst: Equivalence relations in algebraic geometry. Bull. Amer. math. Soc. 60, 1—19 (1954).

Ein (selten deutlich ausgesprochener) Grundgedanke der algebraischen Geometrie, der im besonderen auch von den heute herrschenden abstrakten Richtungen übernommen wurde, ist der, daß man die Eigenschaften einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_d am besten durch die Untersuchung der in ihr enthaltenen Untermannigfaltigkeiten der Dimensionen $d - 1, d - 2, \dots$ erkennen kann. Man vereinfacht dieses geometrische Problem zunächst dadurch, daß man aus der Topologie den Begriff des „Zykels“ entlehnt und so die Menge der Untermannigfaltigkeiten einer festen Dimension δ ($0 \leq \delta < d$) — unter Hinzunahme von „virtuellen“ Mannigfaltigkeiten und ohne auf etwaige begriffliche Bedenken einzugehen — definitionsmäßig als Abelsche Gruppe festsetzt. Diese Gruppe erhält aber erst dann interessante und aufschlußreiche Eigenschaften, wenn man Äquivalenz-Relationen einführt, durch die eine Unterteilung in Klassen äquivalenter Mannigfaltigkeiten bewirkt wird. Im Falle $\delta = d - 1$ hat man die seit der klassischen Zeit wohlbekannte lineare Äquivalenz, und hier ist auch alles klar und einfach, während die Schwierigkeiten bei $\delta < d - 1$ beginnen. Hier hat zuerst Severi den Begriff der „algebraischen Äquivalenz“ eingeführt (vgl. die neueste Fassung dieses Begriffes in Severi, dies. Zbl. 37, 222, insbesondere S. 24f. dieses Buches), der auch die Grundlage für diese modernen Untersuchungen bildet. Es ist zuerst die Schwierigkeit zu überwinden, daß diese Äquivalenzbegriffe nicht von selbst transitiv und additiv sind. Verf. untersucht ganz allgemein diese Äquivalenzrelationen und zeigt, wie man sie in der gewünschten Weise vervollkommen kann, was auf die Definition Severis zurückführt. Daran schließt Verf. eine Darlegung der algebraischen Systeme von Mannigfaltigkeiten, auf denen die algebraischen Äquivalenzen beruhen, mit vielen lehrreichen Beispielen, insbesondere der linearen Scharen und der linearen Äquivalenz. *W. Gröbner.*

Vesentini, Edoardo: Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 199—204 (1954).

B. Segre, dans un mémoire récent [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 1—127 (1953)], a attaché à toute sous-variété P , irréductible non singulière de la variété V des classes d'équivalence canoniques (succession covariante d'immersion); si P est la diagonale de $V \times V$, on retrouve les classes canoniques usuelles. L'A. se propose de démontrer que ces classes sont (au signe près) les duales des classes de Chern de l'espace fibré des vecteurs normaux à P dans M . La démonstration, par récurrence, utilise le point suivant: pour toute sous-variété non singulière P de V , il existe une hypersurface non singulière V_1 de V contenant P . L'existence d'une telle hypersurface, fort douteuse aux yeux du rapporteur, est admise sans démonstration par l'A., ce qui limite singulièrement la portée de ses affirmations.

R. Thom.

Reynolds, J.: A variety with a certain singular point. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 143—144 (1954).

Soit V une variété algébrique irréductible à d dimensions d'un espace affine à n dimensions, définie sur un corps de base K algébriquement clos et de caractéristique nulle. On sait qu'un point V de P est simple sur V si et seulement si l'idéal I des éléments non inversibles dans l'anneau des quotients de P sur V possède une base de d éléments. (Voir par ex. W. V. D. Hodge et

D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Vol. III (Cambridge 1954), théorème VIII, p. 136). L'anneau des quotients de P sur V est alors intégralement fermé. L'A. étudie ici la circonstance suivante: l'anneau des quotients d'un point P singulier de V est intégralement fermé et V possède une base de $d - 1$ éléments. Il montre qu'on peut trouver une variété V' d'un espace de dimension $d + 1$, birationnellement équivalente à V , et un point P' sur V' transformé de P , tel que P et P' aient les mêmes anneaux quotients. L. Lesieur.

Predonzan, Arno: Osservazioni sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie irregolari. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 245—254 (1954).

Verf. studiert spezielle algebraische Mannigfaltigkeiten V^n_3 von S_r , deren Flächenirregularität $q_2 > 0$ ist. Sei C der Schnitt von V mit einem allgemeinen S_{r-2} und π ihr Geschlecht; sei $\pi \geq 3$ (falls $\pi = 1, 2$, sind die folgenden Sätze sehr leicht). Die wichtigsten Sätze der Arbeit sind: Ist $n = 2\pi - 2$, so ist V eine „variété pseudo S_2 -luogo“; d. h. V ist einer V^3_3 birational äquivalent, welche ein Bündel von Ebenen besitzt; V ist eine „variété pseudo S_2 -luogo“ auch, wenn auf V solch ein lineares System Σ_r existiert, daß seine charakteristische Kurve Γ irreduzibel und veränderlich und das Geschlecht π' von $\Gamma \geq 3$ sowie $r \geq 3\pi' + 6$ ist. Während des Beweises trifft man auf viele interessante Fälle von V .

M. Benedicty.

Segre, Beniamino: La teoria delle algebre ed alcune questioni di realtà. Rend. Mat. e Appl. **13**, 157—188 (1954).

L'A. espone alcune proprietà delle algebre — anche non associative — sopra campi qualsiasi, e in particolare delle algebre reali o complesse. Per ogni algebra \mathfrak{A} reale o complessa, priva di elementi autonullifici (che cioè non ammetta alcun elemento $\alpha \neq 0$ per cui sia $\alpha^2 = 0$), senza alcuna restrizione concernente la commutatività o l'associatività del prodotto, viene stabilita l'esistenza di qualche automodulo (elemento $q = 0$ per cui sia $q^2 = q$). Qualora poi \mathfrak{A} sia reale, commutativa, d'ordine $n \geq 2$ e l'automodulo q non sia divisore dello zero, esiste in \mathfrak{A} un elemento ξ , diverso dai multipli scalari di q , per il quale risulti $\xi^2 = \pm q$; e sarà precisamente $\xi^2 = -q$ ove \mathfrak{A} sia primitiva (sia cioè priva di divisori dello zero). Sopra un campo qualunque vengono quindi prese in esame le algebre commutative d'ordine 2 e dotate di almeno un automodulo non divisore dello zero, mostrando fra l'altro che un'algebra siffatta risulta associativa quando, e soltanto quando, possessa un modulo. — Il teorema di H. Hopf (v. questo Zbl. **23**, 383), affermando che ogni algebra reale commutativa (ma non necessariamente associativa) d'ordine $n \geq 2$ ammette qualche divisore dello zero, conduce allora a porre alcune questioni di realtà riguardanti i sistemi lineari di quadriche in uno spazio S_n proiettivo. — Rilevato che due quadriche reali ciascuna priva di elementi semplici reali, se formano coppia di quadriche apolari sono entrambe singolari (e ciascun punto doppio della quadrica-luogo appartiene a ciascun iperpiano tangente doppio della quadrica-involuppo), si approfondisce lo studio della rappresentazione lineare delle quadriche-involuppo di S_n con i punti di un S_r , ove $r = n(n+3)/2$, con particolare riguardo alle proprietà nel campo reale. Tale studio permette di stabilire che il numero — supposto finito — delle soluzioni reali di un sistema di $2n$ equazioni bilineari simmetriche a coefficienti reali in due serie di $n - 1 \geq 2$ variabili risulta dispari oppure pari, a seconda che n sia o meno una potenza del 2; tale risultato include il teorema di Hopf, e ne fornisce così la prima dimostrazione algebrico-geometrica. Anche conseguono riposte proprietà di realtà per le jacobiane dei sistemi lineari di quadriche; proprietà che, ulteriormente approfondite con speciale riferimento alla jacobiana di un sistema lineare ∞^4 di quadriche dello S_3 , conducono fra l'altro ad una dimostrazione algebrico-geometrica di un altro risultato conseguito dallo Hopf (loc. cit.) ma con mezzi topologici. V. E. Galafassi.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Valentiner, Siegfried:** Vektoranalysis. (Sammlung Götschen, Band 354.) 7. Auflage. Berlin: Walter de Gruyter u. Co. 1954. 138 S., 19 Abb. DM 2,40.

Krickeberg, Klaus: Über den Gaußschen und den Stokesschen Integralsatz. II. Math. Nachr. **11**, 35—60 (1954).

[Voir part I, Math. Nachr. **10**, 261—314 (1953).] Ce mémoire contient une importante extension des conditions de validité du théorème intégral de Stokes sous la forme où il a été démontré par le rapporteur en 1938 [R. de Possel, Bull. Sci. math. France, II. Sér. **62**, 262—271 (1938)]. L'A. utilise systématiquement des fonctions lipschitziennes ou de classe L , qu'il nomme „lokal dehnungsbeschränkt“ (Pour tout x , il existe un voisinage B et un nombre k tels que, si $y \in B$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, x, y , nombres ou vecteurs). — Une telle fonction est presque partout différentiable et, par suite, sa dérivée est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout compact;

cette propriété est ici essentielle. — Il s'agit d'une variété à bord V , introduite par le rapporteur dans le travail ci-dessus, et définie par deux sortes de voisinages: les uns sont représentés par un intervalle $a^i < x^i < b^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) les autres par un intervalle $a^1 < x \leq b^1$, $a^i < x^i < b^i$ ($i = 2, \dots, n$). Les points dont l'image vérifie $x^1 = b^1$ dans les voisinages de la seconde sorte constituent le bord ∂V de V . Étant donnée une classe Q de transformations de R^n dans R^n , vérifiant certaines conditions, une telle variété est dite de classe Q sur un ensemble K de ses points si les transformations entre voisinages sont de classe Q en tout point de K . Une variété \mathfrak{M} portée par une variété V est un couple formé d'une variété W et d'une application φ de W dans V . \mathfrak{M} est dite de classe Q si W et φ sont de classe Q en tout point (N doit être de classe Q en tout point du support de \mathfrak{M}). — Une forme différentielle ω définie sur V est dite de classe Q sur K si les coefficients de ω pour un choix des coordonnées sont de classe Q en tout point de K . La forme ω induit sur W une forme $\omega_{\mathfrak{M}}$ et, par définition $\int_{\mathfrak{M}} \omega = \int_W \omega_{\mathfrak{M}}$ si la seconde intégrale

existe. L'expression „en presque tout point“ d'une variété V de dimension n signifie „en tout point de V à l'exception d'un ensemble e dont la mesure n -dimensionnelle est nulle et dont la mesure $(n-1)$ -dimensionnelle de la partie contenue dans ∂V est également nulle“. — L'A. introduit la classe L' des fonctions qui, en tout point d'un ensemble, sont de classe L , admettent une différentielle première de classe L , et une différentielle seconde. Il parvient à l'énoncé suivant: Soit N une variété de dimension n , de classe L' , sur un ensemble K de ses points, ω une forme de degré $m-1$ et de classe L définie sur K ($m \leq n$), \mathfrak{M} une variété portée par N , de classe L , orientée et compacte, dont le support est dans K . — Alors, la différentielle extérieure $\mathcal{E}\omega$ de ω est définie en presque tout point de \mathfrak{M} , et les deux intégrales $\int_{\mathfrak{M}} \omega$, $\int_{\partial \mathfrak{M}} \omega$, existent et sont égales. — L'énoncé primitif du rapporteur supposait \mathfrak{M} et N de classe C^2 (deux fois continûment différentiables) et ω de classe C^1 .

R. de Possel.

Varini, Bruno: Il calcolo tensoriale da un punto di vista elementare. Archimede 6, 45—52 (1954).

Moreau, Jean-Jacques: Sur la structure des tenseurs isotropes et des tenseurs de révolution. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 441—443 (1954).

Die Untersuchung beschränkt sich auf den dreidimensionalen Fall, die verwendeten Koordinaten sind orthonormal. Ein Tensor $T_{ijk} \dots$ heißt isotrop, wenn die Multilinearform $\mathcal{Q} = T_{ijk} \dots a_i b_j c_k \dots$ invariant bleibt, sobald die n Vektoren $a_i, b_j, c_k \dots$ dieselbe beliebige infinitesimale Verschiebung $da_i = \varepsilon_{im p} \omega_m a_p dt$ erleiden (ω_m beliebiger Rotationsvektor). Dann ergibt sich durch ein rekursives Verfahren als notwendige und hinreichende Bedingung $\varepsilon_{p m i} T_{p j k} \dots + \varepsilon_{p m j} T_{i p k} \dots + \varepsilon_{p m k} T_{i j p} \dots + \dots = 0$. Die Tensoren nullter Stufe (Skalare) sind im wesentlichen isotrope Tensoren, diejenigen erster Stufe (Vektoren) verschwinden und sind daher auch isotrop. So kommt das rekursive Verfahren erfolgreich in Gang. (Dabei ist natürlich zu bemerken, daß die hier isotrop genannten Vektoren und Tensoren mit den in der komplexen analytischen Geometrie so genannten nichts zu tun haben — die Terminologie ist irreführend.)

M. Pinl.

Truesdell, C.: Remarks on the paper „The physical components of vectors and tensors“. Z. angew. Math. Mech. 34, 69—70 (1954).

Die vom Verf. in seiner Arbeit (dies. Zbl. 51, 381) entwickelte Methode läßt sich in enge Beziehungen zum Kalkül anholonomer Koordinaten bringen. Insbesondere kann man die anholonomen Komponenten eines Gradienten nach der gewöhnlichen Regel der kovarianten Differentiation berechnen, vorausgesetzt man ersetzt die partielle Differentiation durch den Operator $\partial_c = e^c_i \partial^i$ und den affinen Zusammenhang Γ_{jk}^i durch

$$\Gamma_{c\sigma}^{\pi} = e^{\pi}_i e^i_c e^{\pi}_\sigma \Gamma_{jk}^i - e^{\pi}_\sigma \partial_c e^{\pi}_k = e^{\pi}_i e^i_c e^{\pi}_\sigma \Gamma_{jk}^i + e^{\pi}_k \partial_c e^{\pi}_\sigma,$$

(e^i_π n linear unabhängige kontravariante Vektoren; $e^{\pi}_i e^{\pi}_j = \delta^{\pi}_j$, $e^{\pi}_i e^i_c = \delta^{\pi}_c$). Der Kalkül vereinfacht sich im Falle einer positiv definierten Metrik g_{ij} .

M. Pinl.

Sasayama, Hiroyoshi: On extensors of fractional grade. Tensor, n. Ser. 3, 101—107 (1954).

The author shows how extensors of fractional grade can be obtained from ordinary tensors, the components of which being functions of the line-elements of a curve. (Comp. Sasayama, this Zbl. 51, 381.)

J. Haantjes.

● **Garnier, René:** Cours de cinématique. Tome I: Cinématique du point et du solide. Composition des mouvements. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) 3. éd., rev. et augmentée. Paris: Gauthier-Villars 1954. IX, 244 p. 4000 Fr.

Das dreibändige Werk des Verf. über Kinematik behandelt in den ersten beiden Teilen die Euklidische Kinematik, während der dritte Band der Nicht-Euklidischen (Cayleyschen) Kinematik gewidmet ist. Der vorliegende erste Band bringt nach einer Einführung in die Vektorrechnung erst die Punktkinematik. Hierbei wird auf die Differentialgeometrie der Raumkurven sowie die Theorie der Flächenstreifen eingegangen und für letztere die Bezeichnung „geodätisches Dreibein“ der Flächenkurve gebraucht. Im Abschnitt über die Kinematik des starren Körpers wird erst das Geschwindigkeitsfeld eines solchen dem Momentfeld gegenübergestellt, dann der Drehvektor und die augenblickliche Schraubachse eingeführt und gekennzeichnet. Weiter werden die Schraubenbewegung studiert, auf die berührende Schraubung eines Bewegungsvorganges eingegangen und die Schiebvorgänge als Sonderfälle behandelt. Hierbei bietet sich die Gelegenheit, Schraub- und Schiebflächen zu untersuchen. Nun wird das Beschleunigungsfeld, der Beschleunigungspol usw. betrachtet. Der dritte Abschnitt behandelt die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, Beschleunigungen (Coriolis) und Überbeschleunigungen. In diesem Rahmen wird auch die Zerlegung von Bewegungen, die Umkehrbewegung, sowie die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt (Eulersche Winkel) betrachtet. Der letzte Abschnitt ist schließlich der Bestimmung eines Bewegungsvorganges durch sein Geschwindigkeitsfeld und den verschiedenen Integrationsarten gewidmet; als Sonderfall erscheint hier die Bestimmung von Kurven durch ihre natürlichen Gleichungen. — Obwohl die analytische Methode (*repère mobile*) vorherrscht, wird vielfach auch ein rein geometrischer Weg gegangen. Klare und sorgfältige Herleitung der Ergebnisse, liebevolles Eingehen auf Sonderfälle, Darlegung verschiedener Beweismethoden nebeneinander und Hervorheben des wesentlichen geometrischen Sachverhaltes lassen dieses leicht lesbare Werk ebenso für das Studium der Kinematik, wie auch als Nachschlagewerk bestens geeignet erscheinen.

H. R. Müller.

Wunderlich, W.: Ein merkwürdiges Zwölfstabengetriebe. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 224—228 (1954).

Bemerkenswertes Beispiel eines ebenen Gelenksystems, das in gewissen Stellungen verschiedene Freiheitsgrade aufweist.

Autoreferat.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Haantjes, J.:** Einführung in die Differentialgeometrie. Groningen-Djakarta: P. Noordhoff N. U. 1954. 173 S. [Holländisch].

Die Hauptteile dieses übersichtlichen Lehrbuchs sind die folgenden: I. Vektorrechnung. II. Kurventheorie. III. Krümmungslehre der Flächen. IV. Regelflächen. V. Tensorrechnung. VI. Grundgleichungen der Flächenlehre. VII. Innere Flächenlehre. Viele Figuren und Aufgaben vermehren die Lesbarkeit des Buches.

W. Blaschke.

Gołąb, S.: Sur quelques propriétés des courbes planes. Ann. Polon. math. 1, 91—106 (1954).

Verf. betrachtet den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P - p}{h}$, wo $P = m(L)$, $p = m(R)$ das Flächenmaß des Segmentes eines konvexen Kurvenbogens bzw. des umschriebenen Rechteckes mit der Segmentsehne als einer Seite und h die Segmenthöhe ist. Hat die Krümmung des Kurvenbogens konstantes Vorzeichen, so ist dieser Grenzwert gleich $2/3$; besitzt der Kurvenbogen aber singuläre Punkte mit der Krümmung Null oder Unendlich, so wird dieser Grenzwert $x(x+1)$ bzw. $x^{1/(x+1)} 2(x+1)$, $x \geq 1$, wenn der Kurvenbogen bestimmt ist durch $y = x^g(g + \varepsilon(x))$ mit $g \neq 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$, also im allgemeinen verschieden von $2/3$ (Vgl. W. Blaschke,

Vorlesungen über Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie, Berlin 1923, S. 12, zum Analogon für das Verhältnis Segment zu umschriebenem Dreieck mit der Segmentsehne als Grundlinie).

O. Volk.

Foster, Malcolm: Note on certain envelopes. Math. Mag. 27, 268—273 (1954).

Scherk, Peter: Intorno alle curve sferiche. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 38—40 (1954).

Geschickt die Formeln von Frénet benutzend, leitet der Verf. zwei Theoreme

von D. Gallarati (1952) ab. betreffend eine Charakterisierung der sphärischen Kurven, die auf dem Krümmungsmittelpunktsort beruht. Einige Zwischenformeln führen ihn zu den Resultaten von W. Scherrer (1940) und B. Segre (1947), denen zufolge $\oint_L w ds = 0$, $\oint_L \frac{w}{k} ds = 0$ gilt, wobei $w, k \neq 0$ und s die Windung, die Krümmung und der Bogen irgendeiner sphärischen geschlossenen Kurve L sind.
J. Teixidor.

Pinl, Max: Integrallose Darstellung isotroper Kurven im sphärischen drei- und vierdimensionalen Raum. *Math. Ann.* **128**, 49—54 (1954).

Deutet man einen sphärischen S_3 oder S_4 als Sphäre eines euklidischen R_4 oder R_5 , so kann man integrallose Darstellungen der isotropen Kurven des S_3 oder S_4 durch stereographische Projektion dieser Räume auf einen euklidischen R_3 oder R_4 gewinnen; denn in R_3 und R_4 sind integrallose Darstellungen der isotropen Kurven bekannt (Weierstrass, Pinl), und durch stereographische Projektion werden isotrope Kurven in ebensolche verwandelt. Dabei gehen auch isotrope Geraden (geodätische Nulllinien) in ebensolche über. Anwendungen auf die DeSittersche raumzeitliche Welt und Erörterungen über die isotropen Torsen (mit verschwindender Diskriminante der ersten Grundform) sowie die S_1 -Bildflächen der R_3 -Flächen mit isotropem mittleren Krümmungsvektor.
K. Strubecker.

Beatty, S.: On ruled surfaces. *Amer. math. Monthly* **61**, 176—179 (1954).

Verf. legt die Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Raumkurve zugrunde und betrachtet die von der „Rotationsachse“ beschriebene Regelfläche. Hierbei ist die Rotationsachse dadurch erklärt, daß wir nach den mit dem Dreibein starr verbundenen Punkten kleinsten Geschwindigkeitsquadrates fragen. Für die so erklärte Regelfläche wird die Striktionslinie hergeleitet und (auch in Sonderfällen) untersucht.
H. R. Müller.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On parabolic curves on surfaces. *Amer. J. Math.* **76**, 81—86 (1954).

The paper contains a refinement of a previous theorem of the same authors (this Zbl. **47**, 150). The actual theorem reads: Let S be a surface of class C^2 defined over an open (x, y) -domain D . Suppose that there exists in D a Jordan D^0 arc of class C^1 which divides D into two domains on which the respective inequalities $K \geq 0$, $K < 0$ hold for the gaussian curvature of S . Let A be the arc on S which corresponds to D^0 (A is a parabolic arc of class C^1). Suppose further that, if P is any point of A , the tangent plane $T = T(P)$ of S at P is a supporting plane of S (near P). Then A is a plane curve and, what is more, T is independent of P .
L. A. Santaló.

Mineo, Corradino: Superficie delle quali una semplice infinità di geodetiche sono eliche su cilindri ortogonali a una direzione fissa. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **16**, 165—170 (1954).

Nach Wiederholung der Resultate, die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **27**, 343) enthalten sind, fügt er eine parametrische Repräsentation der betrachteten Flächen hinzu, die von Quadraturen abhängt, und bemerkt, daß die schon in der zitierten Arbeit betrachteten einzelnen Fälle der Regelflächen und die „moules“-Flächen von Monge erhalten werden mit den respektiven Werten π und $\pi/2$ des festen Winkels, unter dem die Geodätische die Erzeugenden desjenigen Zylinders schneidet, der sie enthält.
J. Teixidor.

Backes, F.: Sur certains réseaux et leur rapport avec les surfaces minima. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **40**, 118—124 (1954).

Imdem Verf. statt der Tangentialebene eine berührende Kugel vom Radius ϱ einführt, kommt er zu der folgenden Verallgemeinerung der konjugierten Netze:

$$(E - \varrho L) du du + (F - \varrho M) (du dv + dv du) + (G - \varrho N) dv dv = 0.$$

Wenn $\varrho = R_1 + R_2$ (R_1, R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien), ergeben sich Netze, deren sphärischen Bilder orthogonal sind; es besteht also zwischen diesen Netzen und denen aus den Krümmungslinien eine Korrespondenz, die für die Minimalflächen besonders einfach wird.

O. Volk.

Pinl. N.: Über die Gaußsche Krümmung der reellen Minimalflächen im R_4 . Monatsh. Math. 58, 27–32 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 43, 157) hat der Verf. gezeigt, daß es unter den Eisenhartschen Minimalflächen des euklidischen R_4 (die durch Schiebung konjugiert-komplexer Kurven in vollisotropen Ebenen entstehen) keine mit fester Gaußscher Krümmung $K = 0$ gibt. Hier wird dieses Ergebnis auf alle (reellen) Minimalflächen des euklidischen R_4 ausgedehnt. Als Beweismethode dient das insbesondere von W. Blaschke angewandte Verfahren der Abbildung der zwei-dimensionalen Flächen des R_4 auf zwei Kugeln des R_3 (dies. Zbl. 36, 114).

K. Strubecker.

Strubecker, Karl: Über Potentialflächen. Arch. der Math. 5, 32–38 (1954).

Durch $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist im dreidimensionalen (x, y, z) -Raum eine isotrope Geometrie gegeben. Da sich für die Relativoberfläche einer durch $z = \varphi(x, y)$ dargestellten Fläche der Ausdruck $\iint \{q_x^2 + q_y^2\} dx dy$ ergibt (vgl. dazu K. Strubecker, dies. Zbl. 27, 253), erkennt man, daß die Potentialflächen [nämlich $z = \varphi(x, y)$ mit $\Delta\varphi = 0$] die Minimalflächen des isotropen Raumes sind. Darin liegt der tiefere Grund für Analogien, welche zwischen den Minimalflächen des euklidischen Raumes und den Potentialflächen bestehen. Verf. beweist die Gegenstücke zweier Schwarzscher Sätze: 1. Jede reelle nicht-isotrope Gerade einer reellen Potentialfläche ist Symmetrieachse. 2. Liegt eine (geodätische) isotrope Krümmungslinie in einer isotropen Ebene, so ist letztere Symmetrieebene der Potentialfläche. Die Symmetrie ist in beiden Fällen im isotropen Sinne zu verstehen. Der Beweis läuft entsprechend dem für Minimalflächen; Verf. gibt insbesondere eine integrallose Darstellung einer Potentialfläche durch einen gegebenen Anfangsstreifen, welche das Björlingsche Problem im isotropen Raume löst.

Johannes Nitsche.

Heinz, Erhard: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. 127, 258–287 (1954).

The celebrated Plateau problem may be considered as a particular case of the problem studied in this paper, namely that of determining surfaces of constant mean curvature bounded by a given continuous curve. The differential equation of the problem expressed in the usual manner is

$$(1) \quad (1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 2H(1 + p^2 + q^2)^{3/2},$$

where H denotes the mean curvature. If X stands for the vector with cartesian coordinates x, y, z and if it is possible to determine on the whole surface a system of curvilinear coordinates such that, on it, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$, then (1) may be replaced by the system: (2) $\Delta X = 2H(X_u \times X_v)$ (3) $X_u^2 = X_v^2$, $X_u \cdot X_v = 0$ where $X_u = \partial X / \partial u$, $X_v = \partial X / \partial v$ and the products $X_u \times X_v$ and $X_u \cdot X_v$ stand respectively for the vectorial and scalar products. The solutions of (2) may be easily studied, as in the classical theory of Potentials, and this is done by the author in § 1 and § 2. Further if the boundary values of a solution of (2) are given on the circle (C): $u^2 + v^2 = 1$, then X_0 denoting the solution of the equation $\Delta X_0 = 0$ with the same boundary values and \mathfrak{L} a linear functional easily constructed by means of the kernel of the Poisson integral, (2) may be replaced by the equation: $X = X_0 + \mathfrak{L}(X_u \times X_v)$. In a suitable Banach space \mathfrak{B} it is immediately seen that the operation $\mathfrak{L}(X_u \times X_v)$, $X \in \mathfrak{B}$, is completely continuous provided $|H| < (1/17 - 1)/8$. Then a straightforward application of the well known Schauder-Leray theory of equations establishes the existence of at least one solution of (2) satisfying the given boundary condition. But this solution may not necessarily satisfy the conditions (3). Moreover the boundary values $X(\Phi)$ might not define a curve topological image of (C). To complete his solution of the problem the author shows therefore that there is a problem of the minimum of a certain integral, generalizing the Dirichlet integral, which, provided $|H| < 1/2$ is a solution of (2) with the given boundary values, when X is an element of a certain Banach space D^* . If however X is considered in a Banach space D containing D^* , then the same problem of the minimum of an integral has a solution which satisfies (2) and (3) and the boundary values cannot be constant on an arc of (C) without X being constant. We have therefore an existence

theorem, without being able, naturally, to state anything about the number of possible solutions. As the author himself mentions it, many questions remain still open. The problem, in its generality is no doubt an extremely difficult one. But this paper is a very interesting introduction to its complete study. *C. Racine.*

Pogorelov, A. V.: Die eindeutige Bestimmtheit der unendlichen konvexen Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 21—23 (1954) [Russisch].

In der vorliegenden Note wird folgender Satz bewiesen: Jede dreimal stetig differenzierbare unendliche, konvexe Fläche der Totalkrümmung 2π ist innerhalb der Klasse aller dreimal stetig differenzierbaren Flächen unverbiegbar. Zum Beweis werden 2 derartige isometrische Flächen F und F' so gelegt, daß sie sich beide in der Gestalt $z = f(x, y)$, bzw. $z = f'(x, y)$ mit gleichem Punkt $(0, 0, 0)$ und gleicher Tangentialebene $z = 0$ darin schreiben lassen. Sind dann (λ, μ, ν) und (λ', μ', ν') die durch $\sqrt{EG - F^2}$ geteilten zweiten Fundamentalgrößen isometrisch entsprechender Punkte, so wird $\iint \left| \begin{array}{cc} \lambda - \lambda' & \mu - \mu' \\ \mu - \mu' & \nu - \nu' \end{array} \right| (n, e) \, d\sigma$ gebildet, wobei n den inneren Normalenvektor an F , e den Einheitsvektor der positiven z -Achse bedeutet und über den unter $z = h$ liegenden Abschnitt von F' integriert wird. Dies Integral wird in $\int (k - k') (e, \xi) \, ds$ umgeformt, wobei k und k' die Normalkrümmungen von F in der Schnittkurve γ mit $z = h$ und von F' in der γ isometrisch zugeordneten Kurve γ' bedeuten; ξ ist ein Tangentenvektor an F senkrecht zur Tangente von γ . Von diesem Kurvenintegral wird gezeigt, daß man es zufolge der Totalkrümmung 2π bei genügend großem h beliebig klein machen kann. Von dem Doppelintegral sieht man leicht, daß es sein Vorzeichen nicht ändern kann, und daraus folgt $\lambda = \lambda', \mu = \mu', \nu = \nu'$, d. h. F und F' sind identisch. *W. Burau.*

Rembs, Eduard: Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Math. Ann. **127**, 251—254 (1954).

Eine konvexe Kalotte, deren Rand Lichtgrenze ist, kann infinitesimal nicht verbogen werden, wenn der Rand Lichtgrenze bleiben soll. Für diese Vermutung des Ref. hat Verf. schon (dies. Zbl. **52**, 172) einen Beweis gegeben. Der neue Beweis arbeitet mit dem Verschiebungsriß der infinitesimalen Verbiegung, der in regulären Punkten negative Krümmung, also keine maximale Entfernung von einem Punkt hat. Es wird gezeigt, daß auch in singulären Punkten kein Entfernungs-Maximum möglich ist. Daraus folgt die behauptete Starrheit, da die Nebenbedingung zur Folge hat, daß der Randstreifen des Verschiebungsrisse sphärisch ist. *W. Süss.*

Gohier, Simone: Sur la rigidité des calottes convexes à bord. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1859—1861 (1954).

Die Integralformel von Herglotz, die den Beweis der eindeutigen Bestimmtheit geschlossener konvexer Flächen durch das Linienelement liefert, bewährt sich bekanntlich auch noch im Fall offener konvexer Flächen, wenn die Randstreifen eben sind, da dann die Randintegrale verschwinden. Hier wird gezeigt, daß das Randintegral bei geeigneter Wahl des Nullpunktes noch in zwei weiteren Fällen verschwindet: 1. wenn der Randstreifen sphärisch ist (allerdings ist nicht erwähnt, daß die Formel dann doch versagen kann, wenn vom Mittelpunkt der Kugel Tangentialebenen an die Kalotte gehen, was bei „überhängender“ Kalotte eintreten kann), 2. wenn er auf einem Rotationszylinder liegt. Aber Grottemeyer hat den Nachweis der eindeutigen Bestimmtheit von Kalotten schon erbracht, falls der Randstreifen auf einem beliebigen Zylinder gelegen ist, oder, was dasselbe ist, wenn die Randkurve Eigenschaftengrenze bei Parallelbeleuchtung ist. Die Note ist trotzdem von Interesse, da Grottemeyer eine andere Methode anwendet. *E. Rembs.*

Ziebur, A. D.: On a double eigenvalue problem. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 201—202 (1954).

Zur Frage der infinitesimalen Verbiegbarkeit von Rotationsflächen mit zwei ebenen Randstreifen und negativer Krümmung in den Innenpunkten kann man eine Schar solcher Flächen betrachten, die gleiche Meridiankurven haben und sich nur durch deren Minimalabstand $a > 0$ von der Rotationsachse unterscheiden. Die Aufgabe läßt sich dann auf eine Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei Parametern zurückführen, von denen der eine, eben a , stetig veränderlich, der andere eine ganze Zahl von der Form $n^2 - 1$ ist. Gefragt wird nach Lösungen, welche sich an beiden Endpunkten, die singuläre Stellen der Gleichung sind, regulär verhalten. Verf. behandelt die Randwertaufgabe bei etwas allge-

meineren Annahmen und insbesondere geringeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, als in früheren Arbeiten gemacht wurden. Sein Ergebnis, für den geometrischen Fall spezialisiert, lautet: Die unstarren Flächen der Schar, deren Existenz und Abzählbarkeit bekannt waren, liegen überall dicht: nämlich zu irgend zwei Werten a_1, a_2 , $0 < a_1 < a_2$ gibt es immer ein geeignetes (genügend großes) $n^2 - 1$, daß für ein $a, a_1 \leq a \leq a_2$ die Differentialgleichung eine Lösung der gewünschten Art hat. E. Rembs.

Goebel, Wolfgang: Biegungsflächen der Rotationsellipsoide mit konischen Punkten. Math. Nachr. 11, 5—34 (1954).

Diese aus der Schule von E. Rembs stammende Arbeit gibt Beispiele zur Verbiegung voller geschlossener Flächen im Sinne der klassischen Differentialgeometrie. Mittels Enneper-Flächen und ihrer Bäcklund-Transformationen werden zu den vollen Rotationsellipsoiden $k^2(x^2 + y^2) + z^2 = 1$ (k ist eine reelle Zahl) im reellen R^3 neue Biegungsflächen durch explizite Darstellung ihrer Ortsvektoren angegeben. Unter diesen Flächen befinden sich solche, deren einzige Singularitäten zwei konische Punkte sind. J. Naas.

Iha, P. and V. R. Chariar: A note on rectilinear congruences. Math. Student 21, 81—86 (1954).

Verff. beweisen zuerst drei Sätze von R. S. Mishra (dies. Zbl. 43, 161) auf neue Art und leiten dann eine Reihe einfacher Sätze über Regelflächen Φ in Normalenkongruenzen (Bezugsfläche Ψ , Grundkurve ψ) her. Beispiel: Ist ψ Striktionslinie von Φ , so ist Φ abwickelbar (und umgekehrt). K. Strubecker.

Jonas, Hans: W -Strahlensysteme mit einem pseudosphärischen Brennflächenmantel, Guichardsche Kongruenzen und isometrische Voßsche Flächen. Math. Nachr. 11, 105—128 (1954).

Die Konstruktion eines W -Systems, dessen Strahlen eine vorgegebene pseudosphärische Fläche berühren, und die Bestimmung einer zur Bildkugel dieser Fläche gehörenden Voßschen Fläche sind analytisch äquivalente Probleme; das erste Problem gründet sich nämlich in Asymptotenparametern auf die Gleichung $2\theta_{,\beta} = \sin 2\theta$, das zweite auf die Gleichung $R_{\alpha\beta} = \cos 2\theta \cdot R$, wobei die Parameterlinien ein konjugiert-geodätisches Netz bilden. Es fehlt bisher an einer geometrischen Deutung dieser von Moutard und Guichard angegebenen analytischen Beziehung, deren Aufdeckung Verf. erleichtern will, indem er bei den genannten Autoren noch auftretende Quadraturen beseitigt oder umgeht. Wie Verf. zeigt, kann dabei einem W -System mit pseudosphärischem Brennmantel eine bestimmte Guichardsche Kongruenz zugeordnet werden, und umgekehrt einer solchen sogar eine lineare Schar Voßscher Flächen der Eigenschaft, daß zu jeder solchen Voßschen Fläche der Schar auch eine isometrische existiert, die mit ihr durch Liesche Transformation zusammenhängt und ohne Quadraturen darstellbar ist. Der letzte Teil der Arbeit ist ein Beitrag zur Transformationstheorie der Voßschen Flächen. Bezüglich aller analytischen Details muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Demaria, Davide Carlo: Invarianti affini di elementi curvilinei. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 40—45 (1954).

Let E_i denote an element of curve of order i . The author gives the affine invariants of the following configurations: a) Two E_3 on the same plane: there are 4 independent affine invariants; b) Two E_2 in ordinary space: there are 2 independent affine invariants; c) Three skew E_2 in ordinary space: there are 9 independent affine invariants (an error in the paper of Cherep, this Zbl. 44, 362, is noted and corrected). Geometrical interpretations of these invariants are given. L. A. Santaló.

Dalmasso, Liana: Particolari terne di curve sghembe in geometria proiettiva differenziale. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 66—73 (1954).

Zwei punktweise aufeinander bezogene Kurven des dreidimensionalen Raumes besitzen einen einfachen projektivinvarianten Parameter (M. Barner, dies. Zbl. 48, 392). Verf. fragt nach Kurvenpaaren, die eine „dritte Assoziierte“ besitzen, so daß den Kurven paarweise derselbe invariante Parameter zukommt. Der allgemeine Fall wird durchgerechnet. Dann werden die dritten Assoziierten „erster Art“

betrachtet, bei denen die dritte Kurve derselben Regelfläche angehört. Nur spezielle Kurvenpaare haben eine dritte Assoziierte erster Art. Eine Kurve einer Regelfläche läßt sich auf ∞^2 -fache Weise zu einem Kurventripel erster Art ergänzen. Als Beispiel werden Kurvenpaare, bestehend aus Kurven dritter Ordnung, untersucht.

M. Barner.

Godeaux, Lucien: Remarque sur les suites de Laplace inscrites dans une suite de Laplace. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 87—90 (1954).

Généralisation de la notion de suites de Laplace inscrites l'une dans l'autre. On remarque que si dans l'espace S^n , une suite de Laplace L est telle que deux sous-espaces S^m définis chacun, par $m + 1$ points consécutifs de L , et consécutifs c'est à dire ayant en commun m points consécutifs de L , contiennent deux points consécutifs d'une autre suite L' , la propriété est vraie pour tout couple de points consécutifs de L' „inscrite“ à L .

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur les congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 209—218 (1954).

Etude analytique des congruences engendrées par les directrices de Wilczynski, dans le cas où les plans focaux du rayon passant par le point de F contiennent les foyers du rayon contenu dans le plan tangent. Cette hypothèse exige soit que les invariants des équations de Laplace associées aux asymptotiques soient égaux, soit que les quadriques de Lie de la surface n'aient que deux points caractéristiques. Dans le premier cas, la suite de Laplace déterminée par les foyers de la première droite est telle que les plans ABC , BCD , où A , B , C , D , désignent des points consécutifs de cette suite, contiennent deux points consécutifs de la suite associée à l'autre droite. Dans le sous-cas commun, une des directrices passe par un point fixe, l'autre appartient à un plan fixe, et les quadriques de Lie de la surface sont toutes conjuguées par rapport à ce point et à ce plan.

B. d'Orgeval.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Renaudie, Josette: Un théorème sur les espaces harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 199—201 (1954).

Eine V_n der Klasse C^∞ mit positiv-definiter Metrik g_{ik} heißt harmonisch im Punkt m_0 , wenn es eine Funktion $f(\Omega)$, $\Omega = (1/2) r^2$ gibt mit $\Delta_2 \Omega = f(\Omega)$; r ist der geodätische Abstand von m_0 aus gemessen. Verf. gibt zwei notwendige und hinreichende Kriterien für diese Eigenschaft: (1) $\text{Det}(g_{ik})$ ist für jedes System von Normalkoordinaten in m_0 nur von r abhängig. (2) Die den Punkt m_0 festlassenden Isometrien sind transitiv auf den von m_0 ausgehenden Richtungen.

W. Klingenberg.

Gustin, Wm.: Nonexistence of conformal singularities in solid spaces. J. rat. Mech. Analysis 3, 73—76 (1954).

Let X and Y be real analytic, n -dimensional Riemannian manifolds, with positive definite quadratic forms: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ and $d\sigma^2 = h_{ij} dy^i dy^j$. Consider a mapping M of a region of X into a region of Y , by $y = y(x)$, such that M is analytic and conformal, i. e. $d\sigma^2 = p(x) ds^2$. A point x_0 in X is a winding point, or a singularity of the mapping, if $p(x_0) = 0$, or, what is the same, if all the first partial derivatives of $y(x)$ vanish at x_0 . The following theorem is proved: for $n > 2$, any such mapping M has no winding points (in contrast to the case of $n = 2$). The proof proceeds by induction, that derivatives of m th order vanish at x_0 , if this is true for derivatives of lower orders. It suffices to show that $Q_m = g^{\alpha_1\beta_1} g^{\alpha_2\beta_2} \dots g^{\alpha_m\beta_m} h_{i_1 j_1} y_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}^i y_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}^j = 0$ at x_0 , where the subindices of y denote covariant differentiations in X . Since M is conformal, the operation on y : $S(y, y) = (n g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + n g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - 2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} h_{i,j} y_{\alpha}^i y_{\beta}^j)_{\dots,\nu} = 0$, hence $\Delta^{m-2} S(y, y) = 0$, where Δ is the Laplacian in X . But computation by induction shows that at x_0 , $\Delta^{m-2} S(y, y) = (n-2) 2^{m-2} Q_m + \text{non-negative terms}$. Hence $Q_m = 0$ for $n > 2$.

Y. W. Chen.

Pan, T. K.: On a generalization of the first curvature of a curve in a hypersurface of a Riemannian space. Canadian J. Math. 6, 210—216 (1954).

Let V_n be a hypersurface imbedded in a Riemannian space V_{n+1} . Instead of the normal unit vectors to V_n , the author considers a general congruence of unit

vectors in V_{n+1} which are not in V_n (except possibly in its asymptotic directions) and generalizes the concepts of the first curvature of a curve in V_n , geodesic curves and parallelism with respect to this congruence.

L. A. Santaló.

Lemoine, Simone: Rigidité des V_{n-1} d'un espace riemannien S_n , à courbure constante. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 559—561 (1954).

Ein n -dimensionaler Raum S_n konstanter Krümmung K läßt sich stets (eventuell durch imaginäre Transformationen) in einen solchen von elliptischem Typus verwandeln. Ist dann eine Hyperfläche V_{n-1} eines solchen S_n örtlich verbiegbare, so müssen mindestens $n - 3$ ihrer Eulerschen Hauptkrümmungen verschwinden. Darüber hinaus beweist Verf.: jede V_{n-1} in S_n von konstanter nichtverschwindender Krümmung ist starr, wenn $n \geq 4$. In S_4 existieren weder abwickelbare noch verbiegbare V_3 mit einer invarianten Asymptotenrichtung. — Im Falle $n = 4$ und $K = -\varrho^2$ nennt Verf. eine Mannigfaltigkeit regulär verbiegbare, wenn die Biegung keine ausgezeichnete Richtung zuläßt, andernfalls singulär verbiegbare. Dann gilt: in jedem S_4 gibt es regulär und singulär verbiegbare V_3 . In beiden Fällen wird die Metrik solcher V_3 diskutiert.

M. Pinl.

Apte, Madhumalati: Sur certaines variétés hermitiques. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1091—1092 (1954).

Sur la variété hermitique définie par $ds^2 = 2g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^{\beta*}$ soit $F = ig_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^{\beta*}$. La condition $dF = 0$ (variété kählérienne) entraîne $\delta F = 0$, mais l'inverse n'est pas vrai. Si $\delta F = 0$ les coordonnées z^α sont isothermes. Expression du tenseur de Ricci dans ce cas.

J. Lelong.

Kodaira, K.: On Kähler varieties of restricted type. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 313—316 (1954).

L'A. annonce, avec esquisse de démonstration et quelques applications, un théorème extrêmement important affirmant qu'une variété analytique complexe compacte connexe portant une métrique „de Hodge“, (c'est à dire une métrique kählérienne dont la partie imaginaire représente une classe de cohomologie entière), est birégulièrement équivalente à une sous-variété sans singularités d'une espace projectif complexe, donc algébrique d'après le théorème de Chow. L'article donnant les démonstrations détaillées vient de paraître [Ann. of Math., II. Ser. 60, 28—48 (1954)] et sera l'objet d'une analyse plus détaillée.

A. Borel.

Westlake, W. J.: Conformally Kähler manifolds. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 16—19 (1954).

Un espace H à métrique hermitienne, de torsion S , est dit „conformally Kähler“, s'il est conforme à un espace kählérien. Pour la dimension complexe $n \geq 2$, une condition nécessaire et suffisante est que le tenseur $(C_{\beta\gamma}^\alpha - S_{\beta\gamma}^\alpha + (\delta_\beta^\alpha S_\gamma - \delta_\gamma^\alpha S_\beta))/(n-1)$ soit identiquement nul. Ce résultat est encore valable dans le cas global des variétés, si la variété est simplement connexe, ou si au moins son groupe fondamental est d'ordre fini.

H. Guggenheimer.

Varga, O.: Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absolutem Parallelismus der Linienelemente. Arch. der Math. 85, 128—131 (1954).

Es wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß in einem Finslerschen Raum oder in einem Teilbereich desselben ein absoluter Parallelismus der Linienelemente existiert, ist, daß es Γ einen Teilbereich gibt, in dem Scharen von Extremalfeldern so existieren, daß ihre Tangentenvektoren in einem beliebigen Punkt eine beliebige Richtung besitzen, und 2° der zu jedem Extremalfeld gehörende oskulierende Riemannsche Raum eine Translationsgruppe besitzt, deren Bahnkurven die Feldextremalen sind.

J. A. Schouten.

Klein, Joseph: Sur les trajectoires d'un système dynamique dans un espace finslérien ou variationnel généralisé. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2144—2146 (1954).

La relation intégrale d'invariance de Lichnérowicz peut s'écrire $\Omega =$

$d\Omega \wedge d\alpha^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx_\alpha \wedge dx_\beta$ où x_α sont des coordonnées dans l'espace-temps de configuration. Une condition nécessaire, et localement suffisante, pour que les caractéristiques de Ω soient les géodésiques d'un espace variationnel généralisé (Lichnérowicz) attaché à Ω est $(S_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} + S_{\alpha\gamma} S_{\delta\beta} + S_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma}) = 0$. Ce théorème est appliqué à deux exemples.

G. Reeb.

Moór, Arthur: Die oskulierenden Riemannschen Räume regulärer Cartanscher Räume. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 59—71 und russ. Zusammenfassg. 72 (1954).

Verf. legt einen Cartanschen Raum zugrunde, dem dadurch eine Flächenmetrik aufgeprägt ist, daß das Oberflächenelement dO einer Hyperfläche $x^i = x^i(v^1, \dots, v^{r-1})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) durch $dO = (F(x, u)/u_n) dx^1 \dots dx^{n-1}$ bestimmt ist. Dabei ist $F(x, u)$ die Grundfunktion und u_i bestimmt die Stellung der Flächennormalen. Man kann mit Hilfe der Grundfunktionen $F(x, u)$ durch

$$g^{ik}(x, u) = \alpha^{1/(n-1)} \partial^2 \frac{1}{2} F^2 / \partial u_i \partial u_k, \quad \alpha = \det \left[\frac{1}{2} \partial^2 F^2 / \partial u_i \partial u_k \right]$$

den sogenannten metrischen Grundtensor einführen. Die zu g^{ik} reziproken Größen ergeben die kovarianten Komponenten dieses Tensors. Mit Hilfe des Grundtensors kann man außer der Oberflächenmessung eine Längenmessung einführen, die sich jetzt aber nicht auf eine Kurve, sondern auf eine Folge von Hyperflächenelementen bezieht. Betrachtet man nun eine Folge (1) $x^i = x^i(t)$, (2) $u_i = u_i(t)$ von Hyperflächenelementen, so kann man für jeden Wert von t eine Hyperebene konstruieren. Dadurch werden die Normalenvektoren u_i in einer Umgebung der Kurve (1) Ortsfunktionen. Trägt man diese Ortsfunktionen in $g_{ik}(x, u)$ ein, so erhält man einen nur von x^i abhängenden Tensor γ_{ik} , der einen Riemannschen Γ_n bestimmt. Ist der Normalenvektor u_i von (2) längs (1) im Γ_n parallel, so heißt der Γ_n ein längs der Folge (1)—(2) oskulierender Γ_n des Cartanschen Raumes. Verf. zeigt, daß das invariante Differential des Γ_n längs (1)—(2) mit dem des Cartanschen Raumes übereinstimmt. Es werden ferner Zusammenhänge zwischen dem einen (wesentlichen) Cartanschen Krümmungstensor und dem des Γ_n festgestellt und angegeben, wann diese beiden Tensoren längs der Folge (1)—(2) zusammenfallen.

O. Varga.

Cossu, Aldo: Su alcune connessioni affini localmente associate ad una assegnata connessione asimmetrica. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 193—198 (1954).

Sia x_0 un punto di una varietà (differenziabile) a n dimensioni dotata di una connessione affine asimmetrica di parametri L_{hk}^i ; l'A. dimostra anzitutto che la più generale connessione L_{hk}^i per la quale: a) è $L_{hk}^i(x_0) = L_{hk}^i(x_1)$; b) gli elementi del 3° ordine E_3 di autoparallele uscenti da x coincidono con gli E_3 di autoparallele relativi alla connessione L_{hk}^i , si ottiene, assumendo, in x ,

$$\partial_j L_{hk}^i = \partial_i L_{hk}^i + \delta_{(j}^i \varrho_{hk)} - \frac{4}{3} \psi_{k(jh)}^{\dots i} + \frac{1}{2} \Phi_{jkh}^{\dots i} - \Phi_{k(jh)}^{\dots i}$$

ove ϱ_{hk} è un arbitrario tensore simmetrico, $\psi_{k(jh)}^{\dots i}$ un tensore simmetrico rispetto a j, h tale che $\psi_{k(jh)}^{\dots i} = 0$, e $\Phi_{jkh}^{\dots i}$ un tensore alternante rispetto a j, h . — L'A. sfrutta poi gli elementi arbitrari nella formula ora data per determinare mediante altre condizioni geometriche, e in modo unico, le componenti della connessione L_{hk}^i nell'intorno del 1° ordine di x . — Così, p. es. egli riesce a determinare un'unica connessione (sempre nel considerato intorno) che, oltre alle a) e b) soddisfi alle condizioni: c) il trasporto parallelo secondo la L di un vettore ξ tangente ad un E_3 di autoparallelo per x_0 lungo l' E_2 del considerato E_3 , non differisce dall'analogo trasporto con la L ; d) le due connessioni L, L inducono la stessa legge di trasporto per i volumi n -dimensionali, nell'intorno di x_0 ; e) i tensori di curvatura e di Weyl coincidono in x_0 .

V. Dalla Volta.

Takano, Kazuo and Tyniti Imai: Note on the conformal theory of subspaces. Tensor, n. Ser. 3, 108—118 (1954).

Verff. stellen die Grundgleichungen der Untermannigfaltigkeiten W_m (Koordinaten u^i) in einem konformen Raum W_n ($m < n$) (Koordinaten x^α) auf und vergleichen diese mit den Formeln von Fialkow [Trans. Amer. math. Soc. 51, 435—501 (1942), 56, 309—433 (1944)]. In W_n ist neben dem Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ das Feld Q_α gegeben, das sich bei $x'^\lambda = x'^\lambda(x)$ gemäß $Q'_\mu = (\partial x^\lambda / \partial x'^\mu) Q_\lambda + (\partial / \partial x'^\mu) \lg \Delta(n)$, $\Delta(n) = \text{Det}(\partial x^\alpha / \partial x'^\mu)$, transformiert. Hiermit läßt sich in bekannter Weise unter Verwendung des normierten Fundamentaltensors $G^{\alpha\beta} = g_{(n)}^{-1/n} g_{\alpha\beta}$, $g_{(n)} = \text{Det}(g_{\alpha\beta})$.

eine symmetrische Übertragung („Weyl-Hlavatý-connection“) erklären. Ein X_m wird zu W_m mit $g_{ik} = B_i^\lambda B_k^\beta g_{\lambda\beta}$ und $Q_i = (m, n) [B_i^\lambda Q_\lambda + (\partial/\partial u^i) \lg D]$, wobei $B_i^\lambda = \partial x^\lambda / \partial u^i$, $D = \text{Det}(\partial x^\lambda / \partial u^i, n_\lambda^\alpha)$ ist. n_λ^α ein System von Normalen für X_m . Neben den zitierten Arbeiten von K. Yano und Y. Muto (vgl. Yano, dies. Zbl. 41, 499) ist noch zu nennen V. Hlavatý, dies. Zbl. 48, 403. W. Klingenberg.

Rinow, W.: Über eine axiomatische Begründung der inneren Geometrie der Flächen. Wiss. Z. Univ. Greifswald, math.-naturw. R. 3, 1—4 (1954).

Bericht über noch nicht abgeschlossene sehr bemerkenswerte Untersuchungen: Es soll die wohlbekannte axiomatische Charakterisierung der reellen projektiven Ebene zu einer axiomatischen Charakterisierung von allgemeineren sogenannten projektiven Flächen erweitert werden. Projektive Flächen sind solche, für die durch die Lösungskurven eines Differentialgleichungssystems jedem Punkt und jeder Richtung eine als Geodätische oder Gerade bezeichnete Kurve zugeordnet ist. In dem Diffgl.-System $\ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0$ soll F stetig differenzierbar sein und homogen von 2. Grad in den \dot{u}^1, \dot{u}^2 . Nach J. H. C. Whitehead gibt es um jeden Punkt einer solchen Fläche eine konvexe Umgebung, das ist eine Umgebung, in der je zwei Punkte genau eine Verbindungsgerade haben, die zwischen den Punkten ganz zur Umgebung gehört. Das angekündigte Axiomensystem für die projektiven Flächen umfaßt zunächst die bekannten ebenen projektiven Inzidenz-, Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome. Die Forderung des Satzes von Desargues würde bereits zu der reellen projektiven Ebene führen. Statt dessen wird als Axiom ein „infinitesimaler“ Schließungssatz gefordert (Satz vom infinitesimalen Viereck): Die Punkte A, B, C, D mögen eine gegen den Punkt O konvergente Folge durchlaufen, so daß die Geraden AB, BC, CD, DA, AC gegen die Geraden a, b, c, d, e streben. Unter diesen fünf Geraden sollen keine drei zusammenfallen, und es soll nicht zugleich $a = b$ und $c = d$ oder $a = d$ und $c = b$ sein. Dann soll BD gegen eine Gerade f konvergieren. — Hiermit läßt sich bei festem a, b, c, d jeder Geraden e die Gerade f zuordnen. Damit lassen sich im Geradenbüschel mit Hilfe von Doppelverhältnissen Koordinaten einführen, die sich als isomorph zu den reellen Zahlen erweisen. Das nächste Ziel ist der Nachweis, daß die Geraden der Fläche einer Differentialgleichung vom genannten Typ genügen. Hierzu sind weitere Axiome notwendig. Eine ausführliche und abschließende Darstellung wird angekündigt. W. Klingenberg.

Inzinger, Rudolf: Zur Differentialgeometrie der Faltungsgruppe im Hilbertschen Raum. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 300—301 (1954).

Einstein, A. and B. Kaufman: Algebraic properties of the field in the relativistic theory of the asymmetric field. Ann. of Math., II. Ser. 59, 230—244 (1954).

In der Einsteinschen Theorie wird eine Übertragung definiert durch die Gleichungen (1) $g_{ik}; := \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ik}^h g_{hj} - \Gamma_{kj}^h g_{ih} = 0$, wo g_{ih} ein nicht-symmetrischer Affinor ist. Es sei

$G_{ik}^h = g^{hj} g_{ji} (g^{ik} g_{ji} = \delta_i^k)$. Im allgemeinen hat G_{ik}^h vier verschiedene Eigenwerte ϱ_i , welche paarweise reziprok sind. Es wird gezeigt, daß die algebraischen Gleichungen (1) für die Γ dann und nur dann eindeutig lösbar sind, wenn $\text{Det } g_{hi} \neq 0$ ist und $S_1 = \sum \varrho_i$ und $S_2 = \frac{1}{2} \sum \varrho_i \varrho_j$ ($i \neq j$) beide ungleich 2 sind. Diese Ungleichungen haben zur Folge, daß $\varrho_1 = \varrho_2^{-1} = e^{i\vartheta_1}$ ($\pi \neq \vartheta_1 \neq \pi/2$) und $\varrho_3 = e^{i\vartheta_2} = \varrho_4^{-1}$ ist (vgl. auch V. Hlavatý, dies. Zbl. 47, 210). Es wird angegeben, wie man die Gleichungen (1) für Γ_{ij}^h lösen kann. J. Haantjes.

Hély, Jean: Sur une représentation du champ unitaire. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1375—1377 (1954).

Es sei g_{hi} ein symmetrischer Tensor in V_4 und Γ_{ij}^h eine nicht symmetrische Übertragung, für die $\nabla_i g_{kl} = 0$ (mit Γ_{ij}^h) und $\nabla_i^h g_{kl} = 0$ (mit Γ_{ij}^h) ist. Sodann ist S_{hij} ein Trivektor, der eindeutig ein Vektorfeld q^h (Potentialvektor) bestimmt. Dies führt zu Gravitationsgleichungen vom Born-Infeldschen Typus. J. Haantjes.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On continuous area-preserving and Legendre transformations. Amer. J. Math. 76, 87—96 (1954).

Die Verf. setzen hier eine Reihe von Arbeiten fort, in denen sie klassische Sätze der Analysis durch Herabsetzung der Differenzierbarkeitsforderungen in der Voraussetzung erweitern. Hier handelt es sich zunächst um folgende Verallgemeinerung eines Gaußschen Satzes: Die Abbildung T_1 eines (x, y) -Gebietes durch stetige Funktionen $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ soll die 4 Eigen-

schaften I bis IV haben: I. T_1 ist eineindeutig; II. $u(x, y)$ ist bei festem x eine wachsende Funktion in y ; III. T_1 erhält den Umlaufsinn; IV. T_1 ist inhaltstreu. Notwendig und hinreichend hierzu ist die Existenz einer Funktion $f = f(x, u)$ mit den 4 Eigenschaften α bis δ : α) Die partiellen Ableitungen f_x, f_u existieren und sind stetig; β) $f_x(x, u)$ ist bei festem x eine wachsende Funktion von u ; γ) $f_u(x, u)$ ist bei festem u eine wachsende Funktion von x ; δ) $T_1 = T_3 T_2^{-1}$, wobei T_2, T_3 als Semi-Legendre-Transformationen (S. L. T.) definiert sind durch: $T_2) x = x, y = f_x(x, u)$; $T_3) u = u, v = -f_u(x, u)$. — Die S. L. T. $S) p = z_x(x, y), y = y$ sei eineindeutig, die ihr zugrunde liegende Funktion $z(x, y)$ besitze in einem (x, y) -Gebiet stetige partielle Ableitungen und es sei $z_x(x, y)$ bei festem y eine wachsende Funktion von x ; dann hat die Funktion $g(p, y) = x p - z$ die stetigen partiellen Ableitungen $g_p = x, g_y = -z_y$. Wenn dann noch die Legendre-Transformation $T') p = z_x(x, y), q = z_y(x, y)$ eineindeutig ist, dann ist sie das Produkt $T' = SS'$ mit $S) p = p, q = -g_y(p, y)$. — Ist entweder α) $z_x(x, y)$ eine monotone Funktion von x bei festem y oder β) $z_x(x, y)$ eine monotone Funktion von y bei festem x , dann hat $h(p, q) = x p + y q - z$ stetige partielle Ableitungen, die zu T' inverse ist die Legendre-Transformation $x = h_p(p, q), y = h_q(p, q)$ und das Verhältnis von z zu h ist involutorisch, d. h. in den Fällen α) bzw. β) ist $\alpha')$ $h_q(p, q)$ eine monotone Funktion von q bei festem p bzw. $\beta')$ $h_q(p, q)$ eine monotone Funktion von p bei festem q .
W. Süß.

Menger, Karl: Géométrie générale. Mém. Sci. math. 124, 81 p. (1954).

„L'objet de ce fascicule est de résumer brièvement quelques chapitres de cette Géométrie générale que nous avons édifiée durant ces 25 dernières années, avec l'aide de nombreux collaborateurs, sur la notion introduite par Fréchet d'espace métrique, et de présenter d'une manière plus détaillée plusieurs idées qui sont actuellement en cours de développement“. Table de matières: I. La géométrie dans les espaces métriques. II. Théorie générale de la courbure. III. Analyse et généralisations de la notion d'espace métrique. IV. Calcul des variations et Géométrie métrique. V. Une théorie générale de la longueur. VI. Espaces vectoriels généralisés. VII. Esquisse d'une Géométrie métrique aléatoire. G. Nöbeling.

Lorch, Edgard Raymond: Su certe estensioni del concetto di volume. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 25—29 (1954).

Es sei im Sinne der Bezeichnung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 43, 376) $G(x) = r^{-1} [\varphi(x)]^r$ gesetzt, wobei $r > 1$ und φ eine positive, positiv homogene Funktion ersten Grades mit stetigen partiellen Ableitungen einschließlich der 2. Ord. bezeichnet, so daß mit $1/r + 1/r' = 1$ und $[\varphi(x^*)]^{r'} = r' F(x^*)$ die Flächen $\varphi = 1$ und $\varphi' = 1$ die Begrenzungen von einander zugeordneten geschlossenen konvexen Körpern \mathfrak{K} und \mathfrak{K}^* beschreiben. Die in genannter Arbeit für das (klassische) n -dimensionale Volumen von \mathfrak{K}^* abgeleitete Formel

$$V(\mathfrak{K}^*) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{n(r-1)} \int_{\Omega} \text{Det} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} \right) d\Omega,$$

das Integral erstreckt über die Oberfläche Ω der Einheitskugel $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, dient als Ausgangspunkt einer Definition. Wegen $\text{Det} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k} \right) = (r-1) [\varphi(x)]^{nr} C(x)$, worin C von r unabhängig ist, wird als Volumen der Ordnung r definiert:

$$V_r(\mathfrak{K}^*) = \left[\frac{1}{n} \int_{\Omega} [\varphi(x)]^{nr} C(x) d\Omega \right]^{1/r}.$$

Allgemein ist $\lim_{r \rightarrow 1} V_r = V_1 = V$, und z. B. V_2 für ein Ellipsoid gleich dem Produkt der Halbachsen mal der Quadratwurzel aus dem Volumen der Einheitskugel. Der Fall $r = \infty$ wird auch näher untersucht.
G. Aumann.

Ohmann, D.: Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen. II. Math. Ann. 127, 1—7 (1954).

Für die Quermaßintegrale eines konvexen Körpers im R_n gelten bekanntlich die Ungleichungen $W_p^{n-r} \geq \varphi^{n-r} W_r^{n-p}$; $r < p < n$. Für $r = 0$ wurden diese vom Verf. in Teil I der Arbeit (dies. Zbl. 47, 159) auf beliebige beschränkte Punktmengen verallgemeinert. Hier wird das gleiche für den Fall $p = n-1$ durchgeführt, aber unter Beschränkung auf abgeschlossene beschränkte Mengen; die unteren Lebesgue-Integrale können dann durch Lebesgue-Integrale schlechthin ersetzt werden. Rekursiv wird definiert $W_r(A) = \frac{1}{n \varphi^{n-1}} \int_{\Omega_n} W_{r-1}(A, \xi) d\xi$ für $r = 1, 2, \dots, n-1$. $W_0(A)$ ist das Lebesguesche Maß der Menge A des R_n , $W_n(A) = v_n$ das Volumen der n -dim. Einheitskugel, unter dem Integral steht ein Quermaßintegral für die ortho-

zonale Projektion von A in Richtung des Einheitsvektors ξ , die Dichte $d\xi$ wird über die Fläche Ω_n der Einheitskugel integriert. — Zum Beweis werden die fraglichen Ungleichungen

(1) $W_{n-1}^{n-r} \geq v_n^{n-1-r} W_r$ ($r = 0, 1, \dots, n-2$) verallgemeinert zu

$$(2) \quad \psi_{n,r}^l = \int_{\Omega_n} \cdots \int_{\Omega_n} \prod_{\nu=1}^{n-r} \mu(A, \xi_\nu) |\xi_1, \dots, \xi_k| d\xi_1 \dots d\xi_{n-r} = \frac{(2w_{n-1})^{n-r}}{v_n} \prod_{\lambda=1}^l \frac{w_{r+\lambda}}{w_{n+\lambda}} W_r(A) \geq 0,$$

$n \geq 2$, $0 \leq r \leq n-2$, l ganzzahlig ≥ 0 . $\mu(A, \xi)$ ist hier das Maß der Projektion von A auf eine Gerade in der Richtung ξ , ω_k die Oberfläche der Einheitskugel im R_k , $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ das Volumen des von den Einheitsvektoren $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ aufgespannten k -dimensionalen Parallelepeds. Wegen der mittels vollständiger Induktion leicht aus der Definition von W_{n-1} folgenden Beziehung $W_{n-1}(A) = \frac{1}{2n} \int_{\Omega_n} \mu(A, \xi) d\xi$ ist (2) für $l=0$ mit (1) identisch. Die Ungleichung (2) wird durch vollständige Induktion nach n bewiesen, gilt sie schon für $n' < n$ und alle zugelassenen r und l , so folgt sie mittels einer integralgeometrischen Identität zunächst für n und $r \geq 1$, sodann durch Betrachtung von Parallelkörpern nach innen (zunächst für Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen, dann durch Grenzübergang allgemein) auch für $r=0$. Da $\psi_{n,n-1}^l(A) = 0$, ist damit der Beweis erbracht.

G. Bol.

Topologie:

Ward jr., L. E.: Partially ordered topological spaces. Proc. Amer. math. Soc. 5, 144—151 (1954).

Etude d'espaces topologiques pourvus d'un ordre partiel ou d'un quasi-ordre ($a \leq b$ et $b \leq a$ n'implique pas $a = b$), tel que les ensembles $L(x) = \{y: y \leq x\}$ et $M(x) = \{y: y \geq x\}$ soient fermés. Les résultats sont utilisés pour l'étude des applications f d'un continu localement connexe, possédant un bout E , sur lui-même, telles que $f(E) = E$. (Recherche des ensembles invariants différents de E .)

A. Revuz.

Lesieur, Léonce: Sur l'algèbre de la topologie. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1464—1466 (1954).

In einem vollständigen Booleschen Verband T wird der Begriff der Topologie als Abbildung V von T in den Verband aller Filter von T erklärt, die folgende Eigenschaften besitzt: (1) $V(a) \subseteq a$, $V(0) = 0$ (a bedeutet den durch a erzeugten Hauptfilter); (2) $V(\bigcup a_i) = \bigcap V(a_i)$; (3) zu $v \in V(a)$ existiert $b \in V(a)$ mit $v \in V(b)$. Diese Definition der Topologie ist äquivalent zu den üblichen Definitionen mittels eines Offenheits- bzw. Abgeschlossenheitsbegriffes. Entsprechende Kennzeichnungen mit Hilfe der Filter beziehen sich auf die abgeschlossenen Nachbarschaften und die verschiedenen Trennungsaxiome.

H.-J. Kowalsky.

Cohen, D. E.: Spaces with weak topology. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 77—80 (1954).

Soit, dans un ensemble (E) , une famille (Σ) de sous-ensembles qui sont munis d'une topologie telle que, pour tout couple $S_1, S_2 \in (\Sigma)$, S_1 et S_2 induisent sur $S_1 \cap S_2$ la même topologie. (t_Σ) , topologie faible définie par (Σ) s'obtient comme suit: est fermé (ouvert) pour t_Σ tout sous-ensemble A de E dont l'intersection $A \cap S$ avec tout $S \in (\Sigma)$ est fermée (ouverte) dans S . (t_Σ) est la moins fine des topologies de E qui induisent sur les ensembles S de (Σ) leur topologie. Si X, X' sont deux espaces munis des familles $(\Sigma), (\Sigma')$ respectivement, on peut définir sur le produit $X \times X'$ la topologie faible $t_{\Sigma \times \Sigma'}$ définie par la famille $\Sigma \times \Sigma'$ des produits $S \times S'$; alors $t_{\Sigma \times \Sigma'}$ est moins fine que la topologie produit $t_\Sigma \times t_{\Sigma'}$. L'A. appelle K -espace tout espace dont la topologie est la topologie faible définie par la famille (K) de ses sous-ensembles compacts. Le produit de deux K -espaces réguliers n'est pas en général un K -espace; il en est cependant ainsi, si tous les compacts sont réguliers et si l'un des facteurs est localement compact. En particulier, le produit de deux CW-complexes dont l'un est localement fini, est un CW-complexe (résultat de J. H. C. Whitehead).

R. Thom.

Dubikajtis, L.: On the separability of topological spaces. Colloquium math. 3, 31—32 (1954).

Der Verf. bemerkt, daß die vom Ref. gegebene (dies. Zbl. 41, 315) Aufzählung

logischer Zusammenhänge zwischen verschiedenen Definitionen der Separabilität topologischer Räume nicht vollständig ist (ein Fall wurde weggelassen). Diese Bemerkung vervollständigt den Beweis des Hauptsatzes (*) in der zitierten Arbeit des Ref.

R. Sikorski.

Fan, Ky and Raimond A. Struble: Continuity in terms of connectedness. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 161—164 (1954).

Under certain general assumptions about the topological spaces E and E^* , continuity of f is implied by the conditions: 1. for every connected $A \subset E$, $f(A)$ is connected, 2. for every closed connected $A^* \subset E^*$ and every $x \in f^{-1}(A^*)$, x has a neighborhood which intersects only a finite number of components of $f^{-1}(A^*)$. See also the following paper!

H. Freudenthal.

Klee, V. L. and W. R. Utz: Some remarks on continuous transformations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 182—184 (1954).

One considers the properties 1—4 of mappings $f: M \rightarrow M^*$ of metric spaces: 1. fX is compact for every compact X . 2. fX is connected for every connected X . 3. $f^{-1}q^*$ is closed for every q^* . 4. $f^{-1}X^*$ is closed for every open metric sphere X^* . — Under some general conditions about M , combinations of these properties imply continuity of f . See also the preceding paper!

H. Freudenthal.

Michael, Ernest: Local properties of topological spaces. Duke math. J. 21, 163—171 (1954).

Let \mathfrak{P} be a property of topological spaces and X a topological space. Then \mathfrak{P} is called G -hereditary (resp. F -hereditary) for X if every subspace Y of X satisfies condition (a) and if every open (resp. closed) subspace Y of X also satisfies conditions (b) and (c): (a) If Y has \mathfrak{P} , every open (resp. closed) subset of Y has \mathfrak{P} . (b) If Y is the union of two open subsets both (resp. both closures) of which have \mathfrak{P} , Y has \mathfrak{P} . (c) If Y is the union of a disjoint collection of open subsets all of which have \mathfrak{P} , then Y has \mathfrak{P} . The main theorem of this paper reads as follows: „Let \mathfrak{P} be a property which is G -hereditary or F -hereditary for X . Suppose either that X is paracompact and has property \mathfrak{P} locally [i. e. for each point of X there is a (not necessarily open) neighbourhood which has \mathfrak{P}], or that for some uniform structure on X , X has property \mathfrak{P} uniformly locally (i. e. there is an entourage V such that $V(x)$ has \mathfrak{P} for every point x in X). Then X has property \mathfrak{P} “. A topological space Y is called a neighbourhood extensor (abbr. NE) for a collectionwise normal space Z if every continuous mapping from a closed set A of Z into Y can be extended to a continuous mapping from some neighbourhood of A (in Z) into Y . By showing that the property of being NE for Z is G -hereditary the author proves a generalization of a theorem of Hanner (this Zbl. 42, 411) by applying the main theorem. He also proves that if M is a metric space and X is a subspace of M which is locally a G_δ in M , then X is a G_δ in M (cf. D. Montgomery, this Zbl. 12, 321). Finally the property of being normal or paracompact is shown to be F -hereditary.

K. Morita.

Richter, Wolfgang: Zur Theorie der Berührungsräume. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin 3 (1953/54), 227—233 (1954).

E sei eine beliebige Menge, \mathfrak{B} die Gesamtheit aller beschränkten komplexwertigen Funktionen über E , die durch die übliche Normdefinition zu einer normierten kommutativen involutiven Algebra mit Einselement wird. Derartige Algebren bezeichnet Verf. als Gelfandsche Algebren und beweist zunächst, daß eine eindeutige Beziehung besteht zwischen der Menge aller bikompakten Erweiterungen von E (für alle möglichen vollständig regulären Topologien von E) einerseits und der Menge \mathcal{A} aller Gelfandschen Unteralegebren von \mathfrak{B} mit Trennungseigenschaft (d. h. je zwei verschiedene Punkte von E lassen sich durch eine Funktion aus der Unteralgebra trennen) andererseits. Dabei läßt sich das Spektrum $\text{Sp}(\mathfrak{A})$ der Algebra $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, d. h. die Gesamtheit der maximalen Ideale von \mathfrak{A} , als die durch \mathfrak{A} bestimmte bikompakte Erweiterung auffassen (wobei E die schwache Topologie bezüglich der Funktionenmenge \mathfrak{A} erhält), während die zu einer Erweiterung gehörige Algebra aus denjenigen Funktionen auf E besteht, die sich stetig auf die Erweiterung fortsetzen lassen. Die Ergebnisse von Smirnov (dies. Zbl. 47, 419) über bikompakte Erweiterungen und Nachbarschafts- (oder δ -)Strukturen (von Verf. Berührungsstrukturen genannt) legen es nahe, einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Menge \mathcal{A} und der Menge \mathcal{A} aller über E möglichen δ -Strukturen zu suchen. Verf. beweist, daß eine eindeutige Zuordnung zwischen \mathcal{A} und \mathcal{A} folgendermaßen entsteht: Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$ gegeben. Dann bezeichne man zwei Teilmengen von E als benachbart, wenn es keine Funktion aus \mathfrak{A} gibt, die sie trennt. Hierdurch entsteht eine δ -Struktur über E , wobei \mathfrak{A} die Menge aller beschränkten δ -stetigen Funktionen ist. — In den Untersuchungen wird eine neue Charakterisierung der vollständigen Regularität benutzt.

E. Burger.

Smirnov, Ju. M.: Über die Dimension von Nachbarschaftsräumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 717—720 (1954) [Russisch].

Sei P ein δ -Raum (vgl. z. B. Verf., dies. Zbl. 47, 419). Eine Überdeckung γ von P heißt δ -Überdeckung, wenn für zwei beliebige benachbarte Mengen A und B ein $P' \in \gamma$ mit $A \cap P' \neq \emptyset$, $B \cap P' \neq \emptyset$ existiert. Verf. betrachtet neben der gewöhnlichen durch endliche offene Überdeckungen definierten Dimension $\dim P$ die in analoger Weise mittels endlicher δ -Überdeckungen definierte δ -Dimension δdP und gibt (ohne Beweise) eine Reihe von Sätzen über sie an; u. a.: Es ist $\delta dP = \dim uP$, wo uP die bikompakte δ -Erweiterung von P ist. Falls A dicht in P ist, ist $\delta dA = \delta dP$. Es gilt der dimensionstheoretische Summensatz für endlich viele, jedoch nicht mehr für abzählbar viele Summanden. Die bekannten Dimensionscharakterisierungen durch Abbildungen in Polyeder, Sphäre und Kugel bleiben dagegen bei geeigneter Definition der in sie eingehenden Begriffe für δ -Räume auch für die δ -Dimension bestehen. Beispiele von Mengen in euklidischen R^n zeigen, daß die δ -Dimension einer Menge davon abhängt, wie sich die Menge bei Übergang ins Unendliche verdichtet. Zum Studium dieses Verhaltens wird in geeigneter Weise die Rand- δ -Dimension $\delta d^\infty P$ eingeführt, für welche sich dann $\delta d^\infty P = \delta d(uP - P)$ herausstellt. Es gilt $\delta dP = \max(\delta d^\infty P, \text{rd } P)$, wobei $\text{rd } P$ die „relative Dimension“ von P bezeichnet, d. h. die größte derjenigen ganzen Zahlen $n \geq 0$, für deren jede es in P ein Bikompaktum der Dimension n gibt. — Weiter definiert Verf. für vollständig reguläre, jedoch nicht notwendig normale Räume R eine Dimension $\dim R$ mittels der normalen Überdeckungen von R , d. h. derjenigen Überdeckungen $\gamma = \{U_1, \dots, U_k\}$ von R , für die es Mengen A_1, \dots, A_k mit $\bigcup A_i = R$ gibt, so daß A_i und $R - U_i$ ($i = 1, \dots, k$) funktional-getrennt sind. Für normale Räume fällt sie mit der gewöhnlichen Dimension zusammen, allgemein ist $\dim R = \delta dR_\beta$, wobei R_β der maximale δ -Raum auf R ist. Da für abgeschlossene Mengen $A \subseteq R$ die zugehörige maximale δ -Struktur die von R_β induzierte ist, ergibt sich die Möglichkeit, die obengenannten Sätze über die δ -Dimension mit geeigneten Abänderungen auf diese Dimension vollständig regulärer Räume zu übertragen. Es gilt für sie darüber hinaus auch der Summensatz für abzählbar viele abgeschlossene Summanden.

E. Burger.

Sitnikov, K. A.: Kombinatorische Topologie der nicht-abgeschlossenen Mengen. I. Der erste Dualitätssatz: die spektrale Dualität. Mat. Sbornik, n. Ser. 34, 3—54 (1954) [Russisch].

Ausführlicher Beweis des früher (dies. Zbl. 43, 383) angekündigten Dualitätssatzes des Verf. Wegen der Bezeichnungen vgl. das genannte Referat. Zunächst wird mittels eines Fortsetzungslemmas für Überdeckungen gezeigt, daß $\mathcal{V}^p A$ zur „äußeren \mathcal{V} -Gruppe“ $\mathcal{V}_a^p A$ isomorph ist. $\mathcal{V}_a^p A$ ist als direkter Limes des Spektrums der (mittels unendlicher Kozyklen definierten) \mathcal{V} -Gruppen der Umgebungen von A definiert. Für diese Isomorphie wird noch ein zweiter Beweis nach einer Methode von Alexandroff [Mat. Sbornik, n. Ser. 33, 241—260 (1953)] gegeben. Durch Anwendung des Poincaréschen Dualitätssatzes folgt weiter die Isomorphie von $\mathcal{V}_a^p A$ mit der analog erklärten „äußeren \mathcal{J} -Gruppe“ $\mathcal{J}_a^{n-p} A$. Schließlich wird durch Randbildung ein Isomorphismus von $\mathcal{J}_a^{n-p} A$ auf $\mathcal{J}^{n-p-1} B$ hergestellt. Der Beweis liefert nicht nur die Isomorphie $\mathcal{V}^p A \cong \mathcal{J}^{n-p-1} B$, sondern schärfer die Äquivalenz der diese Gruppen definierenden Spektren. Für den Fall einer bikompakt topologisierbaren Koeffizientengruppe (in dem $\mathcal{V} B$ mit der \mathcal{J} -Gruppe $\mathcal{J}^p B$ mit kompakten Trägern zusammenfällt) folgt hieraus auch die Isomorphie zwischen der von Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133) eingeführten Unverschlingbarkeitsgruppe $\mathcal{U}^p B$ und einer analog erklärten Unverschlingbarkeitsgruppe $\mathcal{V}^p A \subseteq \mathcal{V}^p A$. Die Isomorphie der zugehörigen (geeignet topologisierten) Faktorgruppen ist eine Form des Dualitätssatzes von Alexandroff. — Verf. beweist weiter die Invarianz der Gruppe $\mathcal{V}^p A$ bei retrahierenden Deformationen der Menge A . Schließlich wird eine Menge $A \subseteq S^n$ als K -Menge bezeichnet, wenn für alle p und alle dualen Koeffizientenbereiche $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ das in naheliegender Weise erklärte skalare Produkt die Dualitäten $\mathcal{V}^p(A, \mathfrak{A})$, $\mathcal{J}^p(A, \mathfrak{B})$ und $\mathcal{J}^p(A, \mathfrak{A})$, $\mathcal{V}^p(A, \mathfrak{B})$ erzeugt. Es wird gezeigt, daß die K -Mengen einen elementaren Dualitätsbereich \mathfrak{K} im Sinne von Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133) bilden, der die gehäuteten Polyeder umfaßt. Ob \mathfrak{K} mit dem von Miščenko (dies. Zbl. 46, 165) konstruierten Dualitätsbereich zusammenfällt, wird nicht untersucht.

E. Burger.

Sitnikov, K.: Neue Dualitätsbeziehungen für nicht abgeschlossene Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 925—928 (1954) [Russisch].

Fortführung der früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 43, 383; und vorsteh. Referat) über Dualitätssätze für nicht-abgeschlossene Mengen. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in den genannten Referaten. Es wird das Verhalten einiger Untergruppen von $\mathcal{V}^p A$ (nämlich verschiedener „Unverschlingbarkeitsgruppen“) beim Isomorphismus $\mathcal{V}^p A \subseteq \mathcal{J}^{n-p-1} B$ untersucht; z. B. geht die Untergruppe $\mathcal{N}_\mathcal{V}^p A$ von $\mathcal{V}^p A$, die aus denjenigen \mathcal{V} -Klassen besteht, die

wenigstens einen \mathbb{P} -Zyklus enthalten, der mit jedem endlichen p -dimensionalen A -Zyklus mit dualen Koeffizienten das Skalarprodukt null hat, in die Untergruppe $H^{n-p-1}B$ von $\mathbb{J}^{n-p-1}B$ über, die aus denjenigen Homologieklassen besteht, deren Elemente in B im Sinne von $\mathbb{J}_c^{n-p-1}B$ beranden. Die Isomorphie der zugehörigen Faktorgruppen $\mathbb{P}^p A - N_c^p A \cong \mathbb{A}_c^{n-p-1}B$ wird als zweiter Dualitätssatz bezeichnet. Er liefert eine positive Antwort auf die von Alexandroff gestellte Frage, ob die Gruppen mit kompakten Trägern A, B auch für diskrete Koeffizientenbereiche dualisierbar sind, d. h. durch topologische Invarianten der Komplementärmenge ausgedrückt werden können. Der zweite Dualitätssatz kann auch in der Form der Dualität $\mathbb{A}_c^p(A, \mathbb{B}) | \bar{\delta}^{n-p-1}(B, \mathbb{B})$ geschrieben werden, wobei die Gruppe $\bar{\delta}$ folgendermaßen erklärt ist: Auf jeder Überdeckung α der Menge B nehmen wir in der mittels endlicher Ketten definierten Gruppe $\Delta(\alpha, \mathbb{B})$ die Untergruppe $N_{\mathbb{J}}\alpha$ derjenigen Elemente, die das Skalarprodukt null mit allen Elementen aus $\mathbb{V}(\alpha, \mathbb{B})$ haben. Dann ist $\bar{\delta}(B, \mathbb{B})$ die Limesgruppe des inversen Spektrums der bikompakten Erweiterungen $\bar{\delta}(\alpha, \mathbb{B})$ der Faktorgruppen $\mathbb{J}(\alpha, \mathbb{B}) - N_{\mathbb{J}}\alpha$. Es zeigt sich, daß die Gruppe $\bar{\delta}(B, \mathbb{B})$ in gewisser Weise für bikompakte Koeffizientenbereiche das Analogon zu der für diskrete Koeffizientenbereiche bekannten Projektionsgruppe $\delta(B, \mathbb{B})$ ist, die als Limes des inversen Spektrums der diskreten Gruppen $\mathbb{J}(\alpha, \mathbb{B})$ erklärt ist. — Aus diesen und den früheren Ergebnissen von Verf. folgt die folgende invariante Charakterisierung des maximalen elementaren Dualitätsbereiches: Er besteht aus denjenigen Mengen A , für welche durch skalares Produkt die Dualität $\mathbb{A}_c^p(A, \mathbb{B}) | \mathbb{V}^p(A, \mathbb{B})$ erzeugt wird und für welche der natürliche Homomorphismus von $\mathbb{A}_c^p(A, \mathbb{B})$ in $\bar{\delta}^p(A, \mathbb{B})$ ein Isomorphismus auf ist.

E. Burger.

Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: Über einige Folgerungen aus dem zweiten Dualitätsgesetz von Sitnikov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 885—887 (1954) [Russisch].

Aus dem Dualitätssatz des Verf. (dies. Zbl. **33**, 133), in dem jetzt zur Unterscheidung von den Sitnikovschen \mathbb{J} -Gruppen die stetigen Bettigruppen mit $\bar{\mathbb{J}}$ bezeichnet werden, und dem zweiten Dualitätssatz von Sitnikov (vorsteh. Referat) ergibt sich, daß jede Eigenschaft der Menge A , die sich mittels des natürlichen Homomorphismus $h: \mathbb{J}^p(A, \mathbb{B}) \rightarrow \delta^p(A, \mathbb{B})$, bei dem jeder wahre Zyklus von A als gleitender (und damit als Projektions-) Zyklus aufgefaßt wird, ausdrücken läßt, dualisierbar ist, d. h. durch topologische Eigenschaften der Komplementärmenge B ausgedrückt werden kann. Der zu h duale Homomorphismus $h: \bar{\mathbb{J}}^{n-p-1}(B, \mathbb{B}) \rightarrow \bar{\delta}^{n-p-1}(B, \mathbb{B})$ hat nämlich einfach die Bedeutung eines gewöhnlichen Einbettungshomomorphismus. Es ist nämlich analog zum natürlichen Isomorphismus von δ^p mit der äußeren Bettigruppe D^p (gleitende Zyklen) auch $\bar{\delta}^p(B, \mathbb{B})$ natürlich-isomorph mit dem Limes $\bar{D}^p(B, \mathbb{B})$ des inversen Spektrums der bikompakten Gruppen $\bar{\mathbb{J}}^p(\mu, \mathbb{B})$ der Umgebungen μ von B , und bei diesem natürlichen Isomorphismus geht h in den Einbettungshomomorphismus von \mathbb{J}^p in \bar{D}^p über. — Insbesondere sind also der Kern von h [d. h. in der Bezeichnungsweise von Alexandroff (l. c.) die „erweiterte Unverschlingbarkeitsgruppe“], das Bild $h: \mathbb{J}^p A$ sowie die Faktorgruppe $\delta^p A - h: \mathbb{J}^p A$ dualisierbar.

E. Burger.

Wilder, R. L. and J. P. Roth: On certain inequalities relating the Betti numbers of a manifold and its subsets. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 207—209 (1954).

Einheitliche und einfache Ableitung von Relationen zwischen den Bettischen Zahlen einer abgeschlossenen Teilmenge einer geschlossenen orientierbaren verallgemeinerten Mannigfaltigkeit und denjenigen der Komplementärmenge, wie sie unter spezielleren Voraussetzungen von Pontrjagin, Morse u. a. bewiesen worden sind. Es werden beim Beweise nur bekannte exakte Folgen und verallgemeinerte Formen des Poincaréschen Dualitätssatzes benutzt.

H. Seifert.

Deheuvels, René: Cohomologie d'Alexander-Cech à coefficients dans un faisceau sur un espace topologique quelconque. Applications. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1089—1091 (1954).

On sait que la théorie de la cohomologie des espaces localement compacts relative à un faisceau de coefficients, et de leurs applications continues, due à J. Leray (ce Zbl. **38**, 363) a été généralisée par H. Cartan aux espaces topologiques réguliers (Séminaire de topologie de l'E. N. S. Paris 1950—51, Exp. XIV—XX). L'A. annonce ici une généralisation à des espaces topologiques quelconques (non nécessairement séparés). Il définit le complexe (X, \mathbb{B}) des cochaines „d'Alexander-Cech“ d'un espace X relativement à un faisceau \mathbb{B} d'algèbres au moyen des recouvrements ouverts de X , selon un procédé mentionné par H. Cartan (loc. cit.) et de plus en plus usité, d'où un faisceau $[X, \mathbb{B}]$ et une algèbre de cohomologie $H(X, \mathbb{B})$. On introduit

de même le complexe singulier (X_s, \mathfrak{B}) , le faisceau correspondant $[X_s, \mathfrak{B}]$ et l'algèbre de cohomologie singulière $H(X_s, \mathfrak{B})$. À une application continue $\xi: X \rightarrow Y$ et à un faisceau localement constant \mathfrak{A} sur X , l'A. associe ensuite: (a) une filtration de $H(X, \mathfrak{A})$ et une suite spectrale où $E_2 = H(Y, \xi H[X, \mathfrak{A}])$ est l'algèbre de cohomologie de Y relativement à l'image par ξ du faisceau de cohomologie du faisceau $[X, \mathfrak{A}]$ et où $E_\infty = GH(X, \mathfrak{A})$ est l'algèbre graduée de $H(X, \mathfrak{A})$, (b) une filtration de $H(X, \mathfrak{A})$ et une suite spectrale reliant $E_2 = H(Y, \xi H[X, \mathfrak{A}])$ à $E_\infty = GH(X, \mathfrak{A})$. L'A. met à la base de ses considérations la notion de faisceau stable (i. e. la cohomologie de tout ouvert V relative au faisceau induit se réduit aux sections au-dessus de V), qui généralise celle de faisceau fin, et un critère pour qu'un faisceau soit stable. *A. Borel.*

Deheuvels, René: Filtration d'Alexander-Čech de la cohomologie singulière. Répartition des points critiques d'une fonction numérique. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1186—1188 (1954).

Nous conservons les notations de l'analyse précédente. L'énoncé (b) terminant cette dernière, appliqué au cas où $X = Y$ et où ξ est l'identité, montre l'existence d'une filtration „d'Alexander-Čech“ de la cohomologie singulière, et d'une suite spectrale reliant $H(X, H[X, \mathfrak{A}])$ à $GH(X, \mathfrak{A})$. Le faisceau $H(X, \mathfrak{A})$ peut s'envisager comme faisceau de la cohomologie singulière locale relative à \mathfrak{A} ; en particulier, si X est H.L.C. ce faisceau est nul pour les degrés > 0 et l'on retrouve l'isomorphie de la cohomologie d'Alexander-Čech avec la cohomologie singulière; l'A. introduit aussi une suite spectrale analogue en cohomologie relative. Enfin, il combine ces résultats à ceux d'une Note antérieure [C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1847—1849 (1953)] pour obtenir une suite spectrale permettant d'étudier la répartition des points critiques d'une fonction numérique réelle et de généraliser des résultats de M. Morse. *A. Borel.*

Yoneda, Nobuo: On the inverse chain maps. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **7**, 33—67 (1954).

Verf. definiert den Umkehrhomomorphismus bei Abbildungen von Mannigfaltigkeiten [H. Hopf, J. reine angew. Math. **163**, 71—88 (1930); H. Freudenthal, dies. Zbl. **18**, 90; M. Rueff, dies. Zbl. **19**, 331; A. Komatu, dies. Zbl. **17**, 330], ohne Verwendung der Dualzerlegung oder einer Anordnung der Eckpunkte. Statt dessen verwendet er seine „desingularisierten“ Abbildungen (N. Yoneda, dies. Zbl. **51**, 139), bei denen die Dimension eines Simplex niemals stärker erniedrigt wird als der Dimensionsunterschied der Mannigfaltigkeit und ihres Bildes beträgt. (Vom Standpunkt der Homotopieinvarianz aus darf man sich auf solche Abbildungen beschränken.) Die Umkehrung $\equiv j^*$ der Abbildung $f: k \rightarrow L$ ($\dim k = n + k$, $\dim L = n$) wird folgendermaßen definiert. Sei τ ein q -Simplex; ist $q = \dim L$, so ist die Definition klar, ist $q < \dim L$, P_k, P_L die Bildung des orientierten Komplements $\tau = (-1)^{k(n-q)} \sum \lambda_i \sigma_i$ in P_k bzw. P_L , λ_i der Abbildungsgrad von $f: P_k \sigma_i \rightarrow P_L \tau$, so bilde man $\equiv j^* \tau = (-1)^{k(n-q)} \sum \lambda_i \sigma_i$. Grundlegende Eigenschaften der Umkehrung werden behandelt. Die Begriffe werden ausgedehnt auf Mannigfaltigkeiten aus nicht notwendig simplizialen Bausteinen und auf relative Mannigfaltigkeiten. *H. Freudenthal.*

Shiraiwa, Kenichi: On the homotopy type of an A_n^3 -polyhedron ($n \geq 3$). Amer. J. Math. **76**, 235—251 (1954).

Un A_n^3 -polyèdre est un polyèdre K de dimension $n + 3$, tel que: $\pi_0(K) = \mathbb{Z}$, $\pi_i(K) = 0$ pour $1 < i < n$. L'A. énonce pour ces polyèdres le résultat suivant: le type d'homotopie d'un A_n^3 -polyèdre est entièrement caractérisé par le type complet de cohomologie; réciproquement, tout type complet de cohomologie (satisfaisant aux conditions évidentes de type fini) est le type de cohomologie d'un A_n^3 -polyèdre K . Pour définir le type complet de cohomologie, il faut se donner, outre le „spectre“ de cohomologie au sens de Bockstein des groupes $H^{n+i}(K; \mathbb{Z}_m)$, $i = 0, 1, 2, 3$, le carré de Steenrod Sq^2 , l'opération de J. Adém Φ_1 (qui applique le noyau de Sq^2 dans H^n dans $H^{n+3} Sq^2 H^{n+1}$), et une généralisation de cette opération en coefficients mod 4, due à N. Shimada et H. Uehara. L'A. démontre même qu'étant donnés deux A_n^3 -polyèdres K et L , tout homomorphisme du type complet de cohomologie de l'un dans celui de l'autre est induit par une application cellulaire. La démonstration utilise le procédé dû à J. H. C. Whitehead: réduction du polyèdre à une forme canonique obtenue par adjonction explicite de $(n + 3)$ cellules à un A_n^3 -polyèdre. *R. Thom.*

Massey, W. S.: Some new algebraic methods in topology. Bull. Amer. math. Soc. **60**, 111—123 (1954).

Exposé, en général sans démonstrations ni détails techniques, des applications de la notion de couple exact introduite par l'A. [Ann. of Math., II. Ser. **56**, 363—396 (1952)]. En l'appliquant à la filtration naturelle des cochaînes de l'espace fibré (suivant les dimensions dans l'espace de base), elle fournit la suite spectrale de Leray. Un théorème de H. Cartan sur les revêtements, des résultats de l'A. sur les groupes d'homotopie et de cohomotopie, et un théorème de Serre-Hochschild sur les groupes d'homologie d'un groupe abstrait et de ses sous-groupes donnent d'autres exemples de suites spectrales (non contenues dans celles de Leray). *G. Hirsch.*

Kobayashi, Shôshichi: La connexion des variétés fibrées. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 318—319 (1954).

A toute variété fibrée est associée la variété fibrée des ses espaces tangents. Une connexion infinitésimale de la variété fibrée induit une telle de la variété des espaces tangents. L'A. annonce le résultat suivant: Pour que le groupe structural G de l'espace fibré E puisse être réduit à un sous-groupe H de G , il faut et il suffit qu'il existe une connexion de E dont le groupe d'holonomie est contenu dans H . *H. Guggenheimer.*

Wang, Hsien-Chung: Closed manifolds with homogeneous complex structure. Amer. J. Math. **76**, 1—32 (1954).

L'A. détermine les variétés compactes simplement connexes qui sont „homogènes complexes“, c'est-à-dire qui admettent une structure analytique complexe invariante par un groupe transitif d'homéomorphismes, et qu'il appelle C -espaces. D'après Bochner-Montgomery ce Zbl. **30**, 75, un C -espace s'identifie au quotient d'un groupe de Lie complexe B par un sous-groupe fermé complexe et d'après D. Montgomery [Proc. Amer. math. Soc. **1**, 467—469 (1950)] tout sous-groupe compact maximal de B est transitif: un C -espace peut donc s'envisager comme quotient d'un groupe compact connexe, qui peut du reste être supposé semi-simple. Le résultat principal de ce travail est que si un quotient G/H (G compact semi-simple, simplement connexe, H sous-groupe fermé connexe) est homogène complexe, alors H est (localement) le produit direct d'un tore T^k par la partie semi-simple du centralisateur d'un tore (pouvant différer de T^k) et réciproquement un tel quotient est homogène complexe lorsque sa dimension est paire. La démonstration, assez longue ne peut guère être résumée ici: elle repose principalement sur la théorie des algèbres de Lie semi-simples complexes de H. Weyl et sur les résultats sus-mentionnés de Bochner et Montgomery. D'après ce théorème, un C -espace est quotient par un tore d'un espace G/M , où M est la partie semi-simple du centralisateur d'un tore; ce dernier est lui-même produit d'espaces G_i/M_i de même nature, où G_i est simple, et dont, en s'appuyant sur des résultats connus, l'A. dresse la liste. Leur deuxième nombre de Betti est toujours nul et ainsi tout produit de tels espaces qui est de dimension paire admet une structure de variété analytique complexe non algébrique; on obtient ainsi, entre autres, les variétés d'Eckmann-Calabi, homéomorphes à $S_{2p+1} \times S_{2p+1}$, et les groupes de Lie compacts semi-simples de dimensions paires. L'A. montre également qu'un C -espace admet une infinité non dénombrable, (resp. seulement un nombre fini), de structures homogènes complexes si sa caractéristique d'Euler est nulle (resp. $\neq 0$). Enfin, il fait voir que le plus grand groupe connexe d'homéomorphismes analytiques complexes d'un C -espace est localement le produit direct d'un groupe semi-simple complexe par un groupe abélien complexe. *A. Borel.*

Aoki, Kiyoshi: On some invariants of mappings. Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 220—237 (1954).

Eine mathematisch und sprachlich sehr unvollkommene und in allen Einzelheiten fehlerhafte Darstellung möglicherweise richtiger Ideen. Da bereits die Definitionen, so wie sie formuliert werden, unhaltbar sind, ist es unmöglich, Näheres aus den Untersuchungen mitzuteilen. Verf. behandelt die Sphärenabbildungen mit den geometrischen Methoden von H. Hopf und H. Freudenthal. *H. Freudenthal.*

Sorgenfrey, R. H.: Dimension lowering mappings of convex sets. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 179—181 (1954).

Der „Antipodensatz“ von K. Borsuk (dies. Zbl. **6**, 424) kann, abweichend von der üblichen Formulierung, auch so ausgesprochen werden: Zu jeder stetigen Abbildung der n -Sphäre S_n in den euklidischen E_n gibt es mindestens einen Punkt p des E_n , für welchen der Durchmesser seiner Urbildmenge gleich dem der S_n ist. Verf. betrachtet allgemeiner stetige Abbildungen f einer bikompakten, konvexen Menge K der Dimension n und der Dicke w (= kleinster Abstand paralleler Stützhyperebenen) in Räume F einer Dimension $m < n$. Sätze: 1. Im Falle $F = E_{n-1}$

existiert mindestens ein Punkt $p \in F$, für welchen der Durchmesser $d(f^{-1}(p)) \geq w$ ist. — 2. Ist $n > 3$ und F beliebig mit $m \leq (n-2)/2$, so existiert ein Punkt $p \in F$ und eine zusammenhängende Menge $H \subset f^{-1}(p)$ mit $d(H) \geq w$. — Die analoge Frage für $n > m > (n-2)/2$ bleibt unbeantwortet; für $n = 3$ und $m = 1$ werden jedoch die folgenden Sätze bewiesen: 3. Es existiert mindestens ein Punkt p der eindimensionalen Menge F und eine zusammenhängende Menge $H \subset f^{-1}(p)$ mit $d(H) \geq w/3$. — 4. Wird K noch zusätzlich als zentral-symmetrisch vorausgesetzt, so existiert ein Punkt $p \in F$ und eine zusammenhängende Menge $H \subset f^{-1}(p)$ mit $d(H) \geq w/2$. — Beispiele zeigen, daß die in Satz 3 und 4 gewonnenen Abschätzungen nicht verbessert werden können, selbst dann nicht, wenn F die Zahlengerade ist. *H. Bauer.*

Weier, Josef: Normale Abbildungsscharen. *Math. Z.* **59**, 356–374 (1954).

Die Arbeit setzt sich das Ziel, den Deformationsweg, auf dem eine Selbstabbildung eines Polyeders in eine zu ihr homotope Abbildung mit der Mindestzahl von Fixpunkten der zugehörigen Abbildungsklasse übergeführt wird, im Hinblick auf die während der Deformation auftretenden Fixpunkte möglichst übersichtlich zu gestalten. In dieser Richtung wird für die identische Abbildung $f = f_0$ eines Polyeders P , die bekanntlich in eine Abbildung mit nur einem Fixpunkt deformierbar ist, folgendes bewiesen: Sei P endlich und derart zusammenhängend, daß ein Eckpunkt von P seine Umgebung zerlegt. Dann läßt sich f durch eine stetige Schar von Abbildungen f_τ ($0 \leq \tau \leq 1$) so deformieren, daß f_τ für $0 < \tau < 1$ eine feste endliche Anzahl m von Fixpunkten $p_{\tau,i}$ ($i = 1, \dots, m$) hat, die für jedes i eine stetige Kurve $p_{\tau,i}$ mit dem Parameter τ bilden, und daß f_1 genau einen Fixpunkt $p = p_{1,1}$ hat. Solche Abbildungsscharen werden als „normal“ bezeichnet. — Zum Beweis wird das Parameterintervall $0 \leq \tau \leq 1$ in eine kleine abgeschlossene Umgebung von 0 und in das Restintervall geteilt. In dem ersten Intervallstück wird eine ε -Deformation mit den entsprechenden Eigenschaften konstruiert. Bei der Behandlung des zweiten Intervallstücks werden „zur Identität benachbarte“ Abbildungen betrachtet und Sätze über das Wegdeformieren von Fixpunkten vom Index 0 herangezogen. Ferner spielt der Begriff des linearen Fixpunktes p eine Rolle, für den es eine zu einer Vollkugel homöomorphe Umgebung V gibt, für die $f(V)$ in einer Strecke enthalten ist. *Wolfgang Franz.*

Weier, Josef: Fixpunktmindestzahlen in unendlichen Polyedern. *Math. Ann.* **127**, 319–339 (1954).

Die Frage nach der Mindestzahl von Fixpunkten in einer Klasse von Selbstabbildungen eines Polyeders ist für endliche Polyeder weitgehend beantwortet. Hier wird die entsprechende Frage für unendliche, dimensionsbeschränkte Polyeder P untersucht. Bisher wurde für unendliche Polyeder, insbesondere für offene Mannigfaltigkeiten, nur ein mit diesem Problem verwandtes Bedeckungsproblem für Dimensionen $\neq 2$ von H. Hopf behandelt [*Math. Ann.* **192**, 562–623 (1930)]. — Zunächst wird eine Ausdehnung des Hopfschen Approximationssatzes für Fixpunkte auf unendliche Polyeder P bewiesen: Zu jeder stetigen Selbstabbildung f von P gibt es eine ε -Approximation f' von f derart, daß jeder Fixpunkt von f' im Innern eines Grundsimplex von P liegt. — Dann folgt das Hauptresultat, für das P als derart zusammenhängend vorausgesetzt wird, daß kein Eckpunkt seine Umgebung zerlegt. Zu jeder stetigen Selbstabbildung f von P gibt es eine homotope Abbildung f' ohne Fixpunkte. Der Beweis verläuft so, daß aus P durch konzentrische Vollkugeln vom Radius $i = 1, 2, 3, \dots$ Abschnitte V_i herausgeschnitten werden und die Fixpunkte von f schrittweise von $V_i = V_{i-1}$ auf $V_{i+1} = V_i$ herausgeschoben werden. In diesem Satz wird bemerkenswerterweise die Dimension 2 mit umfaßt, allerdings sind dafür in den Beweisen Sonderüberlegungen erforderlich. — Die Ergebnisse werden auf „zur Identität benachbarte“ Abbildungen angewandt und verschärft. Unter den gleichen Voraussetzungen für P wird gezeigt, daß eine zur Identität benachbarte fixpunktfreie Abbildung existiert. Daraus folgt: In jeder differenzierbaren offenen Mannigfaltigkeit existiert ein singulartätenfreies Vektorfeld. *Wolfgang Franz.*

Cronin, Jane: Topological degree of some mappings. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 175–178 (1954).

In Anknüpfung an frühere Arbeiten [*dies. Zbl.* **41**, 237; **50**, 343; *Trans. Amer. math. Soc.* **76**, 207–222 (1954)] betrachtet Verf. die durch (*) $x'_i = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_j a_{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ ($i = 1, \dots, n$) gegebene Abbildung des reellen R^n in sich (dabei bezeichnet \sum_j die Summation über alle nicht-negativen j_1, \dots, j_n derart, daß

$\sum_{j=1}^n j_j = m$). Durch Einbettung in den komplexen R^n beantwortet Verf. die Frage nach dem topologischen Grad der durch (*) definierten Abbildung an der Stelle 0, insbesondere für den Fall, daß sich die rechte Seite von (*) auf homogene Polynome reduziert. Schließlich wird der Fall $n = 2$ explizite diskutiert. *H. Pachale.*

Brouwer, L. E. J.: Ordnungswechsel in bezug auf eine couplierbare geschlossene stetige Kurve. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 112—113 (1954).

Die vorliegende Note soll den § 4 einer früheren Note des Verf. [*Nederl. Akad. Wet., Proc.* **28**, 503—508 (1925)] ersetzen; außerdem wird eine Abkürzung zu § 1 dieser Note angegeben. — Bezeichnungen: „Punkt“ bzw. „Konvergenz“ (in Zeichen: \rightarrow) bedeutet soviel wie „Punktkern“ bzw. „positive Konvergenz“ (vgl. die frühere Note). In der euklidischen Ebene sei K eine geschlossene, stetige Kurve, d. h. eindeutiges stetiges Bild der Kreisperipherie C , abgekürzt $P' = f(P)$, $P \in C$, wobei also P' das Bild von P bezeichnet. Dann heiße K couplierbar in $S' = f(S)$, wenn eine derartige Darstellung $P' = f(P)$ von K (etwa mit $S' = f(S)$) existiert, für die folgendes gilt: (1) Aus $P' \rightarrow S'$ auf K (mit $P' = f(P)$) folgt $P \rightarrow S$; (2) ein gewisser, S enthaltender Teilbogen T , welcher durch die beiden von S entfernt liegenden Punkte $A, B \in C$ begrenzt wird, hat folgende Eigenschaft: Sind T_a bzw. T_b die beiden, von A und S bzw. von S und B begrenzten Teilbogen von T , ist ferner $X'_a = f(X_a)$, $X'_b = f(X_b)$ mit $X_a \in T_a$, $X_b \in T_b$, und konvergieren X'_a und X'_b gegeneinander (auf K), so gilt $X_a \rightarrow S$ und $X_b \rightarrow S$. — Satz: Zu einem couplierbaren K können zwei, von K entfernt liegende Punkte konstruiert werden, welche in bezug auf K verschiedene Ordnungen besitzen. *Otto Haupt.*

Bing, R. H.: Locally tame sets are tame. *Ann. of Math., II. Ser.* **59**, 145—158 (1954).

Die Untermenge K eines Komplexes C ist glatt in C eingebettet, wenn es einen Homöomorphismus von C auf sich selbst gibt, der K in ein Polyeder überführt; eine Untermenge ist im kleinen glatt, wenn dasselbe für eine Umgebung jedes Punktes von K in C gilt. Es wird gezeigt, daß im kleinen glatte Untermengen glatt sind für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, unter Benutzung der Triangulierbarkeit derselben, und zwar nacheinander für Flächen, Bögen und dann abgeschlossene Punkt-mengen K . Jede berandete 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

K. Reidemeister.

Harrold jr., O. G., H. C. Griffith and E. E. Posey: A characterization of tame curves in three-space. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 235—237 (1954).

Es werden für einfache Bögen bzw. geschlossene Kurven I des 3-dimensionalen euklidischen Raumes zwei Eigenschaften $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ erklärt und einerseits gezeigt, daß Bögen I , die sich durch Homöomorphismen des Gesamtraumes auf ebene Kurven abbilden lassen, diese Eigenschaften haben und daß geschlossene Kurven mit diesen Eigenschaften glatt eingebettet sind. Die Eigenschaft \mathfrak{E}_1 besagt, daß es beliebig kleine mod I polyederartige Sphären zu jedem Punkt x von I gibt, welche x im Inneren enthalten und I in einer zur Ordnung (Menger-Urysohn) von x in I äquivalenten Menge trifft. Die Eigenschaft \mathfrak{E}_2 besagt, daß es zu jedem Punkt x ein mod I polyederartiges Flächenstück G gibt, dessen Durchschnitt mit I im Rand von G liegt und der Abschluß einer Umgebung von x in I ist.

K. Reidemeister.

Moise, Edwin E.: Affine structures in 3-manifolds. VIII. Invariance of the knot-types; local tame imbedding. *Ann. of Math., II. Ser.* **59**, 159—170 (1954).

(Teil VII, dies. Zbl. **51**, 101). Es wird gezeigt: Ist H ein Homöomorphismus des 3-dimensionalen euklidischen Raumes auf sich, welcher die Orientierung erhält und das Polygon I in das Polygon I' überführt, so repräsentieren I und I' denselben Knoten. Man kann hiernach Knoten als Klassen glatt eingebetteter einfach geschlossener Kurven erklären, welche durch Homöomorphismen H ineinander überführbar sind. Jede Klasse enthält ein Polygon I , und ist I' ein Polygon derselben Klasse, so sind I und I' äquivalent im üblichen Sinn. Der Beweis beruht auf dem von Graub bewiesenen Satz, daß I und I' denselben Knoten repräsentieren, wenn H stückweis linear ist. — Ferner werden die auf anderem Wege von Bing erzielten Resultate über im kleinen glatte Punkt-mengen bewiesen. Eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit im 3-dimensionalen euklidischen Raum, deren Rand eine 2-dimensionale Sphäre ist, ist eine 3-dimensionale Zelle.

K. Reidemeister.

Torres, G. and R. H. Fox: Dual presentations of the group of a knot. *Ann. of Math., II. Ser.* **59**, 211—218 (1954).

$2(\alpha + 1)$) und $(1, 2\beta(\alpha + 2), \alpha + 2)$ mit $\alpha \cdot \beta^{\lambda} = 2p - 1$ erschöpft. Die Beweise bestehen wesentlich in der Aufstellung von Konstruktionsvorschriften.

F. Baebler.

Ringel, Gerhard: Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nicht-orientierbaren Flächen. Math. Ann. 127, 181–214 (1954).

ν bedeutet die größte Zahl von Ländern, in welche sich eine geschlossene Fläche einteilen läßt derart, daß jedes Land mit jedem andern mindestens eine Kante gemein hat; sie heißt Maximalzahl der Nachbargebiete. Bezeichnet man die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächenstücke der Reihe nach mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, so ergeben sich unmittelbar $\binom{\nu}{2} \leq \alpha_1$ und $3\alpha_0 \leq 2\alpha_1$, wodurch aus der Gleichung für die Eulersche Charakteristik N die Relation $\nu(\nu - 1) \leq 6N$ folgt und daraus $\nu \leq \lfloor \frac{1}{2} \sqrt{49 + 24N} \rfloor = W(N)$. Aus $N = q - 2$ für nicht orientierbare Flächen vom Geschlecht q ergibt sich weiter $\nu \leq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor 1 - 24q \rfloor$. Verf. beweist die Gültigkeit des Gleichheitszeichens für alle $q \neq 2$. Auf orientierbaren Flächen vom Geschlecht p wird die Gültigkeit des Gleichheitszeichens für $12r^2 + 3r + 1 \leq p \leq 12r^2 + 5r$, $r = 1, 2, \dots$, bewiesen. ν_q erweist sich für nicht orientierbare Flächen vom Geschlecht $q \neq 2$ auch als die chromatische Zahl χ , d. h. die Minimalzahl von Farben, welche genügt, um die Länder einer Karte so zu färben, daß keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe erhalten, was aus der Heawoodschen Ungleichung $\nu \leq \chi \leq W(N)$ hervorgeht. Als Anwendung des Hauptresultates folgt ferner der Satz: auf einer nicht orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $\lfloor \frac{1}{6} (n - 3)(n - 4) + \frac{2}{3} \rfloor$ kann der vollständige Graph mit $n > 7$ Ecken ohne Selbstüberschneidungen gezeichnet werden, während dies für kein kleineres Geschlecht möglich ist. Die Behauptungen werden im wesentlichen durch Angabe von Konstruktionsvorschriften bewiesen.

F. Baebler.

Dirac, G. A. and S. Schuster: A theorem of Kuratowski. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 343–348 (1954).

Ein neuer und einfacher Beweis des Satzes von Kuratowski: „Ein endlicher Graph ist dann und nur dann eben (plättbar), wenn er keinen Teilgraphen enthält, der homöomorph ist entweder zu einem Sechseck mit den gegenüberliegenden Ecken verbindenden Diagonalen oder zu einem Fünfeck mit seinen Diagonalen. (Die Seiten und Diagonalen können dabei noch durch Punkte unterteilt sein).“ — Der Satz gilt nur dann auch für abzählbar unendliche Graphen, wenn Häufungspunkte von Knotenpunkten auftreten dürfen.

H. Künneht.

Dirac, G. A.: Theorems related to the four colour conjecture. J. London math. Soc. 29, 143–149 (1954).

An Stelle der Gebieteinteilungen auf Flächen werden die zugeordneten (dualen) Graphen betrachtet. Ein Graph heißt k -chromatisch, wenn seine Punkte mit k , aber nicht weniger Farben so gefärbt werden können, daß die beiden Endpunkte jeder Kante verschieden gefärbt sind. Ein k -chromatischer Graph heißt „kritisch“, wenn kein echter Teilgraph von ihm k -chromatisch ist. Unter einer „Kontraktion“ wird verstanden, daß eine Kante mit ihren Endpunkten a und b ersetzt wird durch einen Punkt c , der inzident ist mit genau den Kanten, die mit a und b inzident sind. n -Graph bedeutet Graph mit n Punkten. U. a. werden folgende Sätze bewiesen: 1. Wenn ein kritischer k -chromatischer Graph einen vollständigen n -Graph als Teilgraph enthält ($n \leq k - 1$), dann kann er zu einem vollständigen $(n + 1)$ -Graph kontrahiert werden. — 2. Jeder 6-chromatische Graph oder ein aus ihm durch Kontraktion hervorgehender Graph auf einer Fläche der Charakteristik 0 enthält einen vollständigen 5-Graph als Teilgraphen. Daraus läßt sich folgern, daß kein Graph auf der Ebene oder Kugel 6-chromatisch ist.

H. Künneht.

Turán, P.: On the theory of graphs. Colloquium math. 3, 19–30 (1954).

Es wird eine Formel I für die Maximalzahl $M(n, k)$ der Kanten gegeben, die ein n -punktiger Graph G haben kann, ohne einen vollständigen k -punktigen Teilgraphen zu enthalten. G soll ohne Schleifen und je zwei Punkte von G sollen nur durch eine Kante verbunden sein. Der anderen Orts (dies. Zbl. 26, 269) in ungarischer Sprache gebrachte Beweis für die Formel I und dafür, daß die Struktur eines solchen Graphen mit $M(n, k)$ Kanten eindeutig bestimmt ist, wird hier wiederholt. Eine von Zarankiewicz gegebene Formel II: $l > n \cdot (k - 2)/(k - 1)$, die für jeden Graph gilt, dessen Punkte alle mindestens den Grad l haben und der einen vollständigen k -punktigen Teilgraph enthält, folgt aus Formel I, aber I nicht aus II. — Jeder Graph $G(l)$, dessen Punkte alle mindestens den Grad l haben, hat mindestens $\lfloor (ln + 1)/2 \rfloor$ Kanten. Es gibt verschiedene Graphen $G(l)$ mit dieser minimalen

Kantenzahl; eine von Varga stammende Methode, solche Graphen zu bilden, wird angegeben. Über weitere ähnliche gelöste und ungelöste Extremalprobleme für Graphen wird berichtet.

H. Künneht.

Tutte, W. T.: A contribution to the theory of chromatic polynomials. Canadian J. Math. 6, 80—91 (1954).

Es handelt sich um zwei n -Farbenprobleme für endliche Graphen. Im Fall I werden die Knotenpunkte a_i , im Fall II die Kanten k_j den Restklassen nach n zugeordnet. Die Zuordnung sei durch $f(a_i)$, bzw. $f(k_j)$ gegeben. Für eine beliebige festgesetzte Orientierung der Kanten sei im Fall I $f(k_j) = f(a_i) - f(a_i')$ die der Kante $k_j = a_i a_{i'}$ zugeordnete Restklasse. Es sei $\eta(a_i, k_j) = 1$ oder -1 oder 0 , je nachdem a_i Schlußpunkt bzw. Anfangspunkt von k_j bzw. kein Endpunkt von k_j oder k_j eine Schleife ist. In beiden Fällen soll für jede Kante k_j gelten: $f(k_j) \neq 0$. Im Fall II soll außerdem für jeden Punkt a_i gelten: $\sum \eta(a_i, k_j) \cdot f(k_j) = 0$. Der Graph kann

dann weder Brücken noch Endkanten enthalten, wie im Fall I keine Schleifen. — Die Anzahlen der verschiedenen Zuordnungsmöglichkeiten für einen Graph G , die obige Bedingungen erfüllen, werden gegeben durch die entsprechenden chromatischen Polynome (G , D. Birkhoff, dies. Zbl. 8, 226) $\Theta(G, n)$ im Fall I und $\Phi(G, n)$ im Fall II. Aus $\Phi(G, n) > 0$ folgt $\Phi(G, n+1) > 0$. Es wird vermutet: $\Phi(G, n) > 0$ für $n \geq 5$, wenn G ohne Brücken und Endkanten. — Jedem Graph G wird hier noch ein „dichromatisches Polynom“ in zwei Variablen zugeordnet, dessen Gliederzahl gleich der Zahl der verschiedenen Gerüste von G ist (wenn G ein Baum, also 1). Das Polynom ist vom Grad α in der einen, vom Grad $\alpha - \beta$ in der andern Variablen, wenn α die Zahl der Kanten von G , β die der Kanten eines Gerüsts von G ist. Aus dem dichromatischen Polynom, für das eine rekursive Bildungsvorschrift gegeben wird, erhält man, je nachdem ob man für die eine Variable $1 - n$, für die andere 0 setzt oder umgekehrt, die chromatischen Polynome $\Theta(G, n)$ und $\Phi(G, n)$.

H. Künneht.

Tutte, W. T.: A short proof of the factor theorem for finite graphs. Canadian J. Math. 6, 347—352 (1954).

Für die vom Verf. früher (dies. Zbl. 52, 200) gegebene notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Graph G ohne f -Faktor ist, wird ein kürzerer Beweis gegeben durch Zurückführung auf den Fall des Fehlens eines Faktors ersten Grades. Dabei versteht man unter einem f -Faktor von G einen Teilgraphen G' von G , und zwar sollen, wenn jedem Knotenpunkt von G eine positive ganze Zahl $f(a)$ zugeordnet ist, $f(a)$ Kanten aus G' von a ausgehen. Ist $f(a) = 1$ für jeden Punkt a , dann ist G' ein Faktor ersten Grades.

H. Künneht.

Baebler, F.: Über den Zerlegungssatz von Petersen. Commentarii math. Helvet. 28, 155—161 (1954).

Ein regulärer Graph G_3 Grades G_3 sei in einen Faktor 2. Grades mit schwarzen und in einen Faktor 1. Grades mit roten Kanten zerlegt. G_3 heiße dann „gefärbt“. Ersetzt man in einem gegebenen G_3 alle Knotenpunkte durch Dreiecke und macht alle Kanten dieser Dreiecke schwarz, die ursprünglichen Kanten von G_3 rot, so ist der entstandene Graph G'_3 „gefärbt“. Ist eine rote Kante in einem alternierenden schwarz-roten Zyklus Z enthalten, so werden die Kanten von Z umgefärbt und alle zu Z nicht fremden Dreiecke wieder durch Punkte ersetzt; dann ist auch der so entstandene Graph G''_3 „gefärbt“. Das Verfahren läßt sich fortsetzen bis man den ursprünglichen Graphen G_3 „gefärbt“ erhält, wenn jede rote Kante eines gefärbten regulären Graphen 3. Grades in einem alternierenden Zyklus enthalten ist. Der Nachweis, daß dies für brückenlose Graphen richtig ist, ist der wesentliche Teil dieses neuen Beweises des Satzes von Petersen.

H. Künneht.

Rédei, Ladislaus: Über die Kantenbasen für endliche vollständige gerichtete Graphen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 17—24 und russ. Zusammenfassg. 25 (1954).

Der Betrachtung liegt das Netz \mathfrak{N} der n -ten Ordnung zugrunde, d. h. der Graph mit n Knotenpunkten, von denen je zwei durch genau zwei entgegengesetzt gerichtete Kanten verbunden sind. Als Kantenbasis von \mathfrak{N} wird jeder Teilgraph von \mathfrak{N} bezeichnet, in dem von jedem Punkt von \mathfrak{N} mindestens eine Bahn nach jedem andern Punkt von \mathfrak{N} führt und keine hierfür entbehrliche Kante enthalten ist (vgl. D. König, dies. Zbl. 13, 228, S. 92 des Buches). Verf. beweist, daß jede Kantenbasis von \mathfrak{N} ein ebener Graph (vom Geschlecht Null) ist (Satz 1) und gibt für $n \geq 3$ ein rekursives Verfahren zur Herstellung aller nichtzyklischen Kantenbasen von \mathfrak{N} an (Satz 2). Von einer außerdem mitgeteilten, unmittelbar aus der Definition hervorgehenden Formel für die Anzahl N_n aller Kantenbasen von \mathfrak{N} , die

ziemlich kompliziert ist, sagt Verf., es sei ihm nicht gelungen, sie auf eine einfachere Form zu bringen. Beispiele: $N_2 = 1$, $N_3 = 5$, $N_4 = 58$, $N_5 = 1069$.

E. Schönhardt.

Harary, Frank and Robert Z. Norman: The dissimilarity characteristic of linear graphs. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 131—135 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **51**, 405) wurde von den Verff. bewiesen, daß die dissimilarity characteristic für Husimi-Bäume gleich 1 ist. Hier wird gezeigt, wie man dieses Ergebnis verallgemeinern kann für beliebige Graphen.

H. Künneht.

Sabidussi, Gert: Loewy-groupoids related to linear graphs. *Amer. J. Math.* **76**, 477—487 (1954).

Die manche Unklarheiten enthaltende Arbeit behandelt Fälle, in denen die Gesamtheit der Abbildungen eines Teilgraphen H von einem Graphen G in G ein Loewy-Groupoid bilden.

H. Künneht.

Theoretische Physik.

● **Sommerfeld, Arnold:** Mechanik der deformierbaren Medien. (Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 2.) 3. unveränd. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1954. XII, 371 S., 74 Fig. DM 15,—.

● **Sommerfeld, Arnold:** Elektrodynamik. (Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 3.) 2. unveränd. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1954. XVI, 374 S., 48 Fig. DM 12,—.

● **Sommerfeld, Arnold:** Partielle Differentialgleichungen der Physik. (Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 6.) 3. unveränd. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1954. XIII, 332 S., 42 Fig. DM 16,50.

Destouches, Jean-Louis: Allgemeine Theorie der Voraussagen. *Arch. math. Logik Grundlagenforsch.* **2**, 10—14 (1954).

Kurzgefaßte Darstellung der Untersuchungen des Verf. über die allgemeine Struktur physikalischer Theorien.

G. Süßmann.

Bopp, Fritz: Über die Natur der Wellen. *Z. angew. Phys.* **6**, 235—238 (1954).

Schlegel, Richard: Wave and inertial properties of matter. *Amer. J. Phys.* **22**, 77—82 (1954).

Das Newtonsche Kraftgesetz und die Einsteinsche Energie-Masse-Äquivalenz ($\tilde{\gamma} = m \ddot{r}$ bzw. $E = m c^2$) werden mit Hilfe der Lorentztransformation aus der de Broglieschen und der Planckschen Relation ($\lambda = h m v$ bzw. $E = h v$) hergeleitet.

G. Süßmann.

Mechanik:

Mullender, P.: Über einige Prinzipien der Mechanik. *Euclides, Groningen* **9**, 103—115 (1954) [Holländisch].

Bakke, F., H. Olsen, H. Wergeland and H. Øveraas: Note on the integration of Hamiltonian equations. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **26**, 51—53 (1954).

Ausgehend von dem Grundgedanken, daß die Bewegung eines dynamischen Systems dem Entfalten einer Berührungstransformation entspricht, zeigen die Verff., wie man durch Iterieren des Operators $T_{\delta t} = \{1 + \delta t \cdot (H, \cdot)\}$ zum vollständigen Integral eines Systems mit der Hamiltonfunktion H gelangen kann. Das von Lie angeführte Verfahren führt jedoch nur in seltenen Fällen zu einer praktischen Verwertbarkeit. Anwendungsbeispiel: Uniformisierung von y und x , wo y eine algebraische Funktion von x ist vermöge einer Beziehung $A(x, y) = \sum_{v=0}^n \sum_{n=0}^N a_{vn} x^v y^n = 0$. Die durch $x = x(t)$, $y = y(t)$ definierte Liesche Gruppe hat die infinitesimale

Transformation $U_{\alpha} = 1 + \delta t \cdot (x \partial/\partial x + y \partial/\partial y)$, durch deren Iteration wegen $x = -\partial A/\partial y$, $y = \partial A/\partial x$ und $U A = A$ die Darstellung von x und y als Potenzreihen von t möglich ist.

E. Hartwig.

Backes, F.: Sur quelques problèmes de dynamique. *Mathesis* 63, 5–9 (1954).

Some classical dynamical problems are solved by means of geometrical arguments together with the energy equation and the principal of angular momentum.

M. M. Peixoto.

Zeuli, Tino: Problemi relativi al moto di un punto su una sfera riferita a coordinate ellittiche sferiche. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 9, 50–54 (1954).

Let μ und ν be elliptical coordinates at the surface of a sphere. If a point is subjected to a field of force with potential $[f(\mu) - g(\nu)] (\cos 2\mu - \cos 2\nu)$ then the equations of motion can be solved by quadratures. A more general result is known (see P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*, vol. 1, p. 595, ex. 11; Paris 1909).

M. M. Peixoto.

Zmorovič, V. A.: Über das eingeschränkte relativistische Zweikörperproblem. *Ukrain. mat. Žurn.* 6, 105–113 (1954) [Russisch].

Bei den Versuchen einer speziell-relativistischen Dynamik vor Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie wurde auch eine Lagrange-Funktion $L^* = c^2 (1 - \frac{1}{2} 1 - v^2/c^2 - 2\Phi/c^2)$ (v Geschwindigkeit, Φ Potential, c Lichtgeschwindigkeit) erörtert, die für $c \rightarrow \infty$ in die klassische Lagrangefunktion $L = v^2/2 - \Phi$ des Problems der Zentralbewegung übergeht. Für das durch L^* definierte Zweikörperproblem werden die beiden dem klassischen Impuls- und Energiesatz entsprechenden Integrale abgeleitet und aus einem „Entsprechungstheorem“ gezeigt, wie z. B. das Newtonsche Potential abgeändert werden muß, um mit L^* auf Kegelschnitte als Bahnkurven zu führen. Noch drei andere, physikalisch nicht begründete formale Abänderungen von L^* , die $L^* - L$ für $c \rightarrow \infty$ erfüllen, werden betrachtet.

H. Buerius.

Bagchi, Hari Das: Note on an equi-momental complex of a rigid body. *J. Math. Physics* 32, 307–311 (1954).

Verf. betrachtet (in vektorieller Schreibweise) den bereits von Painvin und Demoulin untersuchten quadratischen Komplex aller Strahlen, die in bezug auf einen starren Körper (Massensystem) das gleiche feste Trägheitsmoment besitzen. Es wird der Ort der Punkte untersucht, für die der zugehörige Komplexkegel (zweiter Ordnung) I. in ein Ebenenpaar zerfällt, II. drei paarweise senkrechte Erzeugenden, III. drei paarweise senkrechte Tangentialebenen aufweist, IV. ein Drehkegel ist. Weiter werden noch die Kombinationen von I. und II., von II. und IV., sowie von III. und IV. untersucht.

H. R. Müller.

Pliskin, William A.: The tippe-top (Topsy-turvy top). *Amer. J. Phys.* 22, 28–32 (1954).

Verf. erhält unabhängig von Braams und Hugenholz auf etwas anderem Wege dasselbe Ergebnis wie diese: die auffallende Erscheinung, daß ein stark rotierender symmetrischer Kreisel, der auf horizontaler Unterlage spielt, oft aus der Lage, in der der Schwerpunkt unter dem Krümmungsmittelpunkt liegt, in die entgegengesetzte Lage überspringt, kann durch Reibung erklärt werden.

G. Hamel.

O'Brien, Stephen and J. L. Synge: The instability of the tippe-top explained by sliding friction. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* 56, 23–35 (1954).

Ein auf horizontaler Unterlage spielender symmetrischer schwerer Kreisel unterliege im Unterstützungspunkt einer Reibungskraft, die dem Druck und der Geschwindigkeit proportional, dieser entgegengesetzt gerichtet sei. Kleine Schwingungen um die vertikale Gleichgewichtslage werden studiert. Unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung und Benutzung komplexer Zusammenfassungen ergibt sich für den Parameter der kleinen Schwingungen eine Gleichung dritten Grades, die diskutiert wird. Auch wenn der Schwerpunkt unter dem Krümmungsmittelpunkt liegt, gibt es Fälle von Instabilität.

G. Hamel.

McLachlan, N. W.: An oscillation problem involving elliptic integrals of the first and second kinds. *Math. Gaz.* 38, 141–142 (1954).

Andrew, G. M.: Controlled motion with time lag in autopilot. *J. aeronaut. Sci.* 21, 346—347 (1954).

Slibar, A. und K. Desoyer: Zur Erzielung optimaler Wirkung bei Pendel-Schwingungstilgern. *Ingenieur-Arch.* 22, 36—44 (1954).

Grim, O.: Zur Stabilität der periodischen, erzwungenen Rollschwingungen eines Schiffes. *Ingenieur-Arch.* 22, 55—59 (1954).

Miller, Kenneth S.: A remark on stability. *J. appl. Phys.* 25, 407—408 (1954).

Masotti, Arnaldo: Sui moti centrali relativi. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. math. natur., VIII. Ser.* 16, 48—53 (1954).

Let the motion of a point P be known with respect to a certain frame of reference. If the velocity of P has a constant component along a fixed direction then one can define the motion of a point Q such that the acceleration of both P and Q lie along the line PQ . The author then says that the relative motion of one point with respect to the other is central in the restricted sense. *M. M. Peixoto.*

Minakov, A. P.: Über einige Eigentümlichkeiten der kräftefreien Konturbewegung eines ideal-biegsamen, undehnbaren Fadens (einer Kette) in einer festen Ebene. *Vestnik Moskovsk. Univ.* 9, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. eststv. Nauk Nr. 2), 57—64 (1954) [Russisch].

Elastizität. Plastizität:

Malavard, Lucien et Jean Boscher: Application de la méthode des réseaux superposés à l'étude de divers problèmes d'élasticité. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 1093—1095 (1954).

Boscher, Jean: Sur l'application de la méthode des réseaux électriques au calcul de la déformation des plaques élastiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 1189—1192 (1954).

Sveklo, A. V.: Die Lambsche Aufgabe bei gemischten Randbedingungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 95, 737—739 (1954) [Russisch].

Kosko, E.: Effect of local modification in redundant structures. *J. aeronaut. Sci.* 21, 206—207 (1954).

Verf. weist darauf hin, daß ein Bedürfnis besteht, den Einfluß einer örtlichen Änderung einer statisch unbestimmten Konstruktion auf die Spannungs- und Formänderungsverteilung abzuschätzen. Die Arbeit von H. F. Michelsen und A. Dijk [*J. aeronaut. Sci.* 20, 286 (1953)] schlägt eine Erweiterung der Methode der Spannungsflächen („stress area method“) von G. C. Best vor [*J. aeronaut. Sci.* 12, 298—304 (1945)]. Eine neuere Arbeit von R. H. MacNeal (dies. Zbl. 51, 155) weist darauf hin, daß in der Theorie der Schaltungen eine ähnliche Bedingung wie bei den statisch unbestimmten Systemen besteht, wo das sogenannte Ausgleichstheorem („compensation theorem“) eine Lösung herbeiführt. Verf. bringt in seiner Note eine alternative Lösung, die sich auf die Methoden der Matrizenrechnung stützt.

R. Gran Olsson.

Schumann, Walter: Sur différentes formes du principe de B. de Saint-Venant. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 988—990 (1954).

Ohne Beweis werden vier exakte Theoreme mitgeteilt, die Aussagen über die Größenordnung (ϵ) der Spannungen betreffen, welche beim Prinzip von B. de Saint-Venant über die Torsion der Prismen auftreten. Dabei wird eine unendliche Menge von Kräftesystemen betrachtet, die aufeinanderfolgend auf den Körper wirken, und angenommen, daß jedem (ϵ) ein bestimmtes Kräftesystem entspricht.

Th. Pöschl.

Stahl, K.: Über die Lösung ebener Elastizitätsaufgaben in komplexer und hyperkomplexer Darstellung. *Ingenieur-Arch.* 22, 1—20 (1954).

In den letzten Jahrzehnten ist die klassische Methode der Berechnung der Spannungen

(ebener Probleme) mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion in doppelter Hinsicht abgewandelt worden: einmal wurden — speziell von russischen Theoretikern — Spannungen und Verrückungen aus Funktionen komplexer Veränderlicher hergeleitet unter Angabe des Weges, auf dem diese komplexen Spannungsfunktionen gefunden werden können; zum andern hat L. Sobrero die Spannungen aus einer Funktion einer hyperkomplexen Veränderlichen abgeleitet. Beide Methoden arbeiten also mit verschiedenen Arten von Größen. Verf. gelingt es zu zeigen, daß beide Methoden nicht wesentlich voneinander verschieden sind in dem Sinne, daß zwischen beiden Zuordnungsrelationen bestehen. In einem zweiten Teil der Arbeit wird auf die Anwendungen eingegangen. Ebene Aufgaben großer Allgemeinheit werden gelöst, bzw. ihre Lösungen streng oder beliebig genau angegeben. Für einzelne Aufgaben erweist sich die hyperkomplexe Funktion als geeigneter denn die gewöhnliche, komplexe Spannungsfunktion. *E. Hardtwig.*

Eubanks, R. A. and E. Sternberg: On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy. *J. rat. Mech. Analysis* 3, 89—101 (1954).

The authors prove the following theorem: Let R be a region of the (ϱ, z) -plane such that a straight line parallel to the z -axis intersects the boundary of R in at most two points. Let $F_n(\varrho, z)$ be a solution of $\prod_{i=1}^n \nabla_i^2 F_n = \nabla_1^2 \nabla_2^2 \cdots \nabla_{n-1}^2 \nabla_n^2 F_n = 0$ in R where

$$\nabla_i^2 = A + c_i^2 D_z^2; \quad A = \sum_{i=0}^r p_i(\varrho) \frac{\partial^i}{\partial \varrho^i}, \quad D_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

the c_i are (not necessarily real) constants, and the functions p_i are continuous in R with $p_r = 0$. Then F_n admits the representation, $F_n(\varrho, z) = F_{n-1}(\varrho, z) + z^m F^{(n)}(\varrho, z)$ and m ($0 \leq m \leq n-1$) is the number of the coefficients c_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) which are equal to c_n^2 . — This theorem is a generalization of the theorem of E. Almansi [*Ann. Mat. pura appl.* III. Ser. 2, 1—51 (1899)]. *R. Gran Olsson.*

Savin, G. N.: Über die dynamischen Kräfte im Aufzugsseil in einem Schacht beim Heben einer Last. *Ukrain. mat. žurn.* 6, 126—139 (1954) [Russisch].

Böleskei, E.: Die Stabilität des an zwei Punkten aufgehängten geraden Balkens. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* 8, 243—254 u. russ., engl. und französ. Zusammenfassg. 255—256 (1954).

Csonka, P.: Die Stabilität des an einem Punkt aufgehängten geraden Balkens. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* 8, 389—396 u. russ., engl. und französ. Zusammenfassg. 396—397 (1954).

Eggwertz, Sigge: Calculation of stresses in a swept multicell cantilever box beam with ribs perpendicular to the spars and comparison with test results. *Flygtekn. Försöksanstalt., Medd.* 54, 44 S. (1954).

Sonntag, Rudolf: Zum Torsionsproblem der abgesetzten Welle und anderer Wellenformen des Maschinenbaues. *Z. angew. Math. Mech.* 34, 19—36 (1954).

Odqvist, F. K. G.: Theorie der elastischen Ringe starker Krümmung. *Ingenieur-Arch.* 22, 98—107 (1954).

Weisen die Längsfasern zwischen zwei benachbarten Normalebenen eines gekrümmten Stabes zu große Längenunterschiede auf, als daß der Spannungsverlauf im Stabquerschnitt noch als linear gelten konnte, wird der Stab als stark gekrümmt angesehen. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Spannungsverteilung des stark gekrümmten, offenen oder geschlossenen Kreisringes von beliebigem Querschnitt neu aufgegriffen, teils um allgemeinere Lastsysteme als bisher einzubeziehen, teils um ein bereits früher von R. Grammel gewonnenes Ergebnis (C. B. Biezeno und R. Grammel, *Technische Dynamik*, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1953, S. 339—348) noch etwas zu erweitern. — Die Geometrie des gekrümmten Stabes vom Radius r wird in der Weise beschrieben, daß ein bewegliches Koordinatensystem eingeführt wird mit $x = r\varphi$ als Bogenlänge der Schwerpunktslinie (φ = Zentrivinkel), y in radialer Richtung positiv und z in axialer Richtung in der Weise positiv gewählt, daß (x, y, z) ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden. Um die innere Spannungsverteilung des Stabes zu ermitteln, genügt für die Ringdehnung ϵ in der x -Richtung die Bernoullische Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Der Verschiebungsvektor der Schwerpunktslinie sei mit u, v, w bezeichnet. Für die Auslenkung v der Tangente der Schwerpunktslinie aus ihrer Ebene ergibt sich $v = dw/dr d\varphi = w'/r$ und für die Ringdehnung der Schwerpunktslinie selbst $(du/r d\varphi + v/r) = (u' + v)/r$. Wenn der Stab dazu eine Drillung um den Winkel ϑ um die Schwerpunktslinie erfährt (positiv im Uhr-

zeigersinn, wenn in Richtung positiver φ , wird sich eine beliebige Ringfaser von der Länge $(r + \eta) d\varphi$ eines Flächenelements mit den Koordinaten (ξ, η) der (z, y) -Ebene um den Betrag $[(u' + v) - \xi \theta - \eta v''/r] d\varphi - \xi dy$ dehnen infolge der Verschiebung und der Winkeländerungen θ und dy . Die Bernoullische Hypothese drückt sich damit wie folgt aus: $\epsilon = [(u' + v) - \xi \theta - \eta v''/r - \xi \psi']/(r + \eta)$. Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes erhält man für die Spannung $\sigma = \epsilon E$ (E = Elastizitätsmodul) unter der Voraussetzung, daß u, v, w bekannte Funktionen von φ sind. Das gestellte Problem ist damit grundsätzlich gelöst.

R. Gran Olsson.

Rothman, M.: The problem of an infinite plate under an inclined loading, with tables of the integrals of $Ai(\pm x)$ and $Bi(\pm x)$. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 1—7 (1954).

Die Wirkung von Winddruck und Regen gegen eine große Wand führt auf das Problem der schrägen Belastung, die als konstant über die Oberfläche des Tores vorausgesetzt werden möge. Das Tor mag seinerseits als eine Rechteckplatte angenommen werden, die gewöhnlich längs zwei sich gegenüberliegenden Ränder frei unterstützt ist, während die beiden übrigen Ränder vollkommen frei sind. Die Arbeit betrachtet den einfachsten Fall, bei dem die Belastung normal zu den frei drehbaren Rändern angreift, die als unendlich lang angesehen werden. Die Belastung soll außerdem überall unter demselben Winkel zur Plattenebene wirken. Dies mag als brauchbare Annäherung für ein sehr langes Tor dienen. Das behandelte Problem ist nach Ansicht des Ref. eigentlich kein Plattenproblem, sondern vielmehr ein Balkenproblem, was schon aus der Tatsache hervorgeht, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung erhalten wird, deren Lösung durch Zylinderfunktionen mit dem Parameter $1/2$ gegeben ist. Statt dieser wird eine andere Lösung mit Hilfe der im Titel der Arbeit angeführten Funktionen $Ai(\pm x)$ und $Bi(\pm x)$ verwendet, deren Integrale in einigen der Arbeit angefügten Tabellen ausgerechnet sind.

R. Gran Olsson.

Shaw, F. S. and N. Perrone: A numerical solution for the nonlinear deflection of membranes. J. appl. Mech. 21, 117—128 (1954).

Der Spannungs- und Verformungszustand in einer dünnen Platte ohne Biegesteifigkeit (Membran) kann durch die Verschiebung $w(x, y)$ senkrecht zur Membranebene und durch eine Spannungsfunktion $F(x, y)$ beschrieben werden; diese Größen genügen nach A. Föppl 2 gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen von der 2. bzw. 4. Ordnung. Die Verf. ersetzen diese beiden Beziehungen durch ein System von 3 quasilinearen Differentialgleichungen für die Verschiebungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ und $w(x, y)$. Dieses System ist dem von den Verf. benutzten Differenzenverfahren besser angepaßt als das von A. Föppl. Um ohne allzu langwierige Rechnungen zu Näherungslösungen zu kommen, werden zunächst die Verschiebungen in der Membranebene vernachlässigt, und es wird die quasilineare Differentialgleichung für die Verschiebung $w(x, y)$ senkrecht zur Membranebene für sich (nach dem Differenzen- bzw. Relaxations-Verfahren) behandelt. Zur Kontrolle werden zuerst zwei spezielle Probleme (rechteckiger Streifen und Kreismembran) untersucht, die leicht streng gelöst werden können, falls die Belastungsintensität p konstant ist; in diesen Fällen ergibt das Differenzenverfahren ein Ergebnis, das befriedigend mit der strengen Lösung übereinstimmt. Als Hauptaufgabe wird eine rechteckige Membran mit konstanter Belastung untersucht. Auch hier wird zunächst $u = 0$ und $v = 0$ gesetzt und für $w(x, y)$ eine erste Näherung mit dem Differenzenverfahren berechnet, die dazu dient, aus den noch nicht benutzten Gleichungen verbesserte u - und v -Werte zu ermitteln. Diese Gleichungen für $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind linear. Im zweiten Zyklus der Rechnung wird nun $w(x, y)$ verbessert, wobei die im ersten Zyklus gefundenen u - und v -Werte benutzt werden. Bei dem von Verf. durchgerechneten Beispiel genügen vier Zyklen zur ausreichend genauen Lösung.

A. Weigand.

Yu, Yi-Yuan: Bending of isotropic thin plates by concentrated edge couples and forces. J. appl. Mech. 21, 129—139 (1954).

Verf. wendet die funktionentheoretische Methode von Muschelischwili auf die Berechnung dünner Kreisplatten an, die durch Randkräfte und Momente belastet sind. Für eine Reihe von Belastungsfällen (u. a. Beanspruchung durch 2 Biegemomente am Rande, durch 2 Drillmomente oder durch Schubkräfte) werden Verformung und Beanspruchung in geschlossener Form angegeben. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt.

A. Weigand.

Müller, W.: Zur Theorie der Vierpilzplatte. Ingenieur-Arch. 22, 60—72 (1954).

Verf. hat in einigen früheren Arbeiten (dies. Zbl. 49, 429; 50, 402) einige Fälle der Biegung rechteckiger Platten durchgerechnet, die in dieser Note durch die Berechnung einer Platte ergänzt werden, die von vier paarweise symmetrisch zu den Mittellinien gelegenen Einzelkräften belastet bzw. gestützt wird. Wegen der Verwandtschaft mit dem Fall der Pilzdecke werden die so gekennzeichneten Fälle unter der Bezeichnung Vierpilzplatte zusammengefaßt [vgl. F. Tölke, Ingenieur-Arch. 5, 187—237 (1934)]. Dabei wird von der Annahme rechteckiger Druck- bzw.

Stützflächen und von der Darstellung der Durchbiegung durch Doppelreihen ausgegangen, die nach V. Lewe (Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten, 2. Aufl., Berlin 1926) mit Hilfe Fourierscher Reihen aufgestellt werden können. Um diese Doppelreihen in einfache Reihen zu transformieren, werden einige allgemeine Reihenentwicklungen betrachtet, die auch für viele andere Fälle aus der Plattentheorie von Bedeutung sind. — Als Beispiele werden die aufliegende Vierpilzplatte mit der Randbedingung $M = N \text{ } lw = 0$ sowie die querkraftfrei eingespannte Vierpilzplatte durchgerechnet. Der Verlauf der Biegeflächen und der Momentenflächen ist durch Schichtenpläne dargestellt.

R. Gran Olsson.

Müller, W.: Beitrag zur Biegunstheorie der Mehrpilzplatte. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 1—10 (1954).

In einer früheren Arbeit hat Verf. die Durchbiegung einer querkraftfrei eingespannten, gleichmäßig belasteten, durch vier Säulen gestützten Rechteckplatte und die zugehörigen Momente berechnet (dies. Zbl. 49, 429). In dieser Arbeit wird eine ebensolche Platte vorausgesetzt, die gleichmäßig belastet und durch k^2 symmetrisch zu den Mittellinien der Platte angeordnete Säulen gestützt wird. Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, ob k gerade oder ungerade ist. — Nach Umformung der Ausdrücke für die Durchbiegung in einfache Reihen werden die Biegemomente, insbesondere die Momentensumme, dargestellt. Die angegebenen Formeln umfassen eine große Zahl von Sondertallen, die teilweise bereits früher vom Verf. untersucht wurden. Für eine Ergänzung der in dieser Arbeit gegebenen Untersuchung der Biegemomente, bei deren Darstellung in erster Linie die Theorie der Thetafunktionen benutzt wurde, muß auf frühere Arbeiten des Verf. hingewiesen werden (dies. Zbl. 49, 429; 50, 402 und vorsteh. Referat).

R. Gran Olsson.

Müller, Wilhelm: Über die Darstellung der Durchbiegung von rechteckigen Platten durch Integrale der ϑ -Logarithmen. Z. angew. Math. Mech. 34, 12—18 (1954).

Verf. hat in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 47, 429; 50, 402) mehrere sehr bemerkenswerte Belastungsfälle von Rechteckplatten und Pilzdecken formelmäßig und numerisch untersucht. Insbesondere wurde der Fall der durchlaufenden Pilzplatte mit punktförmigen Stützflächen auf die Benutzung von Thetafunktionen zurückgeführt. Indem Verf. von der Momentensumme der Platte ausgeht, die der Differentialgleichung der Membran genügt und sich in ihrem wesentlichen Bestandteil durch den Logarithmus der Thetafunktionen darstellen läßt, gelingt es unter Benutzung der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und der konjugiert komplexen Größe $\bar{z} = x - iy$ durch zweimalige Integration die in der Hauptsache biharmonische Funktion für die Durchbiegung zu gewinnen. Verf. gelangt dabei zwangsläufig zu einigen neuen komplexen Reihendarstellungen, die in der Arbeit genauer untersucht werden. — Als Beispiel wird die Durchbiegung der durch eine Einzellast an beliebiger Stelle beanspruchten Rechteckplatte besprochen. Wie Verf. bemerkt, dürfte es nach derselben Methode möglich sein, die Fälle der Belastung einer Platte durch eine Rechteckfläche sowie einer Fundament- oder Pilzplatte mit rechteckigen Last- oder Stützflächen darzustellen. — Mit den in dieser Arbeit benutzten verwandte, im wesentlichen reelle Reihen kommen bei W. Wirtinger [Acta math. 26, 255—271 (1902)] sowie bei H. Jeffreys und B. S. Jeffreys [Methods of mathematical Physics, (Cambridge 1946, 359)] vor, worauf Verf. ausdrücklich hinweist.

R. Gran Olsson.

Radok, J. R. M.: General instability of simply supported rectangular plates. J. aeronaut. Sci. 21, 109—116 (1954).

Verf. leitet die Knickbedingungen kreuzweise versteifter rechteckiger Platten ab, die an den Randern gestützt sind und parallel einer Rechteckseite gedrückt werden. Die Wirkung der Versteifungen, deren Torsionssteifigkeit vernachlässigt wird, wird als linienförmige Querbelastrung der Platte in die Rechnung eingeführt. Der Wert einer in der Knickdeterminante vorkommenden unendlichen Reihe läßt sich in geschlossener Form angeben, wenn die Versteifungen nur in einer Richtung verlaufen; dadurch reduziert sich die ursprünglich auftretende unendliche Determinante auf eine endliche. Bei kreuzweiser Versteifung gelingt eine solche Vereinfachung nicht. Die Ergebnisse werden nicht numerisch ausgewertet. A. Weigand.

Krettner, J.: Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Ingenieur-Arch. 22, 47—54 (1954).

Zur Berechnung schiefwinkliger Platten sind zwei verschiedene Methoden benutzt worden. Entweder verwendet man rechtwinklige Koordinaten, wobei man wegen der schiefen Berandung verwickelte Randbedingungen erhält, wenn man nicht beispielsweise elliptische Funktionen zu Hilfe nehmen will, die in kartesischen Koordinaten bekanntlich eine schiefe Periodizität haben. Oder man führt schiefwinkliger, dem Problem angepaßte Koordinaten ein, wobei in der auf schiefwinkliger Koordinaten transformierten Differentialgleichung gewisse zusätzliche Glieder auf-

treten, die wieder rechnerische Schwierigkeiten mit sich bringen. Der letztere Weg wurde von H. Favre [Schweiz. Bauzeitg. **60**, 35—36, 51—54, 60 (1942), sowie Bull. Techn. Suisse Romane **72**, 321—324 (1946)] und P. Lardy [Schweiz. Bauzeitg. **67**, 207—209, 419—422 (1949)] eingeschlagen. In Anknüpfung an die Ausführung des Verf. über die Darstellung der Tensoren (dies. Zbl. **50**, 187; **50**, 399; **51**, 162) in allgemeinen Koordinaten gelingt es, die auftretenden Doppelreihen für die Durchbiegung in einfache, gut konvergierende Reihen zu transformieren. In der Arbeit wird als Beispiel die momentenfrei gelagerte, schiefwinklige Platte mit konstanter Belastung durchgerechnet.

R. Gran Olsson.

Tremmel E.: Zur Theorie kreisberandeter Bogenseiben. Österreich. Ingenieur-Arch. **8**, 11—38 (1954).

Verf. untersucht verschiedene einfache Belastungsfälle für die geschlitzte Kreisringscheibe und die Sektoringsscheibe mit veränderlicher Breite. Als zweckmäßiges Koordinatensystem werden nach dem Beispiel von G. B. Jeffery [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **221**, 265—294 (1921)] Bipolarkoordinaten eingeführt und deren geometrische Eigenschaften ausführlich erörtert. Ebenso werden die Gleichgewichtsbedingungen und die elastischen Grundgleichungen in diesen Koordinaten abgeleitet. Als Beispiel werden Spannungsverteilung und Formänderungen einer eingespannten, hydrostatisch belasteten Gewölbemelle näherungsweise ermittelt. In einem numerischen Beispiel werden die Ergebnisse mit denjenigen der üblichen statischen Berechnung verglichen. Die Unterschiede in den Ergebnissen sind bei der im Rechenbeispiel gewählten verhältnismäßig geringen Exzentrizität nicht sehr groß. Infolge der günstigen Lage der Resultanten dürften die Spannungen an den Widerlagern in Wirklichkeit erheblich geringer sein, als es nach der üblichen baustatischen Berechnung erwartet werden darf. Die für den Scheitel auf die Bogenachse bezogene Radialverschiebung liegt innerhalb der für die beiden Randpunkte auf elastizitätstheoretischem Wege ermittelten Verschiebungen, wie es auch sein muß.

R. Gran Olsson.

Harvey, R. B.: The elastic deformations of a plate near a hole with a stiffening rim. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **223**, 338—348 (1954).

Elastic problems in generalized plane stress in which boundary values are given on a simple closed contour are usually most simply solved in terms of potentials by a conformal transformation of the boundary on to a circle. Such solutions are given by I. N. Muschelisvili (this Zbl. **7**, 209; **5**, 358) and A. C. Stevenson [Philos. Mag., VII. Ser. **33**, 639—661 (1942), **34**, 766—793 (1943), Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **184**, 129—179, 218—229 (1945)]. The case of a multiply connected region with unstressed boundaries and a constant stress variant has been discussed by C. Arf (this Zbl. **47**, 430). The author of the present paper uses the complex potential method for a problem involving two simple closed contours which are everywhere close together. — A solution of the equations of generalized plane stress is obtained for the problem of a plate under tension, and with a hole bounded by a curve C_1 when a rim of material of different thickness is between C_1 and an inner curve C_2 . The equations are solvable exactly for a circular hole, and the method is applied to find a first approximation to the complex potentials when the curve C_1 is an ellipse or a curvilinear rectangle.

R. Gran Olsson.

Conway, H. D.: Stress concentration due to elliptical holes in orthotropic plates. J. appl. Mech. **21**, 42—44 (1954).

Rüdiger, D.: Ein Beitrag zum Randstörungsproblem isotroper Kreiszylinderschalen. Ingenieur-Arch. **22**, 160—162 (1954).

Die Theorie der isotropen, kreiszylindrischen Tonnenschalen ist 1952 von W. Zerna behandelt worden: der Spannungs- und Verschiebungszustand einer solchen Schale zwischen zwei Binderscheiben wurde aus einer Spannungsfunktion hergeleitet, die einer Differentialgleichung vierter Ordnung genügt. Die zur Lösung der Randaufgabe erforderlichen Schnittkraft- und Verschiebungsgleichungen werden nun vom Verf. auf zweckmäßige Formen gebracht, wobei es um die Integration einer Differentialgleichung 8. Ordnung (vierfach iterierter Laplace-Ausdruck) geht.

E. Hardtwig.

Naghdi, P. M. and J. G. Berry: On the equations of motion of cylindrical shells. J. appl. Mech. **21**, 160—166 (1954).

Die klassische Theorie der dünnen Schalen beruht auf folgenden Annahmen: 1. Die Schalendicke h ist klein im Vergleich zum kleinsten Krümmungsradius der Mittelfläche; 2. Spannungen und Verrückungen sind so klein, daß Glieder zweiter und höherer Ordnung neben solchen erster Ordnung in den Ausdrücken für die Spannungen vernachlässigt werden dürfen; 3. die Druckkomponente normal zur Mittelfläche ist klein neben andern Normalkomponenten und darf in der Spannungs-Deformations-Beziehung vernachlässigt werden; die Flächennormalen zur unverformten Mittelfläche bleiben Flächennormalen auch nach der Verformung. Die beiden

letzten Annahmen schließen die Vernachlässigung der Scherungskomponente ein. Aus diesen Annahmen werden drei unpaarige Verrückungsgleichungen abgeleitet, indem die Wirkung der Glieder mit Rotationsträgheit vernachlässigt werden. Die entstehenden Gleichungen sind sehr umständlich. Die gefundenen Ergebnisse werden mit solchen anderer Autoren verglichen.

E. Hardtwig.

Federhofer, K.: Knicklast der axial gedrückten Kreiszylinderschale bei Vorhandensein eines entlang des Zylindermantels veränderlichen elastischen Widerstandes. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 90—97 (1954).

In einem ersten Abschnitt wird die Differentialgleichung des Stabilitätsproblems für die in ein elastisches Medium gebettete Zylinderschale abgeleitet. Die Bettungsziffer c ist von der achsenparallelen Längskoordinate abhängig. Die Differentialgleichung ist von der vierten Ordnung und i. a. nicht elementar integrierbar (die abhängige Variable geht über c in den Faktor der unbekannten Funktion w = Achsialverrückung ein). Als erster Sonderfall wird konstantes c angenommen, die Dgl. wird elementar integriert, im Ausdruck für die kleinste Knicklast wird der Einfluß der Bettung als Summand unter einer Wurzel sichtbar. Der zweite Fall behandelt variable Bettung (z. B. in den Boden gerammte Hohlzylinderpfähle) durch ein Näherungsverfahren, wobei der Fall $c = \text{const}$ als erster Näherungsansatz verwendet wird. Sonderfall: lineare Zunahme der Bettungsziffer c . Als letztes wird die unsymmetrische Ausbeulung behandelt. Der Einfluß der Bettung besteht, wie von vornherein zu erwarten, in einer Erhöhung der Knicklast.

E. Hardtwig.

Kirste, L.: Abwickelbare Verformung dünnwandiger Kreiszyylinder. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 149—151 (1954).

Junger, Miguel C.: Dynamic behavior of reinforced cylindrical shells in a vacuum and in a fluid. J. appl. Mech. 21, 35—41 (1954).

Nash, William A.: Buckling of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure. J. aeronaut. Sci. 21, 354—355 (1954).

Langhaar, H. L. and D. R. Carver: On the strain energy of shells. J. appl. Mech. 21, 81—82 (1954).

Horvay, G. and J. M. Clausen jr.: Stresses and deformations of flanged shells. J. appl. Mech. 21, 109—116 (1954).

Hardiman, N. Jessie: Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 226—230 (1954).

Es wird der Spannungszustand in einer unendlichen Scheibe untersucht, die einen elliptischen Einschuß besitzt, dessen Material von dem der übrigen Scheibe verschieden ist. Die in der komplexen z -Ebene gelegene Scheibe wird zunächst so auf eine ζ -Ebene konform abgebildet, daß der elliptische Rand des Einschlusses in einen Kreis übergeht. Durch diese Abbildung gelingt es, die Aufgabe in geschlossener Form zu lösen. Für einige Sonderfälle der Belastung (z. B. allseitiger Zug im Unendlichen) werden die in der Lösung auftretenden Konstanten angegeben.

A. Weigand.

Mitchell, L. H.: A Fourier integral solution for the stresses in a semi-infinite strip. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 51—56 (1954).

In dieser Arbeit werden Fouriersche Integrale verwendet, um die Spannungen in einem unendlichen Halbstreifen zu ermitteln, wobei die Randbedingungen durch die Spannungen vorgeschrieben sind. Die Übereinstimmung zwischen der theoretischen Lösung und spannungsoptischen Untersuchungen wird als befriedigend angesehen. R. C. Howland [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 124, 89—119 (1929)] und H. G. Hopkins (dies. Zbl. 35, 254) haben ebenfalls Fouriersche Integrale bei der Lösung von verallgemeinerten Problemen des ebenen Spannungszustandes im unendlichen Halbstreifen bei verschiedenen Randbedingungen verwendet. Während die Arbeit von Howland auf alle Fälle begrenzt bleibt, wo die Spannungen längs der Ränder vorgeschrieben sind, untersucht Hopkins den Fall gemischter Randbedingungen. Unter Hinzufügung weiterer Glieder zu den Fourierschen Integralen der von Howland angegebenen Spannungsfunktion wird in dieser Arbeit bewiesen, daß die Randbedingungen des unendlichen Halbstreifens identisch befriedigt werden, wenn sie durch die Spannungen ausgedrückt sind.

R. Gran Olsson.

Mossakovskij, V. I. und P. A. Zagubiženko: Über eine gemischte Aufgabe der Elastizitätstheorie für die durch einen geradlinigen Spalt geschwächte Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 409—412 (1954) [Russisch].

Eine durch einen schmalen Spalt von endlicher Länge geschwächte Platte sei in ihrer Ebene einem gleichförmigen, beliebig gerichteten Druck ausgesetzt. Wie die Beobachtung zeigt, treten dann die beiden Ufer des Spaltes in seinem mittleren Teile miteinander in Berührung, während an den beiden Enden der Spalt offen bleibt. Das betreffende ebene Gleichgewichtsproblem wird vom Verf. durch Einführung zweier analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach der Methode von Muschelišvili behandelt, wobei die Reibung längs der Kontaktgeraden vernachlässigt wird. Die Berücksichtigung aller nunmehr vorliegenden gemischten Randbedingungen führt dann auf eine singuläre Integralgleichung, deren Auflösung neben der gesuchten Spannungsverteilung auch die Länge der Berührungsgersten im mittleren Teile des Spaltes liefert.

S. Woinowsky-Krieger.

Sen, Bibhutibhusan: Note on two-dimensional indentation problems of a non-isotropic semi-infinite elastic medium. *Z. angew. Math. Phys.* 5, 83—86 (1954).

Reismann, Herbert: Bending of circular and ring-shaped plates on an elastic foundation. *J. appl. Mech.* 21, 45—51 (1954).

Untersucht werden Kreis- und Kreisringplatten auf elastischer Unterlage bei beliebiger Belastung. Der Berechnung wird die Winklersche Annahme zugrunde gelegt, daß der Bettungsdruck an einer bestimmten Stelle proportional der dort auftretenden Durchbiegung der Platte ist. Die allgemeinen Ergebnisse werden an zwei Beispielen (eingespannte Kreisplatte mit Einzellast und unendliche Platte mit starrem, kreisförmigem Kern, auf den ein Biegemoment wirkt) erläutert.

A. Weigand.

Bogdanoff, J. L.: Note on thermal stresses. *J. appl. Mech.* 21, 88 (1954).

In einer kurzen Notiz wird gezeigt, daß zur Lösung ebener, stationärer Wärmespannungsprobleme mit Vorteil von komplexen Potentialen Gebrauch gemacht werden kann. Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiel erläutert.

W. Wuest.

Melan, E.: Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 165—170 (1954).

Es werden die Spannungen, die in einer Kreisscheibe infolge eines mit gleichmäßiger Geschwindigkeit rotierenden Temperaturfeldes entstehen, bestimmt.

Autoreferat.

Chang, Chieh-Chien and Wen-Hwa Chu: Stresses in a metal tube under both high radial temperature variations and internal pressure. *J. appl. Mech.* 21, 101—108 (1954).

Pohle, Frederick V. and Henry Oliver: Temperature distribution and thermal stresses in a model of a supersonic wing. *J. aeronaut. Sci.* 21, 8—16 (1954).

Signorini, A.: Über eine Erweiterung der linearisierten Theorie der Elastizität. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 47—53 (1954).

Die klassischen Theoreme der linearen Elastizitätstheorie werden im allgemeinen unter der Annahme abgeleitet, daß ein spannungsfreier Zustand im betreffenden Körper vorhanden sei. In dieser Arbeit zeigt Verf., wie man eine solche Einschränkung durch die Anwendung gewisser Ergebnisse von sehr allgemeinem Charakter über die umkehrbaren Transformationen von kontinuierlichen Systemen fallen lassen kann. Die vom Verf. abgeleiteten Beziehungen unterscheiden sich von den entsprechenden Beziehungen der klassischen Theorie nur dadurch, daß an Stelle einer quadratischen Form in sechs Veränderlichen eine quadratische Form in neun Variablen entsteht. Wenn man daher die gebräuchlichen Beweise für die einzelnen klassischen Theoreme wieder aufnimmt, gelangt man zwangsläufig zu der Erkenntnis, daß die Aussagen beim Übergang von der klassischen zu der umfassendsten linearisierten Theorie keinerlei Änderungen unterworfen sind.

R. Gran Olsson.

Jindra, F.: Einige Anwendungen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes. Ingenieur-Arch. 22, 121—144 (1954).

Das von H. Kauderer aufgestellte nicht-lineare Elastizitätsgesetz (dies. Zbl. 35, 404) wird auf einige Probleme der Elastomechanik angewendet, wobei die Kompressions- und Schubfunktion der Einfachheit halber auf die ersten Glieder der diese Funktionen darstellenden Reihenentwicklungen beschränkt wird. Der ebene Spannungszustand wird mit der Airyschen Spannungsfunktion behandelt; die sich ergebende quasilineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung läßt sich in einigen Fällen exakt lösen. Die Balkenbiegung durch Einzelkraft als ebenes Problem wird durch Reihenentwicklung unter Beibehaltung der Glieder 2. Ordnung näherungsweise gelöst, was schon umfangreiche Rechnungen erfordert. Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion in Polarkoordinaten dient mittels Reihenansatzes zur Berechnung der Span-

nungsverteilung in der Kreisscheibe unter Außendruck und des ebenen unendlichen Keils mit Moment an der Spitze, ferner der rotierenden Scheibe gleicher Festigkeit resp. gleicher Dicke und der Torsion des Rotationskörpers, wobei der Kreiskegel mit der Methode des Minimums der Fehlerquadrate behandelt wird. — In den vom Verf. gegebenen Zahlenbeispielen macht sich die Nichtlinearität des Formänderungsgesetzes dann besonders bemerkbar, wenn das Problem nur von der Schubfunktion abhängt; ferner findet in seinen Beispielen schon bei kleiner Abweichung von der Linearität ein Abbau der Spannungsspitzen statt, was als allgemeines Theorem für die Technik bedeutsam sein kann.

R. Moufang.

Glatzel, E. und H. Schlechtweg: Zum Problem des ebenen Spannungszustandes im kreiszylindrischen spröden Rohr unter konstantem Innen- und Außendruck. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 81—104 (1954).

In einer früheren Arbeit [*Z. angew. Math. Mech.* **14**, 1—14 (1934)] hat H. Schlechtweg folgendes für allgemeine Spannungszustände beliebiger, homogen isotroper, spröder Körper aufgestellte Verformungsgesetz mitgeteilt und begründet:

$$\hat{\varepsilon} = (1 - 2\mu) E^{-1} \mathfrak{P}, \quad \hat{\varepsilon} = (1 - \mu) E^{-1} \mathfrak{P} \left[1 - B |\mathfrak{P}| - C \left(\overline{\mathfrak{P}}^2 + L \right) \left(\mathfrak{P}^2 \right)^2 |\mathfrak{P}| \right]^{-1},$$

wobei $\hat{\varepsilon}$ der Deformationstensor, \mathfrak{P} der Spannungstensor; das $\overline{}$ Zeichen bedeutet die Bildung der „Spur“, der Strich (—) die Bildung des Deviators, E und μ sind Materialkonstanten, die dem Elastizitätsmodul bzw. der Querdehnungszahl der Elastizitätstheorie entsprechen, während B , C und L weitere dimensionslose Materialkonstanten bedeuten. In der vorliegenden Arbeit wird das Elastizitätsgesetz von Schlechtweg kurz erläutert und der Hauptwert auf die Gültigkeitsgrenzen gelegt. — Unter Benutzung dieses Verformungsgesetzes wird im ersten Teil der Arbeit die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Radialspannung σ_r aufgestellt und näherungsweise mit ungefährender Fehlerabschätzung für die Fälle, in denen $\sigma_q/\sigma_r < -1$ bzw. $\sigma_q/\sigma_r > 2$ (σ_q = Tangentialspannung) integriert. Im zweiten Teil bedienen sich Verff. einer Lösungsmethode, die von der Differentialgleichung — ebenfalls zweiter Ordnung — für die Radialverschiebung ausgeht, zu deren Aufstellung das angewandte Verformungsgesetz näherungsweise nach dem Spannungstensor aufgelöst wird. Für diese Differentialgleichung wird ebenfalls eine Näherungslösung angegeben und die Integrationsbeiwerte aus den Randbedingungen ermittelt. Nach der eingehenden Diskussion zu urteilen, scheinen die erhaltenen Lösungen und Ergebnisse gesichert.

R. Gran Olsson.

Föppl, Ludwig: Beitrag zur Elastizitätstheorie bei großen Formänderungen. *S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **1953**, 57—62 (1954).

Ericksen, J. L. and R. S. Rivlin: Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials. *J. rat. Mech. Analysis* **3**, 281—301 (1954).

Die Beschränkung der Beanspruchungen für einen anfänglich homogenen elastischen Stoff infolge Symmetriebedingungen ist bislang nur für isotrope Stoffe behandelt worden und wird nun für den Fall transversaler Isotropie untersucht. Als einfache Anwendungsbeispiele mit Deformation inkompressibler Medien werden gegeben: Moment und Normalzug an der Stirnfläche eines Kreiszylinders bei gleichzeitiger Streckung und Torsion; Normalkraft an der Stirnfläche eines Hohlzylinders bei gleichzeitigem Aufblasen und Dehnen; Normalkraft auf die ebene Schnittfläche eines Zylinders, der durch Deformation aus einem andern dadurch entsteht, daß nach Herausschneiden eines Keiles aus dem ursprünglichen Zylinder (zwischen den Ebenen $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$) die freien Längsflächen so zusammengefügt werden, daß wieder ein Vollzylinder entsteht.

J. Pretsch.

Adkins, J. E.: Some generalizations of the shear problem for isotropic incompressible materials. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 334—345 (1954).

Bei der mathematischen Behandlung der endlichen elastischen Verformung für isotrope, unzusammendrückbare Stoffe kann eine Reihe von Beziehungen erhalten werden, die im allgemeinsten Falle vier partielle Differentialgleichungen für vier unbekannte Funktionen darstellen. Für diese können passend die drei Komponenten der Verschiebung eines Punktes und ein willkürlicher Parameter gewählt werden, der mit der Bedingung der Unzusammendrückbarkeit zusammenhängt. Hier werden einige Fälle behandelt, in denen eine wesentliche Vereinfachung möglich ist, z. B. wenn die Dehnungs-Energie-Funktion eine lineare Funktion der beiden Invarianten J_1, J_2 des Dehnungstensors ist (Mooney-Material). Im einzelnen werden behandelt: die ebene Scherung und die Bewegung im zylindrischen und im elliptischen Ring. *Th. Pöschl.*

Green, A. E. and E. B. Spratt: Second order effects in the deformation of elastic bodies. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **224**, 347—361 (1954).

Es werden allgemeine Gleichungen für die Lösung von Problemen mit endlichen elastischen Verformungen aufgestellt und mittels sukzessiver Approximationen gelöst, wobei sich die Bezeichnungen der Tensorrechnung als besonders geeignet erweisen. Sowohl in den Ansätzen für inkompressible als auch für kompressible Stoffe werden die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt. Ausführlich wird die Torsion von Drehkörpern aus unzusammendrückbarem Material behandelt und für den Drehkegel vollständig gelöst.

Th. Pöschl.

Thomas, T. Y.: Determination of the plastic yield condition as a variational problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 322—331 (1954).

G. R. Irwin hat angeregt, die plastische Strömung dadurch zu kennzeichnen, daß ein gewisses Energieintegral über dem Strömungsgebiet zum Minimum gemacht wird. Wenn das Integral einer beliebigen differenzierbaren Funktion ψ der Komponenten der Deviationstensoren s und η über dem plastischen Bereich einen stationären Wert haben soll, so kann ψ höchstens von der Spur des Tensors η abhängen, d. h. in bezug auf η konstant sein.

J. Pretsch.

Craggs, J. W.: Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 35—39 (1954).

Starr-plastisches Material genüge der Mises-Henckyschen Fließbedingung F und dem Lévy-Mises'schen Zusammenhang Z zwischen Fließgeschwindigkeit v und Spannungsdeviator \mathfrak{P} . Eine Fläche S im Raum heißt charakteristische Fläche, wenn durch die Werte von v und \mathfrak{P} längs S nicht alle Ableitungen senkrecht zu S vermöge F , Z , Gleichgewichtsbedingungen und Kontinuitätsbedingung festgelegt werden. S ist genau dann charakteristisch, wenn in jedem Punkte von S $\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} = \sigma_{xy} = 0$ gilt für ein kartesisches Koordinatensystem, in dem die x - y -Ebene die Tangentialebene an S ist. Ein charakteristisches S vermag den plastischen Bereich vom starren zu trennen. — Die starr-plastischen Grundgleichungen werden für den Fall gelöst, daß v und \mathfrak{P} in Polarkoordinaten r, φ, θ nur vom Polarwinkel θ abhängen. Es wird $2u = -(v' + v \cotg \theta)$ mit $v = \{A + B \cdot f(\theta)\} \cdot \sin \theta$, wobei $\ln f(\theta)$ ein elliptisches Integral ist. Diese Lösung ist gültig für $\theta \geq \alpha > 0$; der Kegel $\theta = \alpha$ ist eine charakteristische Fläche. Durch geeignete Wahl der Konstanten A und B wird $v(\theta = \theta_1 \geq \pi/2) = 0$, so daß es sich um Fließen außerhalb eines Kegels des halben Öffnungswinkels $\pi - \theta_1$ handelt. Dabei ist $\theta \leq \alpha$ der starre Bereich, für den sich die Geschwindigkeit aus der Bedingung des stetigen Überganges der Normalkomponente von v bei $\theta = \alpha$ ergibt. — Explizite Durchrechnung für $\alpha = \pi/6, \theta = \pi/2$ mit Tabelle von v und Diagramm der Stromlinien.

H. Richter.

Thomas, T. Y.: On the rotation of grid lines produced by the formation of plastic bands in tensor tests. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 401—407 (1954).

Es wird die Drehung der bei der Zugbelastung eines flachen Probestabes entstehenden plastischen Gleitlinien betrachtet und deren Neigung gegen die Zugrichtung in Abhängigkeit von der aufgebrauchten Zugkraft berechnet. Bei der Untersuchung wird die von v. Mises aufgestellte Fließbedingung für kompressibles Material zugrunde gelegt. Der Vergleich mit ausgeführten Messungen zeigt eine gute Übereinstimmung.

Th. Pöschl.

Bechert, H.: Die Berechnung der Kräfteumlagerungen bei einem einfach symmetrischen, in mehreren Lagern vorgespannten Betonbalken infolge Kriechen und Schwinden des Betons. Ingenieur-Arch. 22, 211—214 (1954).

Moskvitin, V. V.: Zur Frage der elasto-plastischen Verbiegung eines Balkens. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 33—40 (1954) [Russisch].

Moskvitin, V. V.: Die elasto-plastische Torsion eines Stabes mit Anfangsspannung. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. eststv. Nauk Nr. 4), 47—58 (1954) [Russisch].

Manukjan, M. M.: Der Spannungszustand in Eisenbetonelementen unter Druck bei Berücksichtigung des nicht-linearen Kriechens des Betons. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. est st. techn. Nauki 7, Nr. 1, 59—68 (1954) [Russisch].

Leaderman, Herbert: Approximations in linear viscoelasticity theory: Delta function approximations. J. appl. Phys. 25, 294—296 (1954).

Es werden die Beziehungen zu gewissen Näherungen untersucht, die kürzlich

in Verbindung mit dem visco-elastischen Verhalten von gewissen amorphen Polymeren vorgeschlagen wurden und die als „Delta-Funktions-Näherungen“ bezeichnet werden. Ferner wird gezeigt, daß diese Näherungen mit leichten Abänderungen auch auf andere Typen von linearer Eigenart anwendbar sind, z. B. auf das dielektrische Verhalten.

Th. Pöschl.

Radok, Jens Reiner Maria und Alfred Heller: Die exakte Lösung der Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 50—66 (1954).

Die bekannte Differentialgleichung vierter Ordnung für einen schwingenden Balken kann unter Benutzung der üblichen Randbedingungen in eine lineare Integro-differentialgleichung umgeformt werden. Macht man dann für die Schwingungen den Exponentialansatz, so erhält man eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art. Deren symmetrischer Kern wird durch einen ausgearteten approximiert, worauf die Lösung durch Potenzreihen möglich ist. Beispiele.

G. Hamel.

Jones, R. P. N.: The wave method for solving flexural vibration problems. *J. appl. Mech.* **21**, 75—80 (1954).

Verf. löst zunächst mittels der Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen das Schwingungsproblem für den gestützten Stab, auf den in der Mitte zur Zeit $t = 0$ eine konstante Kraft zu wirken beginnt, und für den eingespannten Stab, an dessen freiem Ende zur Zeit $t = 0$ eine konstante Kraft wirkt. Dieselben Aufgaben werden dann mittels der Laplace-Transformation gelöst, außerdem ein ähnliches Einschaltproblem für den unendlich langen Stab. Der Einfluß der Schubspannungen und der rotatorischen Trägheit der Stabquerschnitte wird nicht berücksichtigt. Es zeigt sich, daß für den Beginn des Einschaltvorganges ($t \leq 0,1 \cdot \text{Dauer der Grundschwingung}$) die mittels der Laplace-Transformation gewonnene Lösung besser konvergiert als die Entwicklung nach Eigenfunktionen. Das Ergebnis von Messungen stimmt in groben Zügen mit dem der Rechnung überein, (s. d. beigefügten Abbildungen).

A. Weigand.

Bleich, H. H. and M. L. Baron: Free and forced vibrations of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium. *J. appl. Mech.* **21**, 167—177 (1954).

Baron, M. L. and H. H. Bleich: Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. *J. appl. Mech.* **21**, 178—184 (1954).

Jung, E.: Ein Beitrag zur Dynamik der Drahtseile. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 66—68 (1954).

Ein Drahtseil, das über eine Welle läuft, um eine Last zu heben, wird leicht in elastische Schwingungen geraten. Verf. behandelt solche unter der Annahme, daß das Seil zwar isotrop und homogen sei, aber nicht mehr dem Hookeschen Gesetz genügt. Statt dessen wird ein bestimmter nichtlinearer Ansatz durchgeführt. Er führt auf eine nicht ganz einfache nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die angenähert gelöst wird. Bei stärksten Vernachlässigungen wird die Gleichung linear, homogen und bekommt konstante Koeffizienten, kann also elementar integriert werden. Eine bessere Näherung wird dann nach dem bekannten Verfahren der Störungsrechnung erreicht. Ein Zahlenbeispiel.

G. Hamel.

O'Leary, Austin J.: Elementary derivation of equations for wave speeds. *Amer. J. Phys.* **22**, 327—334 (1954).

Maue, A.-W.: Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 1—12 (1954).

Der Grund der Schwierigkeiten bei der Lösung von Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie bei zeitlich veränderlichen Randbedingungen liegt im Auftreten zweier verschiedener Schallgeschwindigkeiten, die sich zwar im Innern unabhängig voneinander ausbreiten, aber durch die Randbedingungen miteinander gekoppelt sind; dies führt dazu, daß ein Schwingungsvorgang i. a. beide Wellentypen gleichzeitig enthält. In dieser Note wird für ein spezielles zweidimensionales Rand- und Anfangswertproblem die analytisch vollständige, strenge Lösung gewonnen. Sie wird durch Einführung von Polarkoordinaten mittels des d'Alembertschen Ansatzes erhalten, der auf eine Integralgleichung führt, die mit funktionentheoretischen Methoden behandelt wird.

Th. Pöschl.

Kristesku (Cristescu), N.: Über Belastungs- und Entlastungswellen, die bei der Bewegung eines elastischen oder plastischen biegsamen Fadens entstehen. Priklad. Mat. Mech. 18, 257—264 (1954) [Russisch].

Die Arbeit besteht aus drei Paragraphen. In § 1 werden mittels der Charakteristikenmethode transversale und longitudinale Wellen betrachtet, die sich in einem biegsamen (elastischen oder plastischen) Faden fortpflanzen. Die Spannung wird als gegebene Funktion der (relativen) Dehnung vorausgesetzt; diese Funktion wird in den folgenden Paragraphen untersucht. In § 2 werden die Bewegungen eines halbinendlichen Fadens betrachtet. Eine Kraft wirkt auf das Ende des Fadens so, daß das Material zum Teil die Elastizitätsgrenze überschreitet. Die Belastungs- und Entlastungswellen werden unter der Annahme idealer Plastizität untersucht. Die Entlastung setzen wir als linear voraus. § 3 ist derselben Aufgabe im Falle linearer Verfestigung gewidmet.

Autoreferat.

Deresiewicz, H.: Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple. J. app. Mech. 21, 52—56 (1954).

Hydrodynamik:

Pestel, E.: Beitrag zur Ermittlung der hydrodynamischen Dämpfungs- und Federeigenschaften von Gleitlagern. Ingenieur-Arch. 22, 147—155 (1954).

Naylor, V. D.: The stream function and the velocity potential function. Math. Gaz. 38, 30—34 (1954).

Bei der ebenen Strömung müssen die Stromfunktion ψ und die Potentialfunktion Φ bekanntlich der Laplaceschen Gleichung $\Delta\psi = 0$ bzw. $\Delta\Phi = 0$ genügen, womit Lösungen erhalten werden, die den Bedürfnissen der in Betracht gezogenen speziellen Probleme angepaßt werden können. Nach Ansicht des Verf. wird die Verbindung zwischen ψ und Φ nicht genügend klar hervorgehoben. Besonders scheint dies beim Übergang von inkompressibler zu kompressibler Strömung der Fall zu sein. In der vorliegenden Note wird ein Versuch unternommen, den Zusammenhang zwischen ψ und Φ klarzustellen.

R. Gran Olsson.

Williams, J.: Hydrodynamic forces on obstacles due to line sources. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 11—27 (1954).

The total force $F = - \int_B p n ds$ on the surface B of a body which is immersed in a steady, irrotational flow of incompressible fluid, can be expressed by an integral over a surface S enclosing the body, $\int_S T ds$, where $T = q(n \cdot q) - \frac{1}{2} q^2 n$. q is the velocity vector and n the surface normal pointing into the flow. When the velocity potential is determined by a finite number of point singularities (sources, sinks and doublets), the integral can be evaluated explicitly in terms of a sum of integrals of T , over small spheres around the point singularities. Because of $q = O(r^{-2})$ in this case, the integration around the infinity contributes nothing to F . In the present paper a line singularity of finite length $0 \leq x \leq a$ is considered. The problem is to compute the integral $\int T ds$ around the segment $(0, a)$, and to give the effect from the infinity, assuming that the velocity potential due to all other effects excluding the line distribution is given. The author evaluates the integral by determining the limit value, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of $\int T ds$ over the cylindrical surface $y^2 + z^2 = \varepsilon^2$, $0 \leq x \leq a$, and over the two caps (half-spheres) attached at the two ends of the cylinder. An expression is also found for the moment G_0 of the force on the obstacle, taken about the origin. The effect of integration around the infinity is explained. The results are applied to determine the force on, and mutual interference of airship forms in a uniform stream.

Y. W. Chen.

Stewartson, K.: On the free motion of an ellipsoid in a rotating fluid. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 231—246 (1954).

Während in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 46, 184; 50, 193) Verf. die Strömungen um langsam durch eine rotierende Flüssigkeit bewegte Ellipsoide betrachtete, werden hier die „freien“ Bewegungen von Rotationsellipsoiden in rotierenden Flüssigkeiten nach kleinen Störungen untersucht. Die mathematischen Methoden sind dieselben wie dort; sie führen auf eine Reihe bemerkenswerter Ergebnisse, die alle auf einer einfachen Versuchsanlage überprüft wurden. Die Übereinstimmung war, zumindest qualitativ, stets gut. Unter der Wirkung der Schwerkraft soll z. B. die Endsinkgeschwindigkeit von Körpern in genügend schnell rotierenden Flüssigkeiten wesentlich geringer sein als in ruhenden Flüssigkeiten, falls die Dichten von Körper und Flüssigkeit wenig differieren (sinkende Blätter in umgerührtem Tee!). Für zur Rotationsachse der

Flüssigkeit senkrechte Auslenkungen spielt außer dem Dichteverhältnis eine wesentliche Rolle, b) die Ellipsoide abgeplattet oder verlängert sind. Abgeplattete Ellipsoide sind gegen Rotationsstörungen in stabilem Zustand, falls sie spezifisch schwerer, verlängerte dagegen, falls sie leichter als die Flüssigkeit sind; die Symmetrieachse soll hierbei in der Rotationsachse liegen. *H. Wundt.*

Plesset, M. S.: On the stability of fluid flows with spherical symmetry. *J. appl. Phys.* **25**, 96—98 (1954).

Verf. geht aus von G. I. Taylors Untersuchung (dies. Zbl. **38**, 122) über die Stabilität einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei inkompressiblen, nicht mischbaren Flüssigkeiten verschiedener Dichte bei beschleunigter Bewegung; er überträgt sie auf den kugelsymmetrischen Fall unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Oberflächenspannung (Koeffizient σ). $r = R(t)$ sei der Radius der ungestörten Grenzfläche; die Dichte sei ρ_1 für $r < R(t)$, ρ_2 für $r > R(t)$. Eine Störung wird als Kugelfunktion vom Grad n angesetzt, die additiv zu $R(t)$ hinzutritt. — Im wesentlichen erweist sich die Fläche als stabil (instabil), wenn

$$R\ddot{R}(n + 1/2)(n\rho_2 - (n + 1)\rho_1) + 3/4\dot{R}^2(n\rho_2 + (n + 1)\rho_1) - (n - 1)n(n + 1)(n + 2)\sigma/R < 0 \quad (> 0).$$

Das Glied mit $R\ddot{R}$ führt bei $n \rightarrow \infty$ wieder auf das Taylorsche Kriterium.

F. Wecken.

Pychteev, G. N.: Bestimmung des zweidimensionalen Potentials der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit bei vorgegebenen Werten ihrer Geschwindigkeitsrichtung. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 379—380 (1954) [Russisch].

Taliev, V. N.: Über das seitliche Ausfließen einer Flüssigkeit aus einem Kanal konstanten Querschnitts. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **94**, 635—638 (1954) [Russisch].

Dul'nev, V. B.: Die instationäre ungleichmäßige Bewegung einer Flüssigkeit in offenen, nicht prismatischen Flußbetten von vorgegebener Form. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **96**, 705—707 (1954) [Russisch].

Cocchi, Giovanni: Il moto laminare vario in tubi cilindrici di sezione circolare. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **15**, 393—401 (1954).

Bis zur Zeit $t = 0$ vollführe eine inkompressible reibende Flüssigkeit in einem kreiszylindrischen Rohre unter dem Einfluß eines konstanten Druckgefälles an den Rohrenden die Poiseuille'sche Laminarströmung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung. Zur Zeit $t = 0$ ändere das Druckgefälle instantan seine Richtung. Wie wird der Strömungsverlauf für $t > 0$ sein? Verf. beantwortet diese Frage einerseits streng mit Hilfe der bekannten aperiodischen gedämpften Eigenschwingungen einer reibenden Flüssigkeit in einem Kreisrohr [Th. Sexl, *Ann. der Physik*, IV. F. **87**, 570—580 (1928)], andererseits auf Grund der (nicht streng gültigen) Hypothese, daß ständig im Rohre eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung mit zeitlich variierender mittlerer Geschwindigkeit herrsche. Der Unterschied der strengen und der angenäherten Lösung beträgt maximal 3%. Aus dieser Tatsache sucht Verf. Rückschlüsse auf die Gesetzmäßigkeiten des Widerstandes turbulenter Rohrströmungen zu gewinnen.

Th. Sexl.

Uchida, Shigeo: Calculation of compressible cascade flow by the method of flux analysis. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 237—250 (1954).

Sind die Stromlinien einer ebenen kompressiblen Strömung bekannt, so gilt für die Geschwindigkeit u auf einer orthogonalen Trajektorie $u u_a = \delta s_a \delta s$, wo δs das Bogenelement längs der Stromlinie bedeutet und der Index a sich auf eine Anfangstromlinie (z. B. eine feste Wand) bezieht. Durch Integration von δu längs der Trajektorie, wo $\varrho = \varrho(u)$ die bekannte Dichtefunktion ist, ergibt sich die Stromfunktion ψ , so daß man bei gegebenen Massenfluß zwischen zwei vorgegebenen Stromlinien (z. B. Wänden) u_a und damit u und ψ bestimmen kann. So erhält man, ausgehend von geschätzten Stromlinien, ein graphisches Iterationsverfahren, das vom Verf. auf die Strömung durch Profiltitter angewandt wird. Vergleiche mit einer Messung sowie mit der exakten Lösung (inkompressibel) für ein „Joukowski-Gitter“ zeigen gute Übereinstimmung der Geschwindigkeitsverteilung am Profil, der Zirkulation und des Umlenkungswinkels. Als Ergebnis systematischer Rechnungen werden Stromlinienbilder, Geschwindigkeitsverteilungen am Profil und Zirkulation in Abhängigkeit von den Profil- und Gitterparametern sowie der Machschen Zahl mitgeteilt und kurz diskutiert.

J. Weissinger.

Lighthill, M. J.: Mathematical methods in compressible flow theory. *Commun. pure appl. Math.* **7**, 1—10 (1954).

Ozgun, Cabit: Amortissement de la vitesse tangentielle dans un écoulement hélicoïdal. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1378—1380 (1954).

Weber, C. und K. Saalfeld: Schmierfilm bei Walzen mit Verformung. Z. angew. Math. Mech. 34, 54—64 (1954).

Banks, W. H. and C. C. Mill: Some observations on the behaviour of liquids between rotating rollers. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 223, 414—416 (1954).

Chandrasekhar, S.: The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a radial temperature gradient. J. rat. Mech. Analysis 3, 181—207 (1954).

Die systematischen Untersuchungen über Stabilitätsprobleme in der Magneto-hydrodynamik werden hiermit fortgesetzt. Ausgehend von den allgemeinen Grundgleichungen des zweidimensionalen Problems werden folgende zwei Fälle behandelt: Gleichmäßige Verteilung von Wärmequellen oder konstante Temperaturen auf den beiden begrenzenden Zylindern. Das Problem wird auf eine ähnliche Form reduziert wie bei der thermischen Instabilität von Flüssigkeitskugeln bzw. Kugelschalen. Wie dort kann eine untere charakteristische Zahl für die Stabilität mit Hilfe eines Variationsverfahrens berechnet werden. Die umfangreichen Ergebnisse, die teilweise mit elektronischen Rechenmaschinen erhalten wurden, können hier nicht referiert werden.
G. Burkhardt.

Batchelor, G. K.: The skin friction on infinite cylinders moving parallel to their length. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 179—192 (1954).

Es wird der Reibungswiderstand unendlich langer Körper von zylindrischem Querschnitt (charakteristische Länge l proportional dem Querschnittsumfang) berechnet, die parallel zur Achse in ruhender Flüssigkeit der kinematischen Zähigkeit ν plötzlich mit konstanter Geschwindigkeit W bewegt werden. Für kleine Zeiten ($\nu t \ll l^2$) erhält man als erste Lösung der Bewegungsgleichung das Geschwindigkeitsprofil der unendlich ausgedehnten ebenen Platte; die zweite Näherung entspricht der Lösung von Carlslaw und Jaeger für die Wärmeleitung am Kreiszyylinder. Ecken im Querschnitt werden nach Hasimoto [J. Phys. Soc. Japan 6 (1951)] und Sowerby (noch nicht veröffentlicht) berücksichtigt. Für $\nu t \gg l^2$ wird die Geschwindigkeit in großem Abstand r vom Körper $W - k \log r$. Der Widerstand des Kreiszyinders ist zu allen Zeiten größer als derjenige der ebenen Platte desselben Querschnittsumfangs und größer als der Widerstand eines Zylinders mit der Querschnittsform eines regelmäßigen Vielecks.

J. Pretsch.

Landau, L. D. und E. M. Lifšic: Untersuchung der Singularitäten einer Strömung mit Hilfe der Euler-Tricomischen Gleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 725—728 (1954) [Russisch].

Ludford, G. S. S. and M. H. Martin: One-dimensional anisentropic flows. Commun. pure appl. Math. 7, 45—63 (1954).

Die eindimensionale, nicht-isentropische Strömung eines Gases läßt sich durch ein Potential $\xi(p, \nu)$ darstellen, wo p der Druck und ξ eine längs der Bahnkurven konstante Variable ist. ξ genügt einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung (vgl. M. H. Martin, dies. Zbl. 50, 199). In einer weiteren Arbeit (M. H. Martin, dies. Zbl. 50, 199) wurde festgestellt, wann diese Differentialgleichung erste Integrale besitzt. In vorliegender Arbeit zeigt sich, daß diese ersten Integrale, soweit sie physikalisch sinnvoll sind, im isentropischen Falle den einfachen Wellen entsprechen. Im nicht-isentropischen Falle werden die einfachen Wellen durch diese Zwischenintegrale definiert. Die allgemeine nicht-isentropische Strömung wird auf Euler-Poisson-Darboux'sche Gleichungen zurückgeführt, wie es für die isentropische Strömung schon seit Riemann bekannt ist.

C. Heinz.

Jaekel, K.: Analytische Behandlung ebener stationärer Gasströmungen. Z. angew. Math. Mech. 34, 76—78 (1954).

Bei der ebenen stationären Gasströmung mit Geschwindigkeitspotential kann man bekanntlich spezielle Druck-Dichte-Beziehungen angeben, für welche sich die durch die Transformationen von Legendre oder Molenbroek linearisierten Potentialgleichungen elementar lösen lassen (vgl. R. Sauer, S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1951, 65—71 (1952) und dies. Zbl. 44, 215, sowie W. Müller, Diss. 1953, T. H. München). Die vorliegende Arbeit liefert einen weiteren Beitrag in derselben Richtung.

R. Sauer.

Schlichting, Hermann: Problems and results of investigations on cascade flow. J. aeronaut. Sci. 21, 163—178 (1954).

Schnittger, Jan R.: Vortex flow in axial turbo machines. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 74, 62 p. (1954).

Parkus, H.: Das Anlaufen einer Schubdüse mit vorgeschaltetem Rohr. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 185—189 (1954).

Eine Laval-Düse mit vorgeschaltetem Rohr wird plötzlich an eine Brennkammer angeschlossen, die eine konstante Gasmenge je Zeiteinheit liefert. Die Anfangstemperatur der Düse und des Rohres ist gleich der Umgebungstemperatur. Schubverlauf an der Düse und Temperaturverlauf im Rohr in Abhängigkeit von der Zeit werden berechnet. *Autoreferat.*

Talbot, L.: Laminar swirling pipe flow. J. appl. Mech. 21, 1—7 (1954).

Einer Poiseuilleschen Rohrströmung wird ein rotationssymmetrischer swirl, d. h. eine Bewegung in konzentrischen Kreisen um die Rohrachse, überlagert. Die azimutale Geschwindigkeit v des swirl wird als von der Größenordnung der maximalen Geschwindigkeit W_m der Poiseuilleschen Strömung, dagegen die Störglieder w' und u (radiale Geschwindigkeit), als kleine Größen angenommen, was Vereinfachungen der Navier-Stokeschen Gleichungen ermöglicht. 1. Die Bewegungsgleichung in der azimutalen Richtung wird zu $W \partial v / \partial z = (1/Re) (\Delta v - v/r^2)$ mit $Re = W_m a / \nu$ linearisiert (z Achsenrichtung). Der Produktsatz $v = q(Re, \beta, r) e^{-\beta z}$ führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung vom konfluenten hypergeometrischen Typ mit bekannter Lösung. Die Werte des Parameters β bestimmen sich als Eigenwerte eines Randwertproblems. 2. Als Anfangsbedingung wird angenommen, daß für $z = \infty$ der swirl nach Null abgeklungen ist. Aus der Bewegungsgleichung in der radialen Richtung erhält man $v^2/r \approx \partial p / \partial r$. In den Impuls-integralsatz wird mit dem Polynom $w = 1 - r^2 + a_0(z) (1 - 6r^2 + 5r^3)$ eingegangen. Man erhält für den Koeffizienten $a_0(z)$ eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, die mit Ausgang von $z = \infty$ numerisch integriert wird. Die Störgeschwindigkeit u wird dann mittels der Kontinuitätsgleichung berechnet. 3. Experimentell wurde der swirl durch Rotation eines vorgelagerten Rohrstücks erzeugt. Es wurden zwei Typen der Instabilität des swirl beobachtet: für $Re \approx 1800$ wird der swirl in aperiodische Schwingungen aufgelöst und ausgeleert, die Hauptströmung bleibt laminar; für $Re \approx 2500$ zerfällt er in eine Reihe periodisch angeordneter Wirbel, die schließlich Turbulenz der Gesamtströmung erzeugen. Messungen der azimutalen Geschwindigkeit v wurden durch Beobachtung von Öltröpfchen durchgeführt. Der so ermittelte Abfall von v längs z stimmt gut mit dem theoretischen Verlauf überein. *W. Szablewski.*

Collatz, Lothar und Henry Görtler: Rohrströmung mit schwachem Drall. Z. angew. Math. Phys. 5, 95—110 (1954).

Der Fall des schwachen Dralls bietet einen ersten Zugang für die Berechnung der stationären Rohrströmungen mit Drall, da bei hinreichend schwachem Drall — schwach relativ zur Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Rohrachse und in diesem Sinne linearisierbar — in erster Näherung eine Koppelung zwischen der Drallkomponente und anderen Strömungsabweichungen von der stromabwärts sich einstellenden Poiseuille-Strömung nicht besteht. Im Falle des Absterbens des Dralls stromabwärts bildet er den Ausgangspunkt für eine iterative Berechnung eines stärkeren Dralls stromaufwärts. Die Berechnung führt auf ein Eigenwertproblem einer Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse ist auch für eine spätere Ausweitung der Untersuchungen von Bedeutung. *Th. Pöschl.*

Wundt, Hermann: Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern. Z. angew. Math. Phys. 5, 270—276 (1954).

Es wird für die laminare Längsströmung zwischen zwei koaxialen Kreiszylindern bei schwachem Drall die zugehörige durch Linearisierung der Bewegungsgleichungen entstehende Eigenwertaufgabe untersucht. Der innere Zylinder habe den Radius b , der äußere den Radius 1. Die Arbeit gibt somit eine Verallgemeinerung des vom Ref. (s. vorsteh. Referat) und von Görtler untersuchten Falles $b = 0$ (Kreisrohr). Für die Eigenfunktionen $G(s)$ hat man $-(sG')' + G/s = \lambda s f(s) G$ mit $f(s) = 1 - s^2 - (\ln s)(1 - b^2)/\ln b$ und $G(b) = G(1) = 0$. Die Eigenwerte $\lambda_1(0,7) \approx 3000$. Das bedeutet für engere Spalten rascheres Abklingen des Dralls. Eine Tabelle $\lambda_1(b)$ für $b: 0(0,1)1$ wurde nach dem Verfahren der schrittweisen Näherungen berechnet. *L. Collatz.*

Serrin, J. B.: Comparison theorems for subsonic flows. J. Math. Physics 33, 27—45 (1954).

Das Vergleichstheorem des Verf. für inkompressible Strömungen [Amer. J. Math. **74**, 492–506 (1952); J. rat. Mech. Analysis **1**, 563–572 (1952)] wird unter gewissen Voraussetzungen auf kompressible Unterschallströmungen ausgedehnt. Die Ergebnisse werden auf verschiedene Strömungsprobleme angewandt, u. a. auf Strömungen mit freien Grenzen und Strömungen durch Kanäle, sowie auf Profilströmungen, bei denen die kritische Geschwindigkeit erreicht wird.

C. Heinz.

Gilbarg, D. and M. Shiffman: On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I. J. rat. Mech. Analysis **3**, 209–230 (1954).

Mittels eines Vergleichstheoremes wird gezeigt, daß das symmetrische Profil höchster kritischer Machzahl aus zwei vertikalen Geradenstücken an den Stau- punkten besteht, welche durch ein Kurvenstück mit durchgehend kritischer Geschwindigkeit verbunden werden, wenn das Dickenverhältnis gegeben ist. Um die Frage nach der kleinsten kritischen Machzahl zu beantworten, muß außerdem die Maximalkrümmung des Profils begrenzt sein. Diese tritt dann auf einem Kreisbogensegment am Dickenmaximum auf. Auch der achsensymmetrische Fall wird behandelt. Die Bestimmung der Profilformen und der entsprechenden kritischen Machzahlen soll im 2. Teil der Arbeit erfolgen.

K. Oswatitsch.

Kuessner, H. G.: A general method for solving problems of the unsteady lifting surface theory in the subsonic range. J. aeronaut. Sci. **21**, 17–26 (1954).

Verf. gibt eine allgemeine, alle bisher behandelten Spezialfälle umfassende Theorie der harmonisch schwingenden Tragfläche in linearisierter, dreidimensionaler, kompressibler Unterschallströmung unter der Voraussetzung, daß orthogonale Koordinaten eingeführt werden können mit der Eigenschaft, daß die Tragfläche unter der zugehörigen orthogonalen Flächenschar auftritt und die Wellengleichung durch einen Separationsansatz in diesen Koordinaten gelöst werden kann. Bei gegebener Abwindverteilung auf der Tragfläche wird das Geschwindigkeitspotential durch ein Integral dargestellt, dessen Kern sich aus einer charakteristischen Funktion und ihren Ableitungen zusammensetzt, die durch Reihenentwicklung nach den orthogonalen Wellenfunktionen gewonnen wird. Da diese Funktionen für die gebräuchlichen Tragflächenformen i. a. unbekannt sind, ist die praktische Anwendbarkeit der Theorie zur Zeit noch begrenzt. Als Beispiele werden behandelt der elliptische, insbesondere der kreisförmige Unriß und der unendlich breite Streifen (mit beliebiger Abwindverteilung); im ersten Fall erhält man Reihen nach Laméschen, im zweiten nach Mathieuschen Funktionen. Schließlich wird die Theorie auf den bereits vielfach untersuchten zweidimensionalen Fall spezialisiert, wobei sich u. a. die Formeln von E. Reissner [NACA Tech. Note Nr. **2663** (1951)] und von Timman und van de Vooren (Timman, dies. Zbl. **55**, 189) ergeben.

J. Weissinger.

Imai, Isao: A new method of solving Oseen's equations and its application to the flow past an inclined elliptic cylinder. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **224**, 141–160 (1954).

Es wird ein allgemeines Rechenverfahren angegeben, um die Oseenschen Bewegungsgleichungen für einen zylindrischen Körper von beliebiger Querschnittsform zu lösen. Es handelt sich in üblicher Weise um ein Näherungsverfahren, bei welchem das Geschwindigkeitsfeld nach Potenzen der steigenden Reynoldsschen Zahl R entwickelt wird. Für den Kreiszyylinder ergibt sich die Lösung in Form von Besselschen und für elliptische Zylinder in Form von Mathieuschen Funktionen. Die explizite Durchführung der Rechnung wird für den elliptischen Zylinder von beliebigem Achsenverhältnis und Anstellwinkel durchgeführt, und es wird in diesem Fall das Geschwindigkeitsfeld bis zum Glied R^2 gegeben. Für den Widerstands- und Auftriebsbeiwert des elliptischen Zylinders werden explizite Formeln angegeben, die für $R = 0,1$ und $1,0$ auch numerisch ausgewertet worden sind. Sie beginnen mit R^{-1} und reichen bis R^{-1} . Der Widerstandsbeiwert nimmt mit wachsendem Achsenverhältnis des Zylinders und mit dem Anstellwinkel zu. Der Auftriebsbeiwert bei konstantem Anstellwinkel nimmt mit abnehmendem Achsenverhältnis zu und hat in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α sein Maximum bei $\alpha = 45^\circ$. Die numerischen Ergebnisse sind in völliger Übereinstimmung mit einer Arbeit von Hasimoto (1953).

H. Schlichting.

Krjučin, A. F.: Die Strömung um ein keilförmiges Profil mit Ablösung der Linie starker Unstetigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 37–40 (1954) [Russisch].

Byrd, Paul F.: An integral equation occurring in the theory of a slender quasi-axisymmetrical body. J. aeronaut. Sci. **21**, 351 (1954).

Rodriguez, A. M., P. A. Lagerstrom and E. W. Graham: Theorems concerning the drag reduction of wings of fixed plan form. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 1—7 (1954).

Merbt, H. and M. Landahl: The oscillating wing of low aspect ratio. Results and tables of auxiliary functions. *Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., TN 31*, 32 S. (1954).

Timman, R.: Linearized theory of the oscillating airfoil in compressible subsonic flow. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 230—236, 250 (1954).

In Erweiterung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **44**, 407) gewinnt Verf. je eine Lösung des Randwertproblems für das Geschwindigkeits- und das Beschleunigungspotential der harmonisch schwingenden Tragfläche in linearisierter, ebener, kompressibler Unterschallströmung mittels der zugehörigen Greenschen Funktion, die durch Reihenentwicklung nach Mathreuschen Funktionen erhalten wird, und leitet eine Identität zwischen diesen Lösungen her, die es ihm erlaubt, seine frühere Formel für die Druckverteilung zu vereinfachen und zu zeigen, daß diese der Reziprozitätsbeziehung in der Flaxschen Form (dies. Zbl. **50**, 201) genügt, daß also die von Fettis [*J. aeronaut. Sci.* **19**, 353 (1952); **20**, 437 (1953)] bemerkten Unstimmigkeiten nicht zu Lasten der Theorie, sondern eines — inzwischen aufgedeckten — numerischen Fehlers gehen.

J. Weissinger.

Kostjukov, A. A.: Über Formeln für die Berechnung des Wellenwiderstandes und des Auftriebs von in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpern. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 225—232 (1954) [Russisch].

Angehend von den in der Hydrodynamik bekannten allgemeinen Formeln für die von einer Flüssigkeit auf einen Körper wirkenden Kräfte, werden die Ausdrücke des Wellenwiderstandes und des Auftriebs für hydrodynamische Singularitäten und einen Körper beliebiger Form bei ihrer Bewegung in einer Flüssigkeit von endlicher oder unendlicher Tiefe angegeben; ferner Ausdrücke für die Momente der auf den Körper wirkenden hydrodynamischen Kräfte.

Autoreferat.

Krjučin, A. F.: Über den Widerstand eines rhombusförmigen Profils bei schallnahen Geschwindigkeiten. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **97**, 205—208 (1954) [Russisch].

Scharn, H.: Systematisch-kritische Beispielrechnungen zur Seitenstabilität der Flugzeuge. *Z. Flugwissenschaften* **2**, 57—95 (1954).

Rutowski, Edward S.: Energy approach to the general aircraft performance problem. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 187—195 (1954).

Pröll, A.: Beiträge zum Schwingenflugproblem. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **8**, 189—199 (1954).

Nigam, Swami Dayal: Note on the boundary layer on a rotating sphere. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 151—155 (1954).

Verf. behauptet, daß die von L. Howarth (dies. Zbl. **43**, 401) hergeleiteten Gleichungen der durch eine rotierende Kugel erzeugten Grenzschichtströmung diese auch in der Nähe des Äquators richtig beschreiben. Durch Verbesserung des Reihenansatzes wird mit Hilfe der von Kármánschen Näherungsmethode eine Lösung (allerdings ohne Konvergenzbetrachtungen) gewonnen, die auch die Ausströmung in der Nähe des Äquators richtig wiedergibt.

H. Witting.

Fadnis, Bhaskar Sadashiv: Boundary layer on rotating spheroids. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 156—163 (1954).

Übertragung der Methoden der vorstehend besprochenen Arbeit von S. D. Nigam auf den Fall des rotierenden verlängerten und abgeplatteten Ellipsoids. Die Lösungen zeigen auch hier einen Zustrom an den Polen und einen Abfluß am Äquator.

H. Witting.

Chu, Sheng To and A. N. Tifford: The compressible laminar boundary layer on a rotating body of revolution. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 345—346 (1954).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit, in welcher die laminare Reibungsschicht an einem axial angeströmten rotierenden Drehkörper bei konstanten Stoffbeiwerten

untersucht wurde, wird hier die gleiche Aufgabe für veränderliche Stoffbeiwerte und bei kompressibler Strömung diskutiert. Für den Fall, daß die Prandtl-Zahl gleich 1 ist, wird eine Energiebeziehung ähnlich der von L. Crocco erhalten. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich die Lösung der kompressiblen Grenzschichtgleichungen zurückführen auf diejenige einer zugeordneten inkompressiblen Grenzschicht.

H. Schlichting.

Pack, D. C.: Laminar flow in an axially symmetrical jet of compressible fluid, far from the orifice. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 98–104 (1954).

Der rotationssymmetrische laminare Strahl eines kompressiblen Gases mit der Prandtl-Zahl eins wird nach dem Rechenverfahren der Grenzschichttheorie behandelt. Es wird gezeigt, daß ein Integral der Form $i + u^2/2 = \text{const}$ existiert, wo i die Enthalpie und u die achsenparallele Geschwindigkeitskomponente bedeutet. Durch eine Transformation wird die Differentialgleichung der kompressiblen Strömung auf eine solche Form gebracht, daß sie in erster sehr guter Näherung durch die entsprechende Gleichung des inkompressiblen Strahles ersetzt werden kann, welche früher von H. Schlichting (1933) gelöst worden ist. Die zweite Näherung wird noch explizit berechnet. Diese ergibt, daß für Mach-Zahlen kleiner als eins auf der Achse die Dichte größer und die Temperatur niedriger ist als am Rande des Strahles.

H. Schlichting.

Lock, R. C.: Hydrodynamic stability of the flow in the laminar boundary layer between parallel streams. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 105–124 (1954).

Nachdem Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 430) das Geschwindigkeitsprofil in der laminaren Grenzschicht zweier Medien verschiedener Dichte und Zähigkeit, die von der Stelle $x = 0$ ab mit verschiedener, konstanter Geschwindigkeit übereinander hingleiten, bestimmt hat (insbesondere für Luft über ruhendem Wasser), legt er nunmehr eine Stabilitätstheorie dieser Strömung vor. Die Stromfunktion einer kleinen, sinusförmigen Störwelle genügt in den beiden Medien je einer Differentialgleichung vierter Ordnung, von deren Grundlösungen jeweils zwei die Randbedingungen im Unendlichen befriedigen. Die vier verbleibenden Integrationskonstanten werden mittels der vier Übergangsbedingungen (Stetigkeit der beiden Geschwindigkeitskomponenten und der Schubspannung sowie Gleichgewicht von Druckkräften, Schwerkraft und Oberflächenspannung) eliminiert, was zu einer (sehr komplizierten) charakteristischen Gleichung zwischen x , der Wellenlänge λ , der (komplexen) Wellengeschwindigkeit $C = c \cdot U$ und der Luftgeschwindigkeit U führt. Diese Gleichung hat bei gegebenem x, λ, U zwei Wurzeln c_u und c_a ; im allgemeinen hat die zu c_u gehörige Welle Ähnlichkeit mit einer Schwerwelle des Wassers, die zu c_a gehörige mit der Welle in der Luftgrenzschicht über einer festen Wand, so daß das Instabilwerden der letzteren eher auf einen Umschlag der laminaren in eine turbulente Strömung als auf das Entstehen von Wasserwellen durch den Wind hindeutet. Für fünf Windgeschwindigkeiten zwischen 1 und 3 m/sec. werden die berechneten Stabilitätsgrenzen als Kurven in der x, λ -Ebene gezeigt ($0 \leq x \leq 60, 0 \leq \lambda \leq 1,2 [m]$). Die praktische Anwendbarkeit der Theorie wird nach Angabe des Verf. weniger durch die vorgenommenen mathematischen Vernachlässigungen als durch die Voraussetzung der laminaren Grenzschicht eingeschränkt.

J. Weissinger.

Cohen, Clarence B.: Similar solutions of compressible laminar boundary-layer equations. J. aeronaut. Sci. 21, 281–282 (1954).

Die von T. Y. Li und H. T. Nagamatsu (dies. Zbl. 50, 412) getroffene Aufstellung von vier Ähnlichkeitstypen der Lösungen der Gleichungen für die kompressible Grenzschicht wird durch Angabe weiterer Transformationen reduziert auf die Unterscheidung nur zweier solcher Typen. Von diesen wird gezeigt, daß sie wesentlich verschiedene Fälle darstellen.

H. Behrbohm.

Kaplun, Saul: The role of coordinate systems in boundary-layer theory. Z. angew. Math. Phys. 5, 111–135 (1954).

Die Grenzschichtapproximation (kurz GA) einer Strömung hängt von dem Koordinatensystem (kurz KS) ab, in dem die Grenzschichtvernachlässigungen durchgeführt wurden. Verf. beweist (Satz 1), daß die zu verschiedenen KS gehörenden GA durch einfache Substitutionen ineinander übergehen. Aus diesen Beziehungen folgt, daß die Wahl des KS für die Berechnung der eigentlichen Grenzschicht unwesentlich ist, daß aber außerhalb einer festen wandnahen Zone die zu verschiedenen KS gehörenden GA um beliebig viel voneinander abweichen können. Die Frage, ob es ein solches KS gibt, so daß die zugehörige GA um beliebig viel von der eigentlichen Grenzschicht eine Approximation der vorgegebenen Strömung kleiner Reibung darstellt, wird im folgenden Sinne positiv beantwortet (Satz 2): Bezeichnet ϵ einen Parameter, der die zu verschiedenen Reibungen r gehörenden Strömungen kennzeichnet mit der Eigenschaft $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \nu/\epsilon^2 = \text{const} \neq 0$, bezeichnet weiter $\psi(\xi, \eta, \epsilon)$ die exakte Stromfunktion und $\psi_\epsilon(\xi, \eta, \epsilon)$ die Stromfunktion der zu dem KS $\zeta = (\xi, \eta)$ gehörenden GA, so gibt es stets ein „optimales“ KS

$= (\varrho, \sigma)$, derart, daß sich die Funktionen $\varphi(\varrho, \sigma, \varepsilon)$ und $\psi_\chi(\varrho, \sigma, \varepsilon)$ nur um Glieder $o(\varepsilon)$ unterscheiden. Dann enthält neben φ auch ψ_χ die Potentialströmung φ_∞ und die durch die Verdrängungswirkung der Grenzschicht bedingte Korrektur $\varepsilon\varphi'_\varepsilon$ als die ersten beiden Glieder einer asymptotischen Entwicklung nach Potenzen von ε . Bei dieser im ganzen Bereich einheitlichen Approximation einer Strömung kleiner Reibung durch eine optimale GA vermeidet man die Schwierigkeiten, wo und wie der Übergang der GA in die Potentialströmung zu erfolgen hat. Ein optimales KS $\chi = (\varrho, \sigma)$ läßt sich angeben, wenn φ_∞ und φ'_ε als Lösungen der Laplaceschen Gleichung unter geeigneten Randbedingungen und irgendeine GA bekannt sind: $\sigma = \varphi_\infty$, $\varrho = \varphi'_\varepsilon$. Die optimale GA ergibt sich dann nach Satz 1. Die Untersuchungen beschränken sich auf Strömungen ohne Ablösung, die Beispiele auf weitgehend analytisch zu behandelnde Probleme.

H. Witting.

Torda, T. P.: Boundary layer control by distributed surface suction or injection. Bi-parametric general solution. J. Math. Physics 32, 312–314 (1954).

Durch Kombination der Impuls- und der Energiegleichung bei Benutzung eines von zwei Parametern ($v_0 \delta r$ und $\partial^2(dU^2/ds) r$) abhängenden Polynomansatzes 4ten Grades für das Geschwindigkeitsprofil erhält Verf. eine Gleichung, aus der sich insbesondere die Absaugegeschwindigkeit zu vorgegebener Grenzschichtdicke algebraisch berechnen läßt. Eine ausführliche Darstellung, die auch numerische Resultate enthält, soll erfolgen, wenn ein Vergleich mit Versuchsergebnissen möglich ist.

J. Weissinger.

Bruniak, R.: Über die Rückströmung in der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 87–90 (1954).

Unter einschränkenden Annahmen wird ein theoretischer Ansatz versucht, um die bei Versuchen gefundene Rückströmung und Verdickung in laminarer Grenzschicht zu erklären.

Autoreferat.

Yih, Chia-shun: Temperature distribution in laminar stagnation-point flow with axisymmetry. J. aeronaut. Sci. 21, 37–42 (1954).

Mit Hilfe des Homannschen Staupunktprofils in rotationssymmetrischer Grenzschicht wird die Temperaturgrenzschicht berechnet, wenn eine punktförmige Wärmequelle am Staupunkt auf wärmeundurchlässiger Wand liegt oder wenn die Differenz von Wand- und Außentemperatur sich längs der Wand als Potenz des Abstandes vom Staupunkt ändert oder wenn der Temperaturanstieg nur durch zähe Dissipation zustande kommt.

J. Pretsch.

Silver, Alfred H.: On heat transfer in a compressible laminar boundary layer. J. aeronaut. Sci. 21, 352–353 (1954).

Fettis, Henry E.: On a differential equation occurring in the theory of heat flow in boundary-layers with Hartree's velocity profiles. J. aeronaut. Sci. 21, 132–133 (1954).

Levin, A. M.: Der hydraulische Sprung und das Abreißen der Grenzschicht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 1121–1124 (1954) [Russisch]

Schuh, H.: On calculating incompressible turbulent boundary layers with arbitrary pressure distribution. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., TN 41, 23 S. (1954).

Hofmann, E.: Über das allgemeine Wärmeübergangsgesetz der turbulenten Rohrströmung und den Sinn der Kennzahlen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 20, 81–93 (1954).

Lighthill, M. J.: On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 222, 1–32 (1954).

[Teil I. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 504–587 (1952).] Teil II interpretiert eingangs die experimentellen und theoretischen Ergebnisse verschiedener Arbeiten aus den Jahren 1952/53 und beschäftigt sich dann noch einmal eingehend mit der schallerzeugenden Turbulenz, insbesondere mit der verstärkenden Wirkung einer evtl. vorhandenen mittleren Scherströmung und von Temperaturinhomogenitäten. Während der erste Fall von großer praktischer Bedeutung ist, scheint der letzte seltener eine Rolle zu spielen. Die Arbeit schließt mit einer eingehenden Diskussion experimenteller Arbeiten anderer Autoren über die Schallabstrahlung von Unter- und Überschallstrahlen.

F. W. Riegels.

Batchelor, G. K. and Ian Proudman: The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 83—103 (1954).

Es wird der Einfluß einer uniformen Verformung auf ein homogenes Turbulenzfeld studiert. Unter der Voraussetzung einer so raschen Verformung, daß während der Dauer derselben Reibungs- und Turbulenzeinflüsse vernachlässigbar sind, ist die Änderung der Wirbelstärke der Turbulenz durch eine lineare Gleichung beschreibbar. Diese wird in Fourier-Komponenten der Geschwindigkeitsverteilung mit Bezug auf die Hauptachsen der Verformung transponiert. Im Falle von Isotropie im Anfangszustand werden explizite Formeln für die Änderungen der Schwankungsenergien der drei Geschwindigkeitskomponenten aufgestellt: bei symmetrischer Kontraktion (Windkanal) in Abhängigkeit vom Kontraktionsverhältnis; bei beliebiger Verformung in Abhängigkeit von den Hauptdehnungen. Bei symmetrischer Kontraktion werden asymptotische Formeln auch für den Fall gewonnen, daß der Anfangszustand nicht isotrop ist. Messungen, welche die Voraussetzung der linearen Theorie erfüllen, liegen nicht vor.

W. Szablewski.

Townsend, A. A.: The uniform distortion of homogeneous turbulence. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 104—127 (1954).

Eine Windkanalströmung von homogener isotroper Turbulenz wurde experimentell einer uniformen Verformung von konstanter Querschnittsfläche unterworfen, erzeugt durch divergierenden bzw. konvergierenden Verlauf der horizontalen Breite bzw. vertikalen Tiefe des rechteckigen Führungsstücks. Die auf die Maschenbreite des Turbulenzgitters bezogenen Reynoldsschen Zahlen betragen 5850 und 11700. Die Messungen ergaben einen Abfall der Schwankungsenergien für alle drei Geschwindigkeitskomponenten, während nach der Theorie der momentanen Verformung (obiges Referat) ein Anstieg derselben für die Geschwindigkeitskomponenten in der Achsenrichtung und in der vertikalen Richtung erfolgen müßte. Im Anfangsstadium der Verformung weisen jedoch die gemessenen longitudinalen Spektren einen ähnlichen Verlauf auf wie die theoretischen. Die Messungen ergaben ferner, daß während der Verformung die dissipative Energie abgebenden Wirbel sich nicht im Zustand lokaler Isotropie befinden, diesen nach Beendigung der Verformung jedoch wieder sehr schnell anstreben. Die Messung, die als ein sehr einfaches Modell scherender Strömung anzusehen ist, wird in Hinsicht auf den Austauschansatz bei gewöhnlichen scherenden Strömungen diskutiert.

W. Szablewski.

Townsend, A. A.: The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 224, 487—512 (1954).

Bass, J.: Space and time correlations in a turbulent fluid. I. Univ. California Publ. Statist. 2, 55—84 (1954).

Es werden bei inkompressiblen Flüssigkeiten die allgemeinen Eigenschaften von Raum- und Zeit-Korrelationen in einer turbulenten Strömung untersucht. Es bezeichnen u_1, u_2, u_3 die Komponenten der Geschwindigkeit im Punkte M mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und zur Zeit t . M' sei ein zweiter Punkt mit den Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 und t' ein zweiter Zeitwert. Der Tensor $R_{\alpha\beta} = u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) u_\beta(x'_1, x'_2, x'_3, t')$, welcher die stochastischen Mittelwerte aus den Produkten der Geschwindigkeitskomponenten bei M zur Zeit t und bei M' zur Zeit t' darstellt, definiert die Raum-Zeit-Geschwindigkeits-Korrelationen (oder zweifachen Korrelationen). Im Fall $t' = t$ wurden diese schon mehrfach untersucht. Das Ziel der Arbeit ist, die analytische Form von $R_{\alpha\beta}$ in einer gegebenen Strömung als Funktion der relativen Lage von M und M' sowie der absoluten Lage von M zu ermitteln. — In dem zugrunde gelegten Bereich sei die mittlere Geschwindigkeit der konstante Einheitsvektor $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)$. Seine Richtung werde als longitudinale, jede darauf senkrecht stehende Richtung (μ_1, μ_2, μ_3) als transversale Richtung bezeichnet. $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ sei der Abstand der beiden Punkte M, M' und $\tau = t' - t$ die Zeitdifferenz. Je nachdem der räumliche Vektor $M M'$ longitudinal oder transversal ist, werden auch die Korrelationen als longitudinal ($\xi_\alpha = r \hat{\lambda}_\alpha$) oder transversal ($\xi_\alpha = r \mu_\alpha$) bezeichnet. Verf. versucht eine theoretische Erklärung der von Favre [Commun. VIII, internat. Congr. Theor. Appl. Mech., Istanbul 1952, Note Techn. ONERA 22 522 A (1952)] experimentell ermittelten Kurven, d. h. eine theoretische Voraussage des Verlaufs der longitudinalen und transversalen „Isokorrelationskurven“. Dies wird in einem ersten Teil für den Fall homogener und isotroper Turbulenz durchgeführt. Unter X_1 bzw. X_2 die Länge der Projektion des Vektors $M M'$ auf die Longitudinalrichtung $\hat{\lambda}$ bzw. die Transversalrichtung μ verstanden, ergibt sich bei Beschränkung auf Glieder höchstens zweiter Ordnung in r und τ , daß die Kurven der longitudinalen Isokorrelation zu den Ellipsen $a \tau^2 + b(X_1 - \tau)^2 = 1$ (a, b positive Funktionen der Zeit), die Kurven der transversalen Isokorrelation zu den Ellipsen $(a + b) \tau^2 + 2 b X_2^2 = 1$ und die Kurven der kompensierten Isokorrelation $(M M')$ beliebiger Raumvektor mit Zeitdifferenz τ zu den Ellipsen $a \tau^2 + 2 b X_3^2 = 1$ homothetisch sind. Theorie und Experiment stimmen für $\tau = 0$ gut überein, weichen jedoch für $\tau \neq 0$ merklich voneinander ab. Allgemeine Betrachtungen über den Einfluß der hydrodynamischen Gleichungen auf die Struktur der Raum-Zeit-Korrelationen beschließen den ersten Teil. Im zweiten Teil wird ein anderer Symmetrietypus, die sog. zylindrische

Turbulenz behandelt. In dem zugrunde gelegten Bereich wird die Strömung hinsichtlich der Zeit als stationär, in bezug auf jede transversale Richtung als homogen, aber in bezug auf die Longitudinalrichtung als nicht homogen vorausgesetzt, außerdem bestehe axiale Symmetrie. Diese Annahmen führen zu Ergebnissen, die besser mit dem Experiment übereinstimmen. Diese zylindrische unterscheidet sich von der von Batchelor betrachteten achsensymmetrischen Turbulenz, welche vollständig homogen und nicht stationär ist. Als longitudinale Isokorrelationskurven ergeben sich jetzt die Ellipsen $p_1(X_1 - \tau)^2 + p_2 X_1^2 + p_3 X_1 \tau = \text{const.}$, wobei die vier Konstanten p_1, p_2, p_3, p_4 noch den Bedingungen $p_1 > 0, p_1 + p_2 > 0, p_3 > 0, p_4^2 \leq 4 p_1(p_1 + p_2)$ unterworfen sind, während die transversalen Isokorrelationskurven durch die Ellipsen $p_3 X_2^2 + p_1 \tau^2 = \text{const.}$ dargestellt werden. *V. Garten.*

Mackie, A. G.: Expansion of a finite one-dimensional gas cloud into a vacuum.

Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. **64**, 57—70 (1954).

Eine eindimensionale Gaswolke $(-h_2 \leq x \leq h_1)$ ist zur Zeit $t = 0$ in Ruhe und expandiert für $t > 0$ nach beiden Seiten im Vakuum. Als Anfangsbedingung ist die Dichte zur Zeit $t = 0$ als stetige Funktion von x vorgegeben. Sie sinkt von einem Maximum bei $x = 0$ nach links und rechts bis auf Null bei $x = -h_2$ bzw. $x = h_1$ ab, für $x \neq 0$ existieren alle auftretenden Ableitungen der Dichtefunktion. Durch die von $x = -h_2$ und $x = h_1$ ausgehenden Mediengrenzen und durch die von diesen Punkten und dem Punkt $x = 0$ nach rechts und links laufenden Mach-Linien wird der zwischen den genannten Mediengrenzen liegende Bereich der x, t -Ebene in 7 Teilbereiche zerlegt. Unter Voraussetzung isentropischer Zustandsänderungen mit dem Verhältnis $\kappa = 5/3$ der spezifischen Wärmen führt die eindimensionale nichtstationäre Gasströmung bekanntlich auf eine Darboux'sche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung $[\Phi(r) - \Psi(s)](r - s)$, wobei r und s die charakteristischen Parameter und $\Phi(r)$ und $\Psi(s)$ willkürliche Funktionen sind. Mit Hilfe der gegebenen Anfangsbedingungen werden diese willkürlichen Funktionen nacheinander für die 7 Teilbereiche bestimmt und die dabei sich ergebenden Lösungen an den die Teilbereiche begrenzenden Charakteristiken zusammengefügt. In einem Schlußabschnitt wird die Frage nach dem Auftreten von Unstetigkeiten (Stoßfronten) diskutiert. *R. Sauer.*

Giese, J. H.: Approximate methods for computing flow fields. Commun. pure appl. Math. **7**, 65—77 (1954).

Es wird berichtet über die Verwendung programmgesteuerter elektronischer Rechenautomaten (ENIAC, ORDVAC) für gasdynamische Probleme der Außenballistik auf Grund von Erfahrungen, die am ballistischen Forschungsinstitut in Aberdeen (USA) von R. F. Clippinger, W. C. Carter und dem Verf. gewonnen wurden. Ausführlich behandelt wird die mittels der Charakteristikenmethode durchgeführte Berechnung der stationären Überschallströmung um einen achsial angeblasenen Drehkörper mit anliegender Kopfwelle. Hierbei finden sich interessante Angaben über die erforderliche Speicherkapazität und den Zeitbedarf sowie experimentelle Ergebnisse über den Einfluß der Maschenweite des durchgerechneten Charakteristikengitters auf den Verfahrensfehler. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden einige vorläufige Mitteilungen gemacht über kompliziertere Aufgaben, bei denen noch keine abschließenden Ergebnisse vorliegen (dreidimensionale Probleme, Überschallströmungen um Drehkörper unter kleinem Anstellwinkel, Drehkörper mit nicht anliegender Kopfwelle). *R. Sauer.*

Heaslet, Max. A. and Harvard Lomax: Further remarks concerning integral transforms of the wave equation. J. aeronaut. Sci. **21**, 142 (1954).

Bei der Anwendung des Operators der Laplacetransformation auf die Differentialgleichung des Störgeschwindigkeitspotentials der linearisierten Überschallströmung treten formal längs der durch Unstetigkeitslinien der Tangentialrichtungen des Störkörpers gelegten charakteristischen Flächen Sprungglieder in den Geschwindigkeitskomponenten auf. Diese hatte L. E. Fraenkel berechnet (dies. Zbl. **50**, 414) und ihr Verschwinden mathematisch nachgewiesen. Verff. deuten diese Sprungglieder als Richtungsableitungen längs der Konormalen; sie stellen also Sprünge in zu den Charakteristiken tangentialen Geschwindigkeitskomponenten dar und verschwinden somit auch aus physikalischen Gründen. Verff. waren auf ein analoges Phänomen schon beim Studium instationärer Strömungen an Hand der linearisierten 4-dimensionalen Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials gestoßen [N. A. C. A. Rep. 1077 (1952)]. *H. Behrbohm.*

Mises, R. von: Discussion on transonic flow. Commun. pure appl. Math. 7, 145—148 (1954).

C. Morawetz hat in einer nichtveröffentlichten Note [s. L. Bers, Commun. pure appl. Math. 7, 79—104 (1954), S. 87] gezeigt, daß keine stetige Strömung mit Schalldurchgang um ein Profil existieren kann, wenn die Krümmung des Profils im Überschallbereich verschwindet. Für diesen Satz wird ein sehr kurzer Beweis gegeben. Das daran anschließende Problem, ob die Aufgabe, eine Strömung mit Schalldurchgang um ein vorgegebenes Profil zu berechnen, in dieser Form korrekt gestellt ist oder ob z. B. nicht die ganze Profilgrenze vorgegeben werden darf, wird formuliert.

C. Heinz.

Legendre, Robert: Écoulement supersonique autour d'un corps élané. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1863—1865 (1954).

Die von G. N. Ward (dies. Zbl. 34, 117) angegebene Lösung für die Überschallströmung wird durch Änderung der Veränderlichen verschärft, so daß das Geschwindigkeitsfeld in Körperrnähe ohne analytische Fortsetzung angegeben werden kann. Die Lösung der linearisierten Potentialströmung wird aufgebaut durch Überlagerung eines gleichförmigen parallelen Feldes, eines den Anstellwinkel berücksichtigenden Transversalfeldes und eines Quellenfeldes über dem Profil. In einer späteren Mitteilung soll die Schallgrenze des Widerstandes abgeschätzt werden. J. Pretsch.

Spreiter, John R.: On alternative forms for the basic equations of transonic flow theory. J. aeronaut. Sci. 21, 70—72 (1954).

Um Näherungen für das Geschwindigkeitspotential in Schallnähe zu erhalten, geht man gewöhnlich von zwei verschiedenen Standpunkten aus: (1) die lokalen Geschwindigkeiten unterscheiden sich wenig von der Geschwindigkeit des freien Stromes, (2) die lokalen Geschwindigkeiten unterscheiden sich wenig von der kritischen Geschwindigkeit. — Beide Annahmen führen zu verschiedenen Näherungen, wobei sich aber zeigen läßt, daß sich die zweite der Näherungen aus der ersten dadurch ergibt, daß man in den entsprechenden Differentialgleichungen an einer Stelle die Machsche Zahl durch 1 ersetzt. An einigen Beispielen zeigt nun der Verf., daß diese Vereinfachung zu einer schlechteren Übereinstimmung mit bekannten exakten Lösungen und auch dem Experiment führt, so daß also der erste Standpunkt vorzuziehen ist.

H. Söhngen.

Lax, Peter D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Commun. pure appl. Math. 7, 159—193 (1954).

Das hier entwickelte Differenzenverfahren für die Berechnung zeitabhängiger eindimensionaler kompressibler Strömungen mit starken Stößen unterscheidet sich gegenüber einem ähnlichen Verfahren von v. Neumann (1944) dadurch, daß Verf. von den hydrodynamischen Erhaltungssätzen ausgeht. Es werden also nur solche Systeme von Gleichungen $U_t = A(x, t, U) U_x + B(x, t, U) = 0$ betrachtet, für die $A U_x = F_x$ ist. (Physikalisch bedeutet dies beispielsweise den Übergang von der Bewegungsgleichung zum Energiesatz, wenn man F gleich der kinetischen Energie setzt.) Es wird gezeigt, daß „schwache Lösungen“ dieser Differentialgleichung, die durch eine Integralbedingung definiert werden, auch bei gegebenen Anfangswerten nicht eindeutig sind. Die tatsächlich auftretenden Lösungen werden daher als Grenzfall einer zähen Lösung bestimmt, indem auf der rechten Seite der Gleichung λU_{xx} hinzugefügt wird (mit $\lambda \rightarrow 0$). Die Konvergenz des Differenzenverfahrens wird an einer Reihe von Beispielen mit Integration durch Stoßwellen hindurch gezeigt. Im zweiten Teil werden gemischte Anfangs- und Randwerte behandelt. Der dritte Abschnitt bezieht sich auf Lösungen, die nur von einer linearen Kombination von x und t abhängen. Die zahlreichen mitgeteilten numerischen Beispiele wurden auf verschiedenen elektronischen Rechenmaschinen des Los Alamos Scientific Laboratory berechnet.

W. Wuest.

Thomas, L. H.: Computation of one-dimensional compressible flows including shocks. Commun. pure appl. Math. 7, 195—206 (1954).

Bei der Berechnung zeitabhängiger eindimensionaler kompressibler Strömungen nach dem Differenzenverfahren ist es zweckmäßig, in der Umgebung der Stoßfront kleine Schrittlängen und Differenzen kleiner Ordnung, in großer Entfernung davon aber große Schrittlängen und Differenzen höherer Ordnung zu nutzen. Im Hinblick

auf diese Aufgabe dehnt Verf. das zunächst für äquidistante Schrittlängen geltende Verfahren von Adams bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf veränderliche Schrittlängen aus und überträgt dies auf ein System zweier partieller hyperbolischer Differentialgleichungen.

W. Wuest.

Dynke, Milton D. van: Applications of hypersonic small-disturbance theory. J. aeronaut. Sci. **21**, 179—186 (1954).

Guderley, Gottfried: The flow over a flat plate with a small angle of attack at Mach number 1. J. aeronaut. Sci. **21**, 261—274 (1954).

Jorgensen, Leland H.: Nose shapes for minimum pressure drag at supersonic Mach numbers. J. aeronaut. Sci. **21**, 276—279 (1954).

Martin, John C. and Nathan Gerber: The effect of thickness on pitching airfoils at supersonic speeds. J. Math. Physics **33**, 46—56 (1954).

Kaye, Joseph: Survey of friction coefficients, recovery factors, and heat-transfer coefficients for supersonic flow. J. aeronaut. Sci. **21**, 117—129 (1954).

Haack, Wolfgang und Jürgen Zierep: Berechnungsmethoden von Lavaldüsen auf Grund eines Formelsystems für die Strömung in der Düsenkehle. Z. Flugwissenschaften **2**, 41—50 (1954).

Die Arbeit beginnt mit der Aufstellung einer Näherungsmethode zur Berechnung des Schalldurchganges in einer ebenen oder achsensymmetrischen Düsenkehle. Diese besteht darin, daß eine höhere Näherung zur Methode von Oswatitsch-Rothstein unter Anwendung natürlicher Koordinaten berechnet wird, wobei die ältere Methode allerdings unerwähnt bleibt. Die Resultate stimmen folglich in erster Näherung mit einer Formel von Sauer überein, die ja aus der Näherung von Oswatitsch-Rothstein hergeleitet ist. Mit dieser sehr genauen Anfangsverteilung von Haack-Zierep und einem Charakteristiken-Verfahren werden dann verschiedene Überschalldüsen berechnet und einschlägige Probleme behandelt. Für die Praxis interessant wäre die Beantwortung der Frage, inwieweit nicht schon die Formeln erster Näherung von Oswatitsch-Rothstein genügen.

K. Oswatitsch.

Schwaar, Pierre: Contribution à l'étude des compresseurs axiaux supersoniques. Z. angew. Math. Phys. **5**, 136—150 (1954).

Die Strömung in einem Verdichter wird idealisierend beschrieben als kompressibel, achsensymmetrisch und reibungsfrei mit verschwindender Radialkomponente. Das Gas möge mit Überschallgeschwindigkeit in einen Leitapparat eintreten und dort einen für jede Stromlinie senkrechten Verdichtungsstoß passieren. Aus der radialen Gleichgewichtsbedingung vor und hinter dem Stoß sowie den Stoßbeziehungen folgt eine Differentialgleichung, deren Auflösung explizit die Mach-Zahl als Funktion des Radius liefert. Weiter ergeben sich spezifische Energie und „polytropischer Wirkungsgrad“. Ein numerisches Beispiel zeigt die radiale Veränderlichkeit der verschiedenen dimensionslosen Größen. Aus ihr schließt Verf. auf Stabilität der betrachteten Strömung. Möglichkeiten zu ihrer technischen Erzeugung werden diskutiert; dabei werden Werte für Nabenverhältnis des einzigen Laufrades, Geschwindigkeiten, Strömungsrichtungen, Druck und Temperatur angegeben. Die hier angenommene einfache Anordnung ermöglicht nur eine mäßige Drucksteigerung.

F. Wecken.

Roy, Maurice: Formules pour ondes de choc stationnaires. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2369—2372 (1954).

Verf. betrachtet ebene stationäre Strömungen eines idealen Gases ($\gamma = \text{const.}$), die vor einer Stoßwelle Ω isentropisch sind. Es werden Beziehungen angegeben zwischen den die Strömung beiderseits Ω kennzeichnenden Größen (Geschwindigkeiten, Drücken, Dichten, Winkeln) in einem Punkt P von Ω , sowie darüber hinaus zwischen gewissen Ableitungen tangential und normal zur Strömung und zur Stoßlinie (Entropieänderung, Wirbelstärke, Krümmungen, Beschleunigungen). Wenn Ω in P senkrecht zur Anströmung steht, vereinfachen sich die Formeln erheblich und liefern einige anschauliche Aussagen, insbesondere Vorzeichenregeln für Krümmungen und Beschleunigungen; dabei erweist sich $M_1 = \frac{1}{2}(\gamma + 3)$ als ein kritischer Wert der Anströmung.

F. Wecken.

Lin, Shao-Chi: Cylindrical shock waves produced by instantaneous energy release. *J. appl. Phys.* **25**, 54—57 (1954).

Es wird der Fall untersucht, daß eine längs einer unendlich langen Geraden konzentrierte Energie plötzlich freigesetzt wird und zu einer zylindrischen Stoßwelle führt. Druck, Dichte und Geschwindigkeitsbeziehungen werden mit Hilfe von Ähnlichkeitsannahmen mit den für starke Stöße gültigen Vernachlässigungen berechnet und führen auf drei nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung, die für $\gamma = 1,4$ numerisch gelöst werden. Diese Lösungen werden mit den von Taylor (1950) für das entsprechende kugelsymmetrische Problem gewonnenen Ergebnissen verglichen. Die Ergebnisse können auf die Energieausbreitung in Blitzen und näherungsweise auch auf die Stoßwellenausbreitung bei einem mit Hyperschallgeschwindigkeit fliegenden Körper angewandt werden.

W. Wuest.

Brown, W. F. and T. Y. Thomas: Limiting behavior of pressure derivatives behind shocks in supersonic gas flow. *J. rat. Mech. Analysis* **3**, 231—245 (1954).

Man betrachtet ebene stationäre isenergetische Überschallströmungen hinter der anliegenden Stoßfront eines gekrümmten Störkörpers in Parallelanströmung, d. h. also drehende Strömungen. Die Entropie S ist dann längs Stromlinien konstant und kann zu deren Individualisierung herangezogen werden. Von den Stromlinien wird angenommen, daß ihre Neigung ω gegen die x -Achse (= Richtung der Anströmung) eine monoton abnehmende Funktion der Bogenlänge der Stromlinie ist. S und ω bestimmen dann eindeutig die Punkte des Überschallfeldes hinter dem Stoß. Der Druck p (und natürlich auch die Dichte ρ und die Geschwindigkeit v) kann als Funktion $p(S, \omega)$ angesehen werden. Sie wird als mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen vorausgesetzt. Diese Ableitungen $\partial p / \partial \omega$ und $\partial p / \partial S$ waren früher bestimmt worden (T. Y. Thomas, dies. Zbl. **35**, 418). Der recht komplizierte Ausdruck für $\partial p / \partial S$ hat dabei die Unbequemlichkeit, unbestimmt zu werden, wenn man längs der Stoßfront ins Unendliche geht. Dieser Grenzwert wird in der vorliegenden Note dadurch bestimmt, daß die in $\partial p / \partial S$ eingehenden einzelnen Terme auf ihre Größenordnung im Dichtesprung $[\rho]$ durch die Stoßfront hindurch untersucht werden, wobei dann $[\rho] = 0$ im Grenzwert zur Bestimmung von $\lim \partial p / \partial S$ führt. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\partial(p/p_1)}{\partial S} \rightarrow \frac{4(\kappa + 1) \cos^2 \alpha_0 - 8 \cos^4 \alpha_0 - (\kappa + 1)}{8(\kappa - 1) \cos^4 \alpha_0} \quad \left(\text{und analog} \quad \frac{\partial(p/p_1)}{\partial \omega} = \frac{\kappa M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right).$$

Dabei ist $\kappa = c_p/c_v$, p_1 der Druck und α_0 der Machsche Winkel der Anströmung. Diese Funktionen werden über der Machzahl M der Anströmung tabuliert und aufgezeichnet. — Schließlich wird die Richtung der Isoklinen $\omega = \text{const}$ in Punkten der Stoßfront und die Veränderlichkeit des Drucks längs der Isoklinen bestimmt. Der Zusammenhang dieser Untersuchungen mit dem Problem der Berechnung der Druckverteilung um vorn zugespitzte Halbkörper mit größter Dicke im Unendlichen bei anliegender Stoßwelle wird aufgezeigt.

H. Behrbohm.

Jones, C. W.: On gas flow in one dimension following a normal shock of variable strength. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **221**, 257—267 (1954).

Es wird der Fall eines Stoßes in einer anfänglich in Ruhe befindlichen gasförmigen Flüssigkeit untersucht, indem der Druck konstant und die Temperatur veränderlich angenommen werden. Die Bewegung soll eindimensional sein, während der Stoß fortschreitet. Eine ungleichförmige Entropieverteilung kommt hinter dem Stoßpunkt zustande, so daß die Strömung als nicht homentropisch, also als instabil betrachtet sein soll. Verf. stellt die Eulerschen Bewegungsgleichungen der gasförmigen Flüssigkeit in Lagrangescher Form dar, indem er die Entropie S und die Zeit t als unabhängige Variablen annimmt. Das ganze Problem wird auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus zurückgeführt. Verf. untersucht eine Partikulärlösung, die nur von $\xi = t \exp(-x^{-1} \kappa S)$ abhängt ($\kappa, \kappa = \text{Konstanten}$). Sämtliche Parameter des Problems werden sodann als Funktionen von ξ ausgedrückt. Somit wird die Zentralgleichung in die Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gebracht. In dem speziellen Falle, wo die Dichte und die Lage des Stoßes durch $\varrho_0(x) = \sigma_0 x^n$ bzw. $x = x_1 = \mu t^b$ ($\sigma_0, \mu, b = \text{Konstanten}$) ausgedrückt werden, erhält Verf. eine „exakte“ Lösung, die in qualitative Verbindung mit den exakten Lösungen der Grenzschichttheorie gebracht wird. Es handelt sich um eine fortschreitende Welle, die ähnlich der von Courant und Friedrichs für Kugelströmungen konstruierten aussieht.

V. Válcovici.

Cabannes, Henri: Influence des accélérations sur la courbure des ondes de choc. I. Écoulements de révolution. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 321—323 (1954).

Ein vorn zugespitzter Drehkörper bewege sich beschleunigt in Richtung seiner Achse in ruhender Luft, doch so, daß der an der Spitze entstehende Stoß am Körper

anliege (wegen des entsprechenden Problems für einen stumpfen Drehkörper vgl. dies. Zbl. 50, 199). Die Zustandsgrößen und die Geschwindigkeit werden um die Spitze des Drehkörpers nach Potenzen von r (Abstand von der Spitze) entwickelt. Die von r freien Glieder geben die quasi-stationäre Strömung, die nur mittels der Anfangsbedingungen von der Zeit t abhängt, während die in r linearen Glieder nicht-stationär sind. Es ergibt sich eine Beziehung zwischen der Krümmung des Drehkörpers an der Spitze und der der Stoßfront. *C. Heinz.*

Cabannes, Henri: Influence des accélérations sur la courbure des ondes de chocs. II. Écoulement plans. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 448—449 (1954).

Die in Teil I (vorstehend. Referat) für rotationssymmetrische Strömungen gestellte Aufgabe wird in vorliegender Arbeit für ebene Strömungen gelöst. Die Gleichungen können streng, d. h. ohne Linearisierung hinsichtlich der Beschleunigung gelöst werden. Die Ergebnisse sind analog den bei Behandlung der rotations-symmetrischen Strömungen erhaltenen. *C. Heinz.*

Chester, W.: The diffraction and reflection of shock waves. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 57—82 (1954).

Vorliegende Untersuchung behandelt das räumliche Problem einer auf einen schräggestellten Keil auftreffenden ebenen Stoßwelle. Die Vorderkante des Keiles kann dabei einen beliebigen Winkel β mit der Stoßwellenebene bilden. Der Winkel zwischen Keilfläche und Stoßwellenebene soll dagegen nahezu 90° betragen (streifender Einfall der Stoßwelle), so daß die Grundgleichungen linearisiert werden können. Es handelt sich also um eine Erweiterung des bereits von Lighthill und anderen behandelten Falles $\beta = 0$. Auch hier kann die Zahl der Veränderlichen dadurch herabgesetzt werden, daß keine charakteristische Länge vorkommt. Die Ergebnisse der Rechnung, deren Gang sich an den erwähnten Sonderfall anschließt, zeigen, daß die Druckverteilungen etwa bis zu Winkeln $\beta = 50^\circ$ sich nur unwesentlich gegenüber dem Fall $\beta = 0$ ändern, darüber hinaus sind die Änderungen bis zum Grenzwinkel β_g erheblich. Der Grenzwinkel β_g hängt von der Machzahl (Stoßwellengeschwindigkeit, Schallgeschwindigkeit) ab und besitzt ein Minimum von $61,3^\circ$ für $M = 1,58$. *W. Wuest.*

Alpher, Raph A. and Robert J. Rubin: Normal reflection of shock waves from moving boundaries. J. appl. Phys. 25, 395—399 (1954).

Die Arbeit behandelt folgende Aufgabe: In einem Rohr, das mit idealem Gas gefüllt ist, fällt eine Stoßwelle auf einen Verdichtungsstoß ein, der von einem sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendem Kolben erzeugt ist, und wird am Kolben reflektiert. Die Aufgabe wird rein analytisch gelöst. *H. Wendt.*

Chester, William: The shock strength in the regular reflection of weak shock waves. J. aeronaut. Sci. 21, 347—349 (1954).

Verf. behandelt den Einfall eines (schwachen) Verdichtungsstoßes gegen einen (dicken) Keil. Der Fall, daß die Wände des Keils einen kleinen Winkel bilden, wurde früher von Tan (dies. Zbl. 45, 130) untersucht. *H. Wendt.*

Öhman, Lars: An experimental method for determining the drag of a shock wave with application to a ducted body. Flygtekn. Försöksanstalt., Medd. 51, 22 S. (1954).

Broer, L. J. F. and A. C. van den Bergen: On the theory of shock structure. II. Appl. Sci. Research. A 4, 157—170 (1954).

(Teil I. Broer, dies. Zbl. 48, 196). Eine endliche Tiefe ergibt sich für Verdichtungsstöße nicht nur auf Grund von Wärmeleitung und innerer Reibung, sondern auch auf Grund der Relaxationserscheinung beim Einstellen der Molekülschwingungen und unter Umständen der Molekülrotationen. Während Reibungs- und Relaxationseffekt schon früher in zwei getrennten Arbeiten behandelt wurden, werden sie nun gemeinsam, ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen, bearbeitet. Für große und kleine Relaxationszeiten werden Näherungen angegeben. *K. Oswatitsch.*

Goland, M. and Yudell L. Luke: An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds. J. aeronaut. Sci. 21, 275—276 (1954).

Ein Angriff auf das Problem des Flatterverhaltens dünner Beplankungsfelder — das sog. Blechfeldflattern — in Überschallströmung. Die Haut ist vorn und hinten senkrecht zur Strömung in starr angenommenen Trägern eingespannt gedacht. Sie ist in Spannweitenrichtung unendlich lang (ebenes Problem). Nur eine Seite der Haut ist der aerodynamischen Wirkung der Strömung ausgesetzt, die andere Seite erfährt konstanten Druck. Je nach dem elastischen Verhalten der Haut hat man das Membran- oder Plattenproblem vorliegen (die Praxis liegt zwischen diesen beiden Grenzfällen). In die Differentialgleichung der schwingenden Membran (Platte) wird für die zeitveränderliche Belastung der J. W. Miles'sche Ausdruck für den Druck beim instationären zweidimensionalen Überschallproblem eingesetzt [J. aeronaut. Sci. **14**, 351—358 (1947)] und damit eine Integro-Differentialgleichung für die lokale Schwingungsamplitude gewonnen. Deren formale Lösung wird mit Hilfe der Laplacetransformation für das Membranproblem angegeben (für das Plattenproblem würde derselbe Weg die entsprechende Lösung geben). Dabei sind die aerodynamischen und elastischen Bedingungen an der vorderen Einspannung benützt. Eine Flatterlösung existiert, wenn es Frequenzen gibt, für die auch die hintere Einspannungsbedingung erfüllt wird. — Die analytische Lösung ist zu kompliziert, als daß viele allgemeine Aussagen gemacht werden können. Man ist daher auf langwierige numerische Berechnungen angewiesen, die aber noch nicht ausgeführt wurden. Verff. behaupten allgemein: 1. Membranflattern kann nicht eintreten, wenn die Machzahl M hinreichend groß ist. 2. Weder Membran- noch Plattenflattern kann eintreten, wenn (b/q^2) (β/S) hinreichend groß ist [q Luftdichte, v Fluggeschwindigkeit, b halbe Tiefe des eingespannten Feldes (in Strömungsrichtung), $\beta^2 = M^2 - 1$, S Zugkraft der Einspannung pro laufendem Meter]. Ref. muß gestehen, daß ihn die Behauptung 2 sehr verblüfft.

H. Behrbohm.

Rubin, Hanan: The dock of finite extent. Commun. pure appl. Math. **7**, 317—344 (1954).

Um nach der linearisierten Theorie der Wasserwellen das Geschwindigkeitspotential q der Wasserbewegung zu ermitteln, die entsteht, wenn auf der einen Seite eines Dockes nach Amplitude, Phase und Wellenlänge vorgegebene Wellen ankommen, wird das komplementäre Differentialgleichungsproblem gelöst, eine exponentiell abklingende Bewegung mit dem Geschwindigkeitspotential $q e^{-\gamma}$ zu finden. Die Existenz von q wird bewiesen, indem die Transformation der Lösung γ des zweiten Problems in eine Lösung q des ersten Problems explizit angegeben und dann mit direkten Methoden der Variationsrechnung die Verbindung zwischen beiden Problemen durch Nachweis der Existenz einer Lösung des zweiten Problems bewirkt wird.

J. Pretsch.

Marchetti, Luigi: Moti oscillatori di un corpo rigido galleggianti in un liquido di cui si considera l'inerzia. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII, Ser. **15**, 387—393 (1954).

Die klassischen Untersuchungen über die Schwingungen eines in einer Flüssigkeit schwimmenden starren Körpers werden im Anschluß an eine Arbeit von G. Krahl aus dem Jahre 1946 auf den Fall erweitert, daß die Trägheit der Flüssigkeit mitberücksichtigt wird. Auf- und Abbewegung sowie das Stampfen erhalten so eine Beschleunigungskopplung, das Rollen nicht. Der Fall eines elliptischen Querschnittes der Schwimmebene wird genauer durchgerechnet.

G. Hamel.

Kraytchenko, Julien, Gaston Sauvage de Saint-Marc et Mladen Boreli: Sur les singularités des écoulements plans permanents des liquides en milieux poreux. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 209—211 (1954).

Il s'agit d'un problème qui se ramène à la recherche d'un potentiel complexe dans un polygone satisfaisant à certaines conditions sur les côtés. La forme que doit avoir le potentiel au voisinage des sommets fait intervenir des exposants caractéristiques dont la recherche a été entreprise dans: Polubarinova-Kocina, Théorie du mouvement des eaux souterraines, Moscou 1952, pp. 304—326, ce Zbl. **49**, 136. Les A.A. se proposent de calculer ces exposants par une méthode élémentaire qui a paru assez obscure au rapporteur. Il semble que des conditions aient été sous-entendues.

R. de Possel.

Asatur, K. G.: Über die instationäre Bewegung des zu einem Wasserreservoir hinströmenden Grundwassers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 233—236 (1954) [Russisch].

- Nužin, M. T.: Über Stellung und Lösung der inversen Aufgabe der Filtration mit Druck. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 709—711 (1954) [Russisch].
- Weijdenma, J.: Exchange of liquid between paper pores. Appl. Sci. Research, A 4, 225—228 (1954).
- Aronofsky, J. S.: Effect of gas slip on unsteady flow of gas through porous media. J. appl. Phys. 25, 48—53 (1954).

Wärmelehre:

- Becker, Richard: Über die Beschreibung stationärer statistischer Funktionen. Z. angew. Phys. 6, 231—235 (1954).
- Falkenhagen, H. und K. Kelbg: Klassische Statistik unter Berücksichtigung des Raumbedarfs der Teilchen. II. Ann. der Physik, VI. F. 14, 391—396 (1954).
- Münster, Arnold: Anwendung der δ -Funktion auf die mikrokanonische Gesamtheit. Z. Phys. 137, 386—391 (1954).
- Verf. zeigt, daß sich eine Reihe der von Gibbs angegebenen Beziehungen für die mikrokanonischen Gesamtheiten formal sehr einfach mit Hilfe der δ -Funktion gewinnen lassen. Dies wird speziell an den Beispielen des Aquipartitionstheorems, der Temperatur und der Entropie vorgeführt. *F. Penzlin.*
- Meixner, J.: Zur Nachwirkungstheorie der elastischen Relaxation. Z. angew. Phys. 6, 215—217 (1954).
- Hanszen, Karl-Joseph: Die Anwendung der phänomenologischen Theorie der irreversiblen Prozesse auf kontinuierliche Systeme im inhomogenen Magnetfeld. Z. Naturforsch. 9a, 323—331 (1954).
- Rastogi, R. P. and R. C. Srivastava: Non-equilibrium thermodynamics of thermal transpiration of a dissociating gas. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 639—640 (1954).
- Popoff, Kyrille: L'osmose à la lumière de la théorie des processus thermodynamiques irréversibles. Ann. de Physique, XII. Sér. 9, 261—268 (1954).
- Verschaffelt, J. E.: Sur le minimum de production d'entropie. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 8—17 (1954).
- Reik, Helmut G.: Ergänzung zu meiner Arbeit „Zur Theorie irreversibler Vorgänge. II.“ Ann. der Physik, VI. F. 14, 174—176 (1954).
- MacDonald, D. K. C.: The Brownian movement of linear and non-linear systems. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 63—68 (1954).
- Verf. versucht am Beispiel des über einen Ohmschen Widerstand geschlossenen Kondensators die üblichen Ansätze zur Berechnung der Schwingungserscheinungen so zu erweitern, daß auch nichtlineare Probleme behandelt werden können. Er nimmt hierzu willkürlich, aber zunächst plausibel (vgl. jedoch das folgende Referat!) an: Sei q der Mittelwert von q über eine Gesamtheit von gleichen Systemen, die zur Zeit $t = 0$ alle $q = q_0$ zeigen (q ist beim Kondensatorproblem die Ladung). Dann soll die übliche Relaxationsgleichung, die im linearen Fall zu den richtigen Ergebnissen führt, auch im nichtlinearen Fall (z. B. Widerstand ladungsabhängig) gelten. Verf. rechnet das Beispiel $R = R_0 + a \cdot q^2$ durch. *Gerhard U. Schubert.*
- Polder, D.: Note on the theory of Brownian motion in nonlinear systems. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 69—72 (1954).
- Es wird gezeigt, daß die im voranstehenden Referat genannte Hypothese von MacDonald über die Anwendbarkeit der Relaxationsgleichung im nichtlinearen Fall zu Widersprüchen führt. Verf. gibt ein einfaches Beispiel für einen ladungsabhängigen Widerstand an, bei dem dies der Fall ist und bei dem der Grund für das Versagen der Theorie von MacDonald physikalisch durchsichtig ist. Es wird dann ein Weg aufgezeigt, wie man die von Kramers 1940 entwickelte Theorie auf ein nichtlineares Problem anwenden kann. *Gerhard U. Schubert.*

Pogorzelski, W.: Problème du mouvement stationnaire dans une couche gazeuse rayonnante. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 2, 7—8 (1954).

Filippov, L. P.: Der Einfluß der Ausstrahlung und Absorption eines Mediums auf den Prozeß der Wärmeübertragung. *Vestnik Moskovsk. Univ.* 9, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 51—56 (1954) [Russisch].

Pikus, G. E.: Über die Lösung einer Form von instationären Wärmeaufgaben. *Žurn. techn. Fiz.* 24, 287—291 (1954) [Russisch].

Eine Methode für die Lösung des Problems des Wärmeaustauschs zwischen einem Körper und einem Medium mit konstanter Temperatur wird untersucht; sie gestattet, für bestimmte Anfangstemperaturen die Lösung des mehrdimensionalen Problems auf die Lösung eindimensionaler Probleme zu reduzieren. Autoreferat.

Jain, S. C. and Sir K. S. Krishnan: The distribution of temperature along a thin rod electrically heated in vacuo. I. Theoretical. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 222, 167—180 (1954).

Scott, D. R.: Transient heat flow in anisotropic strata. *Proc. phys. Soc., Sect. B* 67, 731 (1954).

Blackwell, J. Hl.: A transient-flow method for determination of thermal constants of insulating materials in bulk. *J. appl. Phys.* 25, 137—144 (1954).

Per alcune misure di geofisica interessa conoscere la legge di variazione della temperatura di un corpo di forma cilindrica contenente una sorgente di calore e immerso in un mezzo solido di dimensioni notevoli e inizialmente a temperatura nulla. Il problema è risolto supponendo: a) il corpo dotato di una certa conduttività esterna, b) perfetta la sua conduttività interna, c) radiale il flusso di calore nel mezzo, cioè la temperatura nel mezzo funzione solo della distanza dall'asse del cilindro. Dopo alcune approssimazioni (non rigorosamente giustificate come afferma l'A.) la legge cercata viene scritta, per valori grandi del tempo, in forma molto semplice ed utile. Viene infine discussa la validità delle ipotesi b) e c). D. Graffi.

Fowler, C. M.: Symmetry as a factor in finite difference approximations. *J. appl. Phys.* 25, 293—294 (1954).

Lochs, Gustav: Die Diffusion aus einer Platte oder Kugel bei geringem Umsatz. *Z. angew. Math. Mech.* 34, 79—80 (1954).

Elektrodynamik. Optik:

Durand, Émile: Solution des équations de Maxwell et des équations de Dirac pour des conditions initiales données. *J. Phys. Radium* 15, 281—287 (1954).

Die „identité fondamentale“ des Verf. ist eine geschickte Zusammenfassung der drei Terme (für die Anfangswerte von ψ und $c\psi/c t$ sowie für die Quellen ρ) der bekannten Darstellungsformel für das Anfangswertproblem der inhomogenen skalaren Wellengleichung. Bei der folgenden Anwendung auf die Maxwell'schen Gleichungen wird die Lorentzkonvention durch Hinzunahme einer geeigneten Lösung der homogenen Maxwellgleichungen und geschickte Verteilung der Anfangsbedingungen befriedigt. Für den zwei- bzw. eindimensionalen Fall wird eine Absteigemethode verwendet. Auch für Materiewellen (mit nicht verschwindender Ruhmasse) läßt sich eine ähnliche Fundamentalformel herleiten. So erhält Verf. eine Darstellungsformel für die Lösung des Anfangswertproblems der inhomogenen Diracgleichung. F. Penzlin.

Slansky, Serge: Sur le tenseur de Maxwell. *C. r. Acad. Sci., Paris* 238, 1103—1104 (1954).

Verf. schlägt $T_r^s = \frac{1}{8\pi} (A_k F^{ks}{}_{,r} - F^{ks} A_{k,r}) - \frac{1}{2} g_r^s A_k J^k + A_r J^s$ als Energie-Impuls-Tensor der Elektrodynamik vor; T_r^s erfüllt $T_{r,s}^s = J^s F_{rs}$, unterscheidet sich aber von dem üblichen Maxwell'schen Tensor in der Lokalisierung der Feldenergie: die Energiedichte einer ebenen monochromatischen Welle ist konstant, die eines statischen Feldes im Vakuum verschwindet. Es gilt $T_s^s \neq 0$. W. Urich.

Fraser, P. A.: A note on the multiple expansion of the scalar potential. *Amer. J. Phys.* 22, 37—38 (1954).

Chow, Shou-Hsien: On a nonlinear diffusion equation applied to the magnetization of saturable reactors. *J. appl. Phys.* 25, 377—381 (1954).

Kracmar, F.: Das magnetische Feld senkrecht gekrenzter, stromdurchflossener Leiter. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 8, 158—160 (1954).

• **Peters, Johannes:** Einschwingvorgänge, Gegenkopplung, Stabilität. Theoretische Grundlagen und Anwendungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. XV, 181 S. mit 130 Abb. Ganzleinen DM 27.—.

Der Kern des Buches ist der gegengekoppelte Verstärker und seine Stabilität. Es war das besondere Bestreben des Verf., die üblichen Stabilitätskriterien weiter zu entwickeln, um auch zu Aussagen über eine zweckmäßige Bemessung des Verstärkers zu gelangen. Um alle damit zusammenhängenden Fragen zu beantworten, wurde eine möglichst anschaulich und physikalisch gehaltene Theorie allgemeiner Netzwerke mit aktiven und passiven Elementen gegeben. Die Verwandtschaft zwischen Regel- und Gegenkopplungssystemen führte weiterhin zu einer Behandlung mechanischer Systeme in Analogie zu den elektrischen und zu den mechanisch-elektrischen Wandlern. Dementsprechend ist auch die Einteilung des Buches. Im 1. Kapitel werden statische und dynamische Eigenschaften linearer Systeme mit Hilfe einfacher funktionentheoretischer Sätze und der Grundlagen der Fourier- und der Laplace-Transformation behandelt. Das 2. Kapitel bringt die Übertragungsfaktoren passiver und aktiver Systeme, das 3. bringt die Stabilitätskriterien und die Stabilisierung. Im 4. Kapitel tritt das ursprüngliche Hauptthema, der gegengekoppelte Verstärker, auf, und es werden behandelt die Verstärkerfehler, die Gegenkopplung, die Fehlerverminderung durch die Gegenkopplung, das passive Netzwerk, die Hauptverstärkung und schließlich Sonderfälle und praktische Ausführungen. Im letzten 5. Kapitel werden mechanische, elektrische und mechanisch-elektrische Übertragungssysteme behandelt. Wie der Autor sagt, war es besonders das bekannte Buch von H. W. Bode „Network Analysis and Feedback Amplifier Design“ (4. ed., New York 1947), das ihm besonders viel gab, und das vorliegende Buch ist wohl auch in diesem Sinne zu verstehen als eine sehr gründliche und systematische Einführung in das wichtige und nicht ganz einfache Gebiet des rückgekoppelten Verstärkers, das es in dieser Art bisher nicht gab. — Die Behandlung des Gegenstandes ist sehr gründlich und klar durchgeführt, und die allgemeinen Prinzipien werden durchweg durch gerechnete Beispiele illustriert. Am Ende jeden Kapitels befindet sich eine Zusammenfassung, die das Wesentliche kurz rekapituliert. Am Ende des Buches ist ein sehr eingehendes Schrifttumsverzeichnis angegeben. Man kann also wohl sagen, daß das Buch eine erfreuliche Bereicherung der Verstärkerliteratur für alle diejenigen bedeutet, die mit den Problemen des gegengekoppelten Verstärkers zu tun haben, aber auch für alle diejenigen, die sich für die Theorie der Übertragung allgemein interessieren, die ja auch für sehr viele Fragen ganz abliegender Gebiete wichtig ist.

W. O. Schumann.

Reza, F. M.: RLC canonic forms. *J. appl. Phys.* 25, 297—301 (1954).

R. M. Foster [Bell System techn. J. 3, 259—267 (1924)] hat für Reaktanzfunktionen eine Partialbruchgestalt angegeben, der eine „kanonische“ Realisierung entspricht, nämlich eine Serienschaltung von einem L , einem C und einigen Schwingungskreisen. Verf. betrachtet Zweipole, die die Fostersche kanonische Schaltung dadurch verallgemeinern, daß in letzterer überall die L und C in bestimmter Weise durch andere Schaltungen zu ersetzen sind. Für die Impedanzfunktionen dieser Zweipole gibt Verf. Bedingungen an, die sich auf die Lage ihrer Nullstellen und Pole auf gewissen algebraischen Kurven beziehen.

A. Stöhr.

Povarov, G. N. Über die Synthese von Mehrpol-Kontakten. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 94, 1075—1078 (1954) [Russisch].

Sternberg, R. L. and H. Kaufman: A general solution of the two-frequency modulation product problem. I. *J. Math. Physics* 32, 233—242 (1954).

Sternberg, Robert L.: A general solution of the two-frequency modulation product problem. II. Tables of the functions $A_{nm}(h, k)$. *J. Math. Physics* 33, 68—79 (1954).

Sternberg, Robert L.: A general solution of the two-frequency modulation product problem. III. Rectifiers and limiters. *J. Math. Physics* 33, 199—205 (1954).

Gilbert, E. N.: Lattice theoretic properties of frontal switching functions. *J. Math. Physics* 33, 57—67 (1954).

Verf. wünscht Schalterfunktionen zu betrachten, die durch Relais ohne oder mit sehr wenigen „rückwärtigen Kontakten“ (Ruhekontakten) verwirklicht werden; das mathematische Äquivalent ist die Darstellung einer Booleschen Funktion ohne oder unter sehr sparsamer Ver-

wendung von Negationsoperatoren. Funktionen, die überhaupt keine Negationen erfordern (in der Ausdrucksweise des Verf.: frontale Schalterfunktionen), lassen sich dadurch kennzeichnen, daß sie eine schwach monotone Abbildung des teilweise geordneten Booleschen Verbandes der Schalterstellungen auf den in passender Weise ebenfalls teilweise geordneten Raum der Funktionswerte bewirken; dies Kriterium läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, daß nur eine Teilmenge der Schalterstellungen und der Funktionswerte in Betracht gezogen wird. Die Anzahl der frontalen Schalterfunktionen $\eta(n)$ für Zweipole mit n Relais wird durch $2^x \leq \eta(n) \leq n^x - 2$

abgeschätzt, wo $x = \left(\frac{n}{[n/2]} \right)$ gesetzt ist. Für nicht notwendig frontale Schalterfunktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ für Zweipole mit n Relais werden durch passende Zusammenfassungen Darstellungen von der Gestalt $f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_s)$ angegeben, wo F eine frontale Schalterfunktion ist und g_k eine frontale Schalterfunktion von $x_1, \dots, x_n, g_1, \dots, g_{k-1}$ ist; der Akzent bedeutet die Negation. s kann dabei bis auf einen Wert $K(n) \cdot \log_2 n$ [wo $K(n)$ für $n \rightarrow \infty$ zwischen positiven Schranken bleibt], aber nicht allgemein noch weiter herabgedrückt werden.

A. Stöhr.

Minakova, I. I.: Zur Theorie der Synchronisation bei Harmonischen der Eigenschwingungen. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 61—64 (1954) [Russisch].

Suchanowskij, V. V.: Theorie der mehrschichtigen dielektrischen Bedeckungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 245—248 (1954) [Russisch].

Argence, Émile et Marcel Mayot: Détermination de l'altitude et de la demi-épaisseur d'une couche ionosphérique régulière, compte tenu de l'action du champ magnétique terrestre (rayons ordinaire et extraordinaire). C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1721—1723 (1954).

Lo, Y. T.: Electromagnetic field of a dipole source above a grounded dielectric slab. J. appl. Phys. 25, 733—740 (1954).

In der Arbeit wird das Strahlungsfeld eines Dipols untersucht, der in der Höhe $z = b$ über einer vollkommen leitenden Ebene vertikal angeordnet ist. Unmittelbar über der leitenden Ebene liegt eine planparallele elektrische Schicht von der Dicke $a \ll b$, deren Brechungsindex als bekannt vorausgesetzt wird. Die lösende Integraldarstellung für die Komponente H_z des Hertzschen Vektors, aus der sich alle Feldkomponenten durch Differentiation bestimmen lassen, wird in der durch die Arbeiten Sommerfelds bekannten Art und Weise hergestellt. Die auf die numerische Berechnung abzielende Weiterbehandlung der Lösung wird auf die Untersuchung des Fernfeldes beschränkt. Dabei wird die Methode der Sattelpunktsintegration verwendet. Auch tritt die Schwierigkeit auf, daß unter gewissen Voraussetzungen ein Pol in der Nähe des Sattelpunktes auftritt. Die dabei entstehende Komplikation wird durch das von van der Waerden angegebene Verfahren (dies. Zbl. 45, 66) überwunden.

H. Buchholz.

Wait, James R. and Walter J. Surtees: Impedance of a top-loaded antenna of arbitrary length over a circular grounded screen. J. appl. Phys. 25, 553—555 (1954).

Es wird hier die Aufgabe behandelt, die Strahlungsimpedanz eines vertikalen Dipols zu berechnen, der in einer endlichen Höhe über dem als unendlichen Halbraum aufgefaßten Erdkörper steht, wenn auf der Erdoberfläche achsialsymmetrisch zum Dipol noch eine leitende Kreisscheibe vom Radius a angeordnet ist. Diese Aufgabe ist streng nicht lösbar. Es wird deshalb ein besonderes Näherungsverfahren angewendet, das bei einer ähnlichen Aufgabe zuerst von Abbott [Proc. Inst. Rad. Eng. 46, 846 (1952)] benutzt worden ist. Dieses Verfahren verzichtet auf die Berechnung des Strahlungsfeldes. Es wird vielmehr aus allgemeinen physikalischen Überlegungen gemäß diesem Verfahren unmittelbar ein Integralausdruck für die Impedanz hergeleitet. Die Auswertung dieses Integrals führt im vorliegenden Fall auf die Funktionen Integralsinus und Integralkosinus.

H. Buchholz.

Wait, James R.: On the theory of an antenna with an infinite corner reflector. Canadian J. Phys. 32, 365—371 (1954).

Storer, J. E. and J. Seviak: General theory of plane-wave scattering from finite, conducting obstacles with application to the two-antenna problems. J. appl. Phys. 25, 369—376 (1954).

In der Arbeit werden die von Levine und Schwinger entwickelten Methoden, die auf dem Einsatz der Variationsrechnung beruhen, dazu benutzt, um eine Nähe-

ungslösung für die Rückstrahlung ebener elektromagnetischer Wellen von seiten vollkommen leitender Hindernisse endlicher Größe zu erhalten. Dabei werden etwaige Kopplungseffekte bei mehreren Hindernissen mit berücksichtigt. In großer Entfernung von den Objekten läßt sich das zurückgeworfene Feld durch die Ströme auf der Oberfläche der störenden Körper darstellen. Im besonderen wird der Fall ausgearbeitet, wo die störenden Hindernisse zwei parallele Drähte endlicher Länge sind. Die Ergebnisse der Rechnung stimmen mit dem Experiment gut überein.

H. Buchholz.

Bouix, Maurice: Caractérisation d'une direction de gain maximum et de polarisation stationnaire pour le rayonnement électromagnétique monochromatique à l'infini d'un système quelconque. *Cl. r. Acad. Sci., Paris* 239, 35—37 (1954).

Bachrach, L. D.: Über den maximalen Koeffizienten der Richtwirkung einer linearen und einer ebenen Antenne. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 95, 45—48 (1954) [Russisch].

Maas, G. J. van der: A simplified calculation for Dolph-Tchebycheff arrays. *J. appl. Phys.* 25, 121—124 (1954).

Unter einer Dolph-Tchebycheff Antennenanordnung versteht man bekanntlich ein lineares aus homologen Elementarstrahlungen aufgebautes Antennensystem, deren Strahlungscharakteristik nur solche Hauptmaxima besitzt, welche in der Ebene senkrecht zur gemeinsamen Dipolachse liegen. Dabei wird noch verlangt, daß die Nebenzweige der Charakteristik bei konstant gehaltenem Hauptmaximum minimalisiert werden. Dies führt zu einer analytischen Darstellung durch Tchebycheffsche Polynome, aus welchen dann die einzelnen Antennenströme zu berechnen sind. Der Verf. der vorliegenden Arbeit hat eine von D. Barbière herrührende Lösung — die Antennenströme sind dabei durch alternierende endliche Reihen gegeben — in eine für numerische Zweckbranchenbare Reihe umsummiert, welche nur mehr aus Gliedern eines Vorzeichens besteht. Der Autor zeigt zunächst, daß die Barbièresche Lösung (bis auf einen unwesentlichen Faktor) einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, welche durch eine Transformation in eine Differentialgleichung von hypergeometrischen Typ verwandelt wird. Die Lösungen der letzteren Gleichung sind Jacobische Polynome, deren Reihenentwicklung zu der vom Verf. gegebenen Darstellung führt. Für einen Grenzfall (große Anzahl der Elementarantennen) können aus der allgemeinen Reihendarstellung die Antennenströme durch Besselsche Funktionen ausgedrückt werden.

P. Urban.

Socio, Marialuisa De: Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 16, 63—68 (1954).

L'A. considera una guida d'onda formata dall'intercapedine fra due conduttori imperfetti ambedue a forma di semispazio e limitati da piani paralleli. Dimostra che ogni modo TM o TE , che si propaga in quella guida, si può rappresentar mediante la sovrapposizione di due onde piane evanescenti, di cui una si può interpretare come la riflessa dell'altra sulle pareti della guida stessa.

D. Graffi.

Pierce, J. R.: Coupling of modes of propagation. *J. appl. Phys.* 25, 179—183 (1954).

In der Theorie der leitungsgekoppelten Systeme nehmen die mehrwelligen Systeme, einem praktischen Bedürfnis der modernen Hochfrequenztechnik folgend, einen besonderen Platz ein. Viele Anordnungen der Übertragungstechnik, wie sie etwa durch Verzweigungsglieder und Umwandlungsglieder dargestellt werden, sind durch die Kopplung verschiedener Wellentypen charakterisiert. Im Schema der $2n$ -Poltheorie lassen sich derartige Systeme allgemein behandeln, was insbesondere für die Klasse der verlustfreien $2n$ -Pole, welche dem Umkehrsatz genügen, zutrifft. Freilich wird man meistens die Koeffizientenmatrix des Systems, vor allem ihr Frequenzverhalten, genauer kennen müssen um zu Aussagen zu gelangen, welche nicht nur rein formaler Art sind. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, die Eigenschaften der in periodisch wiederkehrenden Abständen freies Systems, welches zwei Wellentypen führt, die in periodisch wiederkehrenden Abständen durch homologe linear funktionierende Anordnungen (Transducer) miteinander gekoppelt sind, möglichst allgemein zu erfassen. Die für jeden Transducer des Systems geltende Vierpolmatrix liefert in Verbindung mit den Übertragungseigenschaften der Leitung eine Rekursionsformel (oder auch Differenzengleichung), aus welcher man die Bedingung für die Zu- oder Abnahme der Amplituden beider Wellentypen, die das System durchlaufen, ablesen kann. Außer der Verlustfreiheit des Transducer und der Leitung wird nur Gültigkeit des Umkehrsatzes angenommen, also ein passives System betrachtet.

P. Urban.

Vallese, L. M.: Diffusion of pulsed currents in conductors. J. appl. Phys. 25, 225—228 (1954).

Die Untersuchung der elektromagnetischen Wellenausbreitung, wenn keine zeitliche Periodizität angenommen wird, ist auch unter sonst vereinfachenden Voraussetzungen, wie Isotropie und Homogenität des Raumes, sehr verwickelt. Zu den einfachsten Problemen dieser Art, welche praktisch interessieren, gehört die Berechnung der Ausbreitung ebener Wellen, in unbegrenzten (oder einseitig durch eine Ebene begrenzten) metallischen Medien. Die Maxwell'schen Gleichungen liefern, wenn der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt wird, zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Typus der Diffusionsgleichung, aus welchen die Stromdichte und die magnetische Feldstärke in Abhängigkeit von der Zeit und der einzigen auftretenden Raumkoordinate zu berechnen sind. Die Form der Differentialgleichungen sowie die vom Verf. gewählten Anfangs- und Randbedingungen legen eine Laplace-transformation nahe, mittels welcher in der vorliegenden Arbeit die Stromdichte in Form eines Integrals vom Faltungstyp angegeben wird. Für bestimmte Fälle der Laplacetransformierten des Gesamtstromes wird die explizite Lösung des Integrales angegeben und diskutiert. Im weiteren Verlauf berechnet der Verf. die äquivalente Eindringtiefe, wobei ein Gesamtstrom der Form $i(t) = J_0 f(t) \{U(t) - u(t - T_0)\}$ angenommen ist. Aus der allgemeinen Integraldarstellung der Lösung und aus der Forderung $iJ \text{ } t = 0$ findet der Verf. mittels eines Näherungsverfahrens die Eindringtiefe, welche als kleinste Wurzel obiger Bestimmungsgleichung gegeben ist.

P. Urban.

Poincelot, Paul: Sur la constante de temps d'un guide électrique cylindrique. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2394—2395 (1954).

Landecker, K.: On a property of a family of equiangular spirals and its application to some problems of wave propagation. J. appl. Phys. 25, 41—48 (1954).

Verf. diskutiert zunächst Eigenschaften der äquiangularen Spiralen $r = \exp[k(\varphi + \delta)]$, wo δ ein die Spiralfamilie angehöriger Parameter (Winkel), q eine die einzelnen Punkte einer Spirale bestimmende Winkelvariable bezeichnet, während r den von einem Punkt A ausgehenden Radiusvektor zum Punkt (r, φ) der Spirale bezeichnet. Es wird gezeigt, daß die von einem Punkt B ausgehenden Geraden, die in einem ihrer Schnittpunkte P mit der Spirale zu dieser orthogonal sind, durch die Eigenschaft des Punktes P gefunden werden, daß alle P auf ein und demselben, durch B und A gehenden Kreise liegen, dessen Mittelpunkt Schnitt des Mittellotes von BA mit dem freien Schenkel des in A an AB angetragenen Winkels $\varphi = \arctg k$ ist. (Nur endlich viele Normalen von B aus möglich!) Diese Spiralen verwendet Verf. zur Darstellung der Wellenausbreitung längs einer Zwischenleitung mit beliebig vorgeschriebener komplexer Dämpfungs-konstanten und einer beliebigen komplexen Abschluß-Impedanz, wobei also die Welle durch Spannung V und Strom I längs der Länge l der Leitung beschrieben werden kann: $V = A_0 e^{\gamma l} + B_0 e^{-\gamma l}$, $I Z_0 = A_0 e^{\gamma l} - B_0 e^{-\gamma l}$, wo Z_0 die komplexe charakteristische Impedanz der Leitung, A_0, B_0 komplexe Konstante, $\gamma = \alpha + i\beta$ komplexe Ausbreitungskonstante, α = (reelle) Dämpfungs-, β = (reelle) Phasenkonstante. Spannung und Strom lassen sich in jedem Punkte der Leitung durch Summe bzw. Differenz zweier (zweidimensionaler) Vektoren A und B darstellen. Es ergeben sich zwei äquidistante Spiralen für die Darstellung der Spannungs- und Stromvektoren sowie des Phasenwinkels längs der Zwischenleitung, und es ist $B = A r_1$ mit $r_1 = (Z_1 - Z_0)/(Z_1 + Z_0)$, wo Z_1 die eingeprägte Impedanz, r_1 der Reflexionskoeffizient im Abstände l von der Abschlußimpedanz sind. Zur Erleichterung der Anwendung des Verfahrens für die Bestimmung der vollständigen Wellenvorgänge wird ein besonderer „Neper“ und „Dezibel“-Maßstab angegeben. Verf. geht noch näher auf die graphische Bestimmung von Spannung, Strom und Phasenverteilung ein, die er an einem Beispiel näher erläutert. Ferner behandelt er mit Hilfe der äquiangularen Spiralen das folgende Problem: Zwei monochromatische Lichtstrahlenbündel, die von der gleichen Lichtquelle ausgehen, werden (z. B. durch ein Spiegelsystem) so gerichtet, daß sie in genau entgegengesetzter Richtung durch ein dämpfendes (absorbierendes) Medium laufen. Wie ist der resultierende Vorgang der stehenden Welle längs der Wege der Strahlenbündel in dem Medium beschaffen? Dieser Vorgang entspricht — wie Verf. erwähnt — dem elektrischen, daß zwei Generatoren der gleichen Frequenz an den beiden Enden einer nicht verlustfreien Leitung angeschlossen sind. Zum Schluß wird noch darauf hingewiesen, daß sich mit Hilfe der zu Anfang der Arbeit gezeigten Eigenschaft der äquiangularen Spiralen in den behandelten physikalischen Problemen die Stellen der Maxima und Minima von Spannung und Strom bestimmen lassen, worauf die sogenannte „Smith-Chart“ beruht.

J. Picht.

Ladyženskaja, O. A.: Über die Lösung der allgemeinen Beugungsaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 433—436 (1954) [Russisch].

The author considers in a general way boundary problems for the inhomogeneous wave equation, and analogous problems in elasticity theory. She considers mainly the time-dependent case, with a view to proving the existence and uniqueness of generalised solutions, which are weak solutions in a metric based on the differential

equation. There is no formal statement of results, the aim being to explain the mode of application of the finite-difference method of her book [The mixed problem for the hyperbolic equation, Moscow 1953 (in Russian)]. Practical applicability is also claimed for the method.

F. V. Atkinson.

Imai, Isao: Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Kreiszyylinder. Z. Phys. **137**, 31—48 (1954).

Die von Franz und Deppermann (dies. Zbl. **47**, 202) mittels der Maueschen Integralgleichungen durchgeführte Aufspaltung der am Zylinder gebeugten Welle in eine geometrisch reflektierte Welle und Kriechwellen, welche die Rückseite des Zylinders umlaufen, wird von Verf. durch eine komplexe Integraltransformation (die sog. Watson-Transformation, Ref.) neu abgeleitet; die dabei auftretenden „Residuenwellen“ sind mit den Kriechwellen identisch. Verf. erhält (im Gegensatz zu Fr.-D.) eine exakte Bestimmung der Koeffizienten sämtlicher Kriechwellen, und weist die Nichtexistenz der „Resterregung im Schatten“ (welche auf einem Rechenfehler bei Fr.-D. beruht) nach. Die Dämpfung der Kriechwellen ergibt sich in völliger Übereinstimmung mit Fr.-D. (Die Arbeit des Verf. enthält einige Fehler in den numerischen Werten, welche von Ref. an anderer Stelle berichtet werden.)

Walter Franz.

Elsässer, Hans: Lichtstreuung an einem Gemisch von dielektrischen Kugeln. Z. Astrophys. **34**, 50—67 (1954).

Es wird die an einem Gemisch dielektrischer Kugeln von einheitlichem Brechungsindex gestreute Lichtintensität im Abstand r nach der Mieschen Theorie berechnet, wobei vorausgesetzt wird, daß die Kugelradien groß sind gegenüber der Wellenlänge der einfallenden Strahlung und der Abstand r groß ist gegenüber den Abmessungen und gegenseitigen Entfernungen der Teilchen. Wenn die Kugelradien über einen genügend großen Bereich verteilt sind, wird die gestreute Intensität vom Brechungsindex unabhängig. Bei den gemachten Voraussetzungen streut ein Gemisch dielektrischer Kugeln in guter Näherung wie ein Gemisch totalreflektierender Teilchen.

H. Vogt.

Blanc-Lapierre, André et Pierre Dumontet: Sur la notion de cohérence en optique. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1005—1007 (1954).

Septier, Albert: Le pouvoir séparateur théorique de l'objectif à immersion électrostatique. J. Phys. Radium **15**, 573—581 (1954).

Bericht.

Schulz, Günter: Über Interferenzen gleicher Dicke und Längenmessung mit Lichtwellen. Ann. der Physik, VI. F. **14**, 177—187 (1954).

Der Verf. betrachtet die Interferenzen an einem einfachen Keil, etwa einem Luftkeil mit zurückwerfenden Grenzflächen. Jeder Punkt der (aus inkohärenten Lichtpunkten bestehenden) Lichtquelle werde in zwei kohärenten Lichtpunkten abgebildet, beide Bilder seien durch Drehung um eine Achse zur Deckung zu bringen. Der Drehwinkel sei 2θ (beim Luftkeil ist die Prismenkante Drehachse, θ der Keilwinkel). Es wird ein Verfahren angewandt, das in einer früheren Arbeit auseinandergesetzt ist [Ann. der Physik, VI. F. **13**, 421—428 (1953)], das „Prinzip der übereinstimmenden Ordnungen“. Ordnung m ist der Gangunterschied (in Wellenlängen), mit dem das von zwei kohärenten Lichtpunkten kommenden Licht in einem betrachteten Punkte anlangt. Als Interferenzgebiet wird ein Gebiet angenommen, wo die Gangunterschiede nur um einen gewissen Betrag σ schwanken, σ ist „ein echter Bruch mittlerer Größen“, in einem Beispiel wird er zu $2/3$ angenommen. — Für jeden Punkt P kommt ein gewisser Aperturbereich in Frage, für jedes kohärente Punktpaar wird ein „Lichtmittelstrahl“ durch P gehen. Die Achse des als Kreiskegel angenommenen Kegels der Mittelstrahlen heißt mittlere Lichtrichtung. Durch die Drehachse wird eine Ebene („Schärfenebene“) senkrecht zu dieser Richtung gelegt, jeder Punkt P ist bestimmt durch seinen Abstand h von dieser Ebene und durch den Abstand p der Projektion von der Drehachse; einen Strahl durch P kennzeichnet der Winkel q mit der mittleren Lichtrichtung ($q_{\max} = u$, Aperturwinkel), und ein Azimut z ; $z = 0$ senkrecht zur Drehachse. (Es wird eine entsprechende Einstellung angenommen.) Für die Ordnung m wird die Formel erhalten: $m = C^{-1} (p \cos q + h \sin q \cos z)$. Hier ist $C = \lambda / 2 \sin \theta$ mit einem Unsicherheitsfaktor zwischen $\cos \theta$ und $1 \cos \theta$. [Die Ableitung enthält zugestandenmaßen einige Vernachlässigungen;

nicht klar ist Ref., wie Formel (5), namentlich bei allgemeiner Annahme über die Lichtquellenzustände kommt.] Damit kommt für das Interferenzgebiet die Bedingung $p(1 - \cos u) + |h| \sin u \leq \sigma C$, für die mittlere Ordnung: $\bar{m} = (p/2C)(1 + \cos u)$. Das Interferenzgebiet wird durch eine Zeichnung veranschaulicht, die Erscheinung ist am deutlichsten in der Nähe der Schärfenebene und der Drehachse. Der Abstand der parallel zur Achse verlaufenden Streifen ist $2C/(1 + \cos u)$. Es wird noch eine genauere Formel angegeben und das Ergebnis auf Längen- und Dickenmessungen angewandt; hier sei ein Korrektionsfaktor $2(1 + \cos u)$ nötig, was auch durch Versuche bestätigt werde. Eine Schlussbemerkung über „Schwebungen“ ist Ref. nicht recht verständlich. H. Boegehold.

Pitts, E.: The application of radiative transfer theory to scattering effects in unexposed photographic emulsions. *Proc. phys. Soc., Sect. B* **67**, 105–119 (1954).

Redheffer, R. M.: Novel uses of functional equations. *J. rat. Mech. Analysis* **3**, 271–279 (1954).

I. An einer ebenen Platte der Dicke x möge eine Strahlung teils reflektiert, teils absorbiert, teils durchgelassen werden; die (im allgemeinen komplexen) Reflexions- und Absorptionskoeffizienten seien $R(x)$ und $T(x)$. Die Platte braucht nicht homogen zu sein; ihre dielektrischen Eigenschaften dürfen von x abhängen. Aus der Art, wie sich die Koeffizienten für eine Schicht der Dicke $x + y$ aus denen zweier Schichten der Dicken x und y zusammensetzen, folgert Verf., daß $R(x)$ einer Riccatischen Differentialgleichung genügt; $T(x)$ kann dann aus $R(x)$ durch eine Quadratur erhalten werden. — II. In einem mit Strahlung erfüllten Hohlraum mögen sich zwei Stücke absorbierenden Materials mit den Volumina v und v' befinden. Die Energieaufnahme von v bei Anwesenheit von v' hängt unter passenden Bedingungen erfahrungsgemäß angenähert nur von den Volumina ab und werde mit $f(v, v')$ bezeichnet. Aus der Relation $f(v, v') + f(v', v) = f(v + v', 0)$ und der ebenfalls empirischen Gleichung $f(v, 0) = a v/(v + b)$ leitet Verf. die Gleichung $f(v, v') = a_0 v/(v + v' + b_0)$ her (a_0, b_0 sind Konstanten); gewisse Abweichungen von anderen experimentellen Erfahrungen, die auf Unverträglichkeit der gemachten Annahmen hindeuten, werden diskutiert. A. Stöhr.

Grümm, H.: Bemerkungen zur chromatischen Aberration von Elektronenlinsen. *Ann. der Physik, VI. F.* **14**, 193–200 (1954).

Der Farbfehler von Elektronenlinsen wird vom Standpunkt der vom Ref. gemeinsam mit P. Schiske entwickelten wellenmechanischen Abbildung behandelt. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß während der Expositionszeit die Veränderung der Voltgeschwindigkeit durch eine lineare Funktion der Zeit dargestellt werden kann. Die resultierende Arbeitsdichte, welche von den zu den verschiedenen Geschwindigkeiten gehörenden wellenmäßigen Stromdichten herrührt, wird angenähert berechnet. Hierbei wird insbesondere ein Amplitudenobjekt mit einer Durchlässigkeit in Gestalt einer Gaußschen Glockenkurve betrachtet. Der Fall, daß der Farbfehler die Halbwertsbreite dieser Verteilung nicht beeinflusst, also die Möglichkeit der Korrektur des Farbfehlers wird untersucht und speziell für das magnetische Glockenfeld diskutiert. W. Glaser.

Brewer, George R.: On the focusing of high-current electron beams. *J. appl. Phys.* **25**, 243–251 (1954).

Die Fokussierung von Elektronenbündeln hoher Stromdichte mittels eines Systems von periodisch angeordneten Magnetlinsen wird untersucht. Mit Hilfe eines Analogie-Rechengerätes wurden die Bahnen der Elektronen unter dem gemeinsamen Einfluß von Magnetfeld und Raumladung berechnet. Ausführliche Kurvendarstellungen geben die Lage des Strahlminimums und den minimalen Querschnitt als Funktion der Linsenerregung und der Strahlstromstärke wieder. Den Berechnungen wird das magnetische Glockenfeld zugrunde gelegt. Weiter werden die Bedingungen für kleinste chromatische Aberration diskutiert. Schließlich wird eine Methode der graphischen Bahnermittlung im elektrisch-magnetischen Feld unter dem Einfluß der Raumladung angegeben und durch das ausgeführte Beispiel eines Hohlbündels in einer elektrischen Rohrlinse belegt. W. Glaser.

Marton, L., J. Arol Simpson and S. H. Lachenbruch: Electron-optical shadow method of magnetic-field mapping. *J. Res. nat. Bur. Standards* **52**, 97–104 (1954).

Berry, Clifford E.: Ion trajectories in the omegatron. *J. appl. Phys.* **25**, 28–31 (1954).

Bernard, Michel-Yves: Sur l'importance de la divergence créée par les coupures accélératrices dans les accélérateurs linéaires d'ions. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 675–677 (1954).

Jacobs, Ira and E. S. Akeley: Transverse motion of an electron in a constant wave speed section of a linear accelerator. *J. appl. Phys.* **25**, 572—576 (1954).

Seiden, Joseph: Les instabilités des orbites dues aux nonlinéarités dans le cosmotron. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 230—232 (1954).

Seiden, Joseph: Les instabilités des orbites dues au couplage entre oscillations radiales et verticales dans le cosmotron. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1010—1012 (1954).

Infeld, L. and J. Plebanski: Electrodynamics without potentials. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **222**, 224—227 (1954).

Verspätete Veröffentlichung einer vorläufigen Mitteilung zu einer bereits referierten Arbeit dies. Zbl. **51**, 190). *G. Höhler.*

Lehnert, Bo: Magneto-hydrodynamic waves in liquid sodium. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 815—824 (1954).

Walker, L. R.: The dispersion formula for plasma waves. *J. appl. Phys.* **25**, 131—132 (1954).

Kent, Gordon: Space charge waves in inhomogeneous electron beams. *J. appl. Phys.* **25**, 32—41 (1954).

Das Auftreten von exponentiell anwachsenden Raumladungswellen in einem System von Elektronenströmen bestimmter Eigenschaften ist von großem Interesse für die Röhrentechnik. Verf. unternimmt die Behandlung eines Elektronenstromes für den speziellen Fall eines zwischen zwei planparallelen leitenden Flächen befindlichen Elektronenensembles, dessen Bewegungsrichtung durch ein sehr starkes Magnetfeld auf eine Richtung parallel zu den Platten beschränkt sein soll. Außerdem wird die Strahldichte als konstant vorausgesetzt und die Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung gefordert. Für die ungestörte Potential-, Geschwindigkeits- und Raumladungsverteilung werden zweckmäßige Näherungen verwendet. Verf. wendet auf dieses Modell die Substitutionsmethode an und beurteilt die Frage der anwachsenden Schwingungsvorgänge an Hand der komplexen Eigenschaften der Ausbreitungskonstanten. Er kommt zu dem Schluß, daß kleine Inhomogenitäten keinen Anlaß zu exponentiell anwachsenden Raumladungsvorgängen geben können. *G. Ecker.*

Legunov, A. A. und Ja. P. Terleckij: Die Beschleunigung geladener Teilchen eines sich bewegenden, magnetisierten Mediums. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 129—138 (1954) [Russisch].

Der Prozeß der Beschleunigung geladener Teilchen durch das bewegte magnetisierte interstellare Medium wird analysiert. Es wird festgestellt, daß der Zuwachs der mittleren Energie eines Teilchens proportional der mittleren Energie eines Teilchens nur bei nicht zu großen Energien ist. Für dieselben Werte nimmt, wenn der Krümmungsradius der Bahn des Teilchens im Magnetfeld die Dimensionen der homogenen Bereiche desselben übertrifft, der Zuwachs der mittleren Energie des Teilchens mit zunehmender Energie ab. — In der Arbeit wird der exponentielle Abfall des Energiespektrums für die Ionenkomponenten der primären kosmischen Strahlung im Gebiet hoher Energien vorausgesetzt. Es wird festgestellt, daß das Abreißen des Spektrums der Protonenkomponente der primären kosmischen Strahlung unter geringeren Energien entsteht, als das des Spektrums der Ionenkomponenten. *Autoreferat.*

Stuart, J. T.: On the stability of viscous flow between parallel planes in the presence of a co-planar magnetic field. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **221**, 189—206 (1954).

Es wird das Verhalten einer zähen, elektrisch leitenden Flüssigkeit untersucht, die sich in Gegenwart eines koplanaren magnetischen Feldes zwischen zwei parallelen Ebenen bewegt. Macht man von einer naheliegenden, geeigneten Näherung Gebrauch, die allerdings den Gültigkeitsbereich der Reynoldsschen Zahl beschränkt, so läßt sich das Problem der Stabilität auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung zurückführen. Bei gegebenen physikalischen und geometrischen Eigenschaften wächst die kritische Reynoldssche Zahl, bei deren Überschreitung Instabilität einsetzt, mit der Intensität des magnetischen Feldes. Es wird ferner eine Beziehung aufgestellt, die den Zusammenhang zwischen der von der Strömung mitgeführten Energie und der infolge der Viskosität und der Störungen des magnetischen Feldes vernichteten Energie angibt. *H. Buchholz.*

Machlup, Stefan: Noise in semiconductors. Spectrum of a two-parameter random signal. *J. appl. Phys.* **25**, 341—343 (1954);

Spetner, Lee, M.: Errors in power spectra due to finite sample. *J. appl. Phys.* **25**, 653—659 (1954).

Un signal périodique est formé en répétant un échantillon de durée T de bruit

gaussien stationnaire „fortement continu“ (?) Une borne supérieure à la différence entre le spectre vrai $W(m/T)$ et le spectre estimé est $d_m = 0,025 Y_m + r X_m$, où $Y_m = \max_f |W(f) - W(m/T)|$; $X_m = \max_f |W(f + m/T) - W(f - m/T)|$; r est un facteur fonction de m et de la valeur de f où W „devient plat“. donnée par un graphique. Pas de discussion de validité des calculs. *B. Mandelbrot.*

Middleton, David: Information loss attending the decision operation in detection. *J. appl. Phys.* **25**, 127—128 (1954).

Brillouin, L.: Negentropy and information in telecommunications, writing, and reading. *J. appl. Phys.* **25**, 595—599 (1954).

L'A. étudie la thermodynamique de la transmission sur ligne bruyante, et démontre la formule de capacité de Shannon. Puis, il analyse la thermodynamique du processus de lecture, pour montrer que le deuxième principe n'est pas mis en défaut, et qu'ainsi un paradoxe qu'il avait introduit dans un travail précédent n'est qu'apparent. *B. Mandelbrot.*

Lampard, G. D.: Generalization of the Wiener-Khinchine theorem to non-stationary processes. *J. appl. Phys.* **25**, 802—803 (1954).

L'A. considère des processus non-stationnaires, non spécifiés, tronqués au temps t . Il généralise les notions de spectre et de corrélation, de façon formelle, sans discuter la validité des opérations. Une généralisation de l'égalité de Wiener-Khinchine réunit les deux généralisations précédentes. *B. Mandelbrot.*

Reulos, René: Sur l'intégration des équations de Maxwell et de Lorentz par la méthode opérationnelle. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 2225—2227 (1954).

Relativitätstheorie:

● **Einstein, Albert:** Relativity: the special and the general theory. A popular exposition. Authorised translation by Robert W. Lawson. 15. ed. revised and enlarged. London: Methuen and Co. Ltd. 1954. X, 166 p. and 2 plates. 12 s. 6 d. net.

● **Einstein, Albert:** La théorie de la relativité restreinte et générale. Exposé élémentaire. La relativité et le problème de l'espace. Traduit de l'allemand par Maurice Solovine. Paris: Gauthier-Villars 1954. 179 p. fr. 1300.

Laue, M. v.: Le Chatelier-Braunsches Prinzip und Relativitätstheorie. *Z. Phys.* **137**, 113—116 (1954).

Application du principe de Le Chatelier-Braun aux variables thermodynamiquement associées G (impulsion) et q (vitesse); cas particuliers des dynamiques isotherme et adiabatique, isobare et isochore. Relation avec la thermodynamique relativiste de Planck. *O. Costa de Beauregard.*

Pounder, J. R.: On relativistically rigid surfaces of revolution. *Commun. Dublin Inst. advanced Studies, Ser. A* **11**, 53 S. (1954).

Verf. geht von der Bornschen Definition des starrverbundenen Punktpaares in der speziellen Relativitätstheorie (zwei Massenpunkte, deren Weltlinien eine konstante vierdimensionale Entfernung haben) aus. Er betrachtet dazu rotations-symmetrische Flächen des dreidimensionalen Raumes, welche zunächst als ruhend angenommen und dann in eine gleichförmige Rotation um die Symmetrieachse und eine gleichförmige Translation parallel dieser Achse versetzt werden. Er verlangt dabei, daß die Fläche sich relativistisch starr verhält (d. h. der nach der Bornschen Definition berechnete Abstand jedes Punktpaares konstant bleibt), und diskutiert die durch die Bewegung verursachte Änderung der geometrischen Form der Fläche. Der Fall der Kugelfläche ist ausführlich behandelt. *A. Papapetrou.*

Gomes, Ruy Luís: Über den Begriff der Distanz in der speziellen Relativitätstheorie. *Gaz. Mat., Lisboa* **15**, Nr. 57, 3—4 (1954) [Portugiesisch].

Dugas, René: Sur les pseudo-paradoxes de la relativité restreinte. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 49—50 (1954).

Infeld, L.: Equations of motion and non-harmonic coordinate conditions. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 163—166 (1954).

Teisseyre, Roman: Note on the problem of coordinate conditions and equations of motion in general relativity theory. Acta phys. Polon. 13, 45—49 (1954).

Es wird bewiesen, daß bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen in einem Gravitationsfeld nach der Methode von Einstein und Infeld die in die Lösung der Feldgleichungen eintretende willkürliche Funktion g_0 aus den Bewegungsgleichungen zweiter Näherung herausfällt. *A. Papapetrou.*

Bonnor, W. B.: Static magnetic fields in general relativity. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 225—232 (1954).

Verf. zeigt, daß man aus einer Lösung der Gleichungen des Gravitations- und elektromagnetischen Feldes, welche einem elektrostatischen Feld entspricht, eine andere Lösung ableiten kann, die einem magnetostatischen Feld entspricht. Die Methode gilt aber nur für Raumbereiche, welche keine Quellen des elektrostatischen bzw. des magnetostatischen Feldes enthalten. Verf. wendet dann diese Methode an, um aus bekannten Lösungen mit elektrostatischem Feld zu solchen mit magnetostatischem Feld zu gelangen. *A. Papapetrou.*

Hlavatý, Václav: The elementary basic principles of the unified theory of relativity. C₁ Introduction. J. rat. Mech. Analysis 3, 103—146 (1954).

Einsteins vereinheitlichte Relativitätstheorie ist auf drei Prinzipien begründet: A. Der Grundtensor $g_{\lambda\mu}$ ist weder symmetrisch noch schief-symmetrisch. B. Er führt zu einem Zusammenhang $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$, definiert durch $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\omega}^\alpha g_{\lambda\alpha}$. C. Für die Argumente $g_{\lambda\mu}$ in $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$ gilt die Bedingung $R_{\lambda\mu} = \partial_{[\lambda} X_{\mu]}$, wobei X_μ ein beliebiger Vektor (allgemeiner Fall) bzw. ein beliebiger Gradient ist (Spezialfall). Während Verf. bereits in einer Reihe von Veröffentlichungen (vgl. dies. Zbl. 47, 209—210; 50, 218; Hlavatý und Sáenz, dies. Zbl. 51, 203) die beiden ersten Prinzipien untersucht hat, behandelt vorliegende Abhandlung die grundlegenden Eigenschaften des Systems B und C, welche im nächsten Teil (vgl. nachstehendes Referat) für physikalische Anwendungen benötigt werden. — Das Hauptresultat besteht in der Aufstellung der allgemeinsten Lösung von $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\omega}^\alpha g_{\lambda\alpha}$, $\Gamma_{[\lambda\alpha]}^\alpha = 0$, $R_{\lambda\mu} = \partial_{[\lambda} X_{\mu]}$, ausgedrückt durch eine partikuläre Lösung dieses Systems. Eine solche wird ebenfalls konstruiert. *W. Barthel.*

Hlavatý, Václav: The elementary basic principles of the unified theory of relativity. C₂: Applications I. J. rat. Mech. Analysis 3, 147—179 (1954).

Schreibt man die Übertragung in der Form $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{smallmatrix} \right\} + S_{\lambda\mu}^\alpha + U_{\lambda\mu}^\alpha$, wobei $S_{\lambda\mu}^\alpha = S_{[\lambda\mu]}^\alpha$ und $U_{\lambda\mu}^\alpha = U_{[\lambda\mu]}^\alpha$ ist, so lauten die Bedingungen, auf denen Einsteins vereinheitlichte Relativitätstheorie beruht: $D_\omega g_{\lambda\mu} = 2S_{\omega\lambda\mu}^\alpha g_{\alpha\lambda}$, $S_{\lambda\lambda}^\alpha = 0$, $R_{\lambda\mu} = \partial_{[\lambda} X_{\mu]}$. Verf. hat diese Prinzipien in mehreren Arbeiten vom mathematischen Standpunkt aus untersucht (vgl. vorsteh. Referat) und beschäftigt sich in vorliegender Veröffentlichung mit den physikalischen Anwendungen dieser Resultate. Hierbei wird speziell (*) $U_{\lambda\mu}^\alpha = 0$ vorausgesetzt, ein Fall, der für schwache elektromagnetische Felder stets erfüllt und daher für experimentelle Prüfmöglichkeiten der vereinheitlichten Relativitätstheorie durch die Himmelsmechanik wichtig ist. — Mit Hilfe des unsymmetrischen Grundtensors $g_{\lambda\mu}$ wird ein Bivektor $m_{\lambda\mu}$ angegeben, der den Maxwell'schen Gleichungen $\partial_{[\lambda} m_{\mu\gamma]} = 0$, $w^\gamma = \partial_{\gamma} m^{\lambda\mu}$ genügt und deshalb mit dem elektromagnetischen Feld identifiziert wird. Aus dem symmetrischen Teil der dritten Einsteinschen Bedingung folgt $H_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} H g_{\lambda\mu} - T_{\lambda\mu}$, wo $H_{\lambda\mu}$ und H durch Faltung des Krümmungstensors von $g_{\lambda\mu}$ entsteht und $T_{\lambda\mu}$ eine Funktion jener Größen ist, die bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes in den Impuls-Energie-Tensor der Gravitationstheorie eingehen. $g_{\lambda\mu}$ wird mit dem Gravitationspotential identifiziert. Der Tensor $T_{\lambda\mu}$ genügt dem Erhaltungssatz $D_\lambda T^{\lambda\mu} = 0$, aus dem die Bewegungsgleichungen $m^{\lambda\mu} D_\lambda w^\mu = P^\mu$ folgen. — Schließlich wird der schief-symmetrische Teil der letzten Einsteinschen Bedingung durch eine andere ersetzt, die zu $P^\mu = \sigma w^\mu$ äquivalent ist. Daraus folgen die gleichen

Resultate wie oben, nur die Bewegungsgleichungen nehmen jetzt die Form $u^\lambda D_\lambda u^\nu = \sigma w^\nu$ an, d. h. die Bahn eines Teilchens, das sich ohne Einfluß äußerer Kräfte bewegt, ist eine Autoparallele von $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, die wegen (*) mit den Extremalen von $g_{\lambda\mu}$ identisch ist (Trägheitsgesetz).—Abschließend werden Möglichkeiten einer experimentellen Prüfung der vereinheitlichten Theorie ausführlich diskutiert.

W. Barthel.

Bose, S. N.: The affine connection in Einstein's new unitary field theory. *Ann. of Math.*, II. Ser. **59**, 171—176 (1954).

Es sei $g_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$ ($s_{ij} = s_{ji}$, $a_{ij} = -a_{ji}$) der Fundamentaltensor des Raumes V_4 . Die Gleichungen $V_j g_{ih} = 0$ definieren eine Übertragung. Verf. findet einen Ausdruck für die Übertragungsparameter in g_{ij} und ihren Ableitungen. Dieser Ausdruck enthält die Eigenvektoren der Matrix $c_i^h = s^{hj} a_{ji}$. *J. Haantjes.*

Mavridès, Stamatiá: Sur le choix de la métrique et du champ électromagnétique en théorie unitaire d'Einstein. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1566—1568 (1954).

Mavridès, Stamatiá: Courant et charge en théorie unitaire d'Einstein. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1643—1644 (1954).

Verf. versucht, in der einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ den die Metrik darstellenden Tensor mit Hilfe der Forderung zu bestimmen, daß bei der statischen kugelsymmetrischen Lösung der Feldgleichungen das elektrostatische Feld mit demjenigen der Born-Infeldschen Theorie identisch wird. Es ergibt sich, daß dies möglich wird, wenn man als metrischen Tensor $g_{\mu\nu} / \det g_{\mu\nu} \det g_{\mu\nu}$ wählt. — In der zweiten Arbeit wird die Form des Strom-Ladungsdichtevektors untersucht und die allgemeine Formel auf die statische kugelsymmetrische Lösung angewandt. Es ergibt sich eine kontinuierliche Ladungsverteilung, deren Dichte für $r \rightarrow \infty$ wie $1/r^3$ zu Null strebt.

A. Papapetrou.

Mavridès, Stamatiá: Le choix de la métrique et du champ électromagnétique en théorie unitaire d'Einstein. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 637—640 (1954).

Schrödinger, E.: Electric charge and current engendered by combined Maxwell-Einstein-fields. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **56**, 13—21 (1954).

Verf. geht von den Ergebnissen einer Untersuchung von Einstein und Kaufmann aus (Birthday Volume „Louis de Broglie“, Paris 1952, S. 321), wonach die „starken“ Feldgleichungen der nichtsymmetrischen einheitlichen Feldtheorie $R_{\mu\nu} = 0$ zu Schwierigkeiten führen und demzufolge nur die „schwachen“ Gleichungen $R_{\mu\nu} + \frac{2}{3}(\Gamma_{\nu,\mu}^\nu - \Gamma_{\mu,\nu}^\nu) = 0$ aufrechtzuerhalten sind. Fordert man dementsprechend, daß der Vektor Γ_{μ}^ν allgemein von Null verschieden sei, so folgt, daß auch die Strom-Ladungsdichte im ganzen Raum von Null verschieden sein wird. Betrachtet man insbesondere ein im Sinne dieser Theorie schwaches elektromagnetisches Feld, welches in erster Näherung mit einem beliebigen, durch räumlich lokalisierte Quellen erzeugten Maxwell'schen Feld zusammenfällt, so wird es in der zweiten Näherung auch eine kontinuierliche Strom-Ladungsverteilung geben. Es folgt eine Abschätzung des einem vorgegebenen Maxwell'schen Feld entsprechenden Feldes zweiter Näherung.

A. Papapetrou.

Bertotti, B.: On the relation between fundamental tensor and affinity in unified field theory. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **11**, 358—365 (1954).

Es wird versucht, die in der nichtsymmetrischen einheitlichen Feldtheorie von Einstein eingeführte Beziehung zwischen den Komponenten $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ des affinen Zusammenhangs und dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zu verallgemeinern. Verf. geht von einer Beziehung aus, welche acht willkürliche Koeffizienten enthält. Durch die Forderung von Invarianz und Hermitizität werden diese Koeffizienten auf zwei reduziert. Die so entstandene Beziehung ist, bis auf einige Spezialfälle, mit der Einsteinschen Beziehung gleichwertig.

A. Papapetrou.

Schücking, E.: Das Schwarzschild'sche Linienelement und die Expansion des Weltalls. *Z. Phys.* **137**, 595—603 (1954).

Das von Einstein und Strauss vorgeschlagene Problem, die Schwarzschild'sche Lösung so abzuändern, daß ihr Linienelement für große r in dasjenige der expandierenden Welt übergeht, wird auf neuem Wege gelöst. *A. Papapetrou.*

Quantentheorie:

Landé, Alfred: Quantum mechanics and thermodynamic continuity. II. Amer. Phys. 22, 82—87 (1954).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Bemühungen des Verf., die Prinzipien der Quantenmechanik aus dem sog. Gibbsschen Paradoxon der Thermodynamik herzuleiten (dies. Zbl. 48, 443). Das Symmetrieprinzip für ψ -Funktionen identischer Teilchen wird ausführlicher begründet, und wird der Versuch gemacht, die spezielle Form der Heisenberg-Born-Schrödinger-Quantenbedingung, $p q - q p = \hbar i$ bzw. $p = \hbar i \partial / \partial q$, durch qualitative Forderungen an kanonisch injungierte Größen plausibel zu machen. Nach Ansicht des Ref. wird jedoch vom Verf. ein entscheidender Punkt stillschweigend vorausgesetzt, und zwar die prinzipielle Ununterscheidbarkeit der Teilchen. Diese ist nämlich bereits ein typisch quantenmechanisches Postulat, das die Hilfe makroskopisch-thermodynamischer Experimente oder Überlegungen nicht zu beenden ist. An die Stelle der angeblichen Unstetigkeit in der Mischentropie (zwischen ähnlichen und gleichen Gasen) tritt in einer konsequent klassischen Thermodynamik die (wegen der abnehmenden praktischen Trennbarkeit der Gase) stetig gegen Null gehende Meßbarkeit der (stets von 0 verschiedenen) Mischentropie. *G. Süßmann.*

Landsberg, Peter T.: A proof of Temple's laws of transition. Ann. der Physik, I. F. 14, 14—16 (1954).

Das von Temple (dies. Zbl. 6, 38) verwendete Axiomensystem der Quantentheorie läßt sich wie folgt ändern: Seien A_1, B_1, \dots Operatoren, die aus der Gesamtheit in einem Zustand Φ zu Systeme im Zustand χ_1, \dots abtrennen. Dann soll nach Temple eine Zahl $c(A_1, B_1, \dots)$ existieren, für die $A_1 B_1 A_1 = c(A_1, B_1) A_1$ gilt. Hieraus folgt (P. T. Landsberg, dies. Zbl. 1, 377) $c(A_1, B_1) = c(B_1, A_1)$. Der Verf. ersetzt dies Axiom durch das folgende: $A_1 B_1 \dots$ bilden eine lineare assoziative Algebra über den Körper der komplexen Zahlen (Landsberg, e. B.). Dann aber läßt sich zeigen, daß das obige Templesche Axiom eine Folge des neuen Axiomensystems ist. Der Verf. führt noch ein Normierungsaxiom ein, das die Bezugnahme auf die Zahl der Systeme der Gesamtheit zu vermeiden gestattet. Dann folgt als Wahrscheinlichkeit, ein System im Zustand χ_1 zu finden, ein Ausdruck a_1 / λ (a_1 = komplexe Zahl; $\lambda > 0$, reell). Die obige Wahl $\lambda = 2$ ist also nicht notwendig, jedoch mathematisch zweckmäßig. *H. Kümmel.*

Biedenharn, L. C. and J. M. Blatt: A variation principle for eigenfunctions. Phys. Review, II. Ser. 93, 230—232 (1954).

Das bekannte Rayleigh-Ritz'sche Variationsverfahren wird so erweitert, daß nicht nur die Eigenwerte, sondern auch die Eigenfunktionen bestimmt werden können. Insbesondere wird auch der Fall der Entartung untersucht. Die trotz der Ähnlichkeit der Formeln mit denen der Störungsrechnung vorhandenen Unterschiede werden erörtert. *F. Penzlin.*

Weizel, Walter: Ableitung der quantenmechanischen Wellengleichung des Mehrteilchensystems aus einem klassischen Modell. Z. Phys. 136, 582—604 (1954).

Der Versuch des Verf., die Schrödingergleichung aus einem klassischen Diffusionsmodell abzuleiten [Z. Phys. 134, 264; 135, 270 (1953)] wird ausgedehnt auf den Fall mehrerer Teilchen, die aufeinander beliebige konservative Kräfte ausüben und sich in einem beliebigen, zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld befinden. Die beiden reellen Gleichungen, in die sich die Schrödingergleichung zerlegen läßt, werden als Teilchen- bzw. Impulsbilanz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung im Konfigurationsraum gedeutet. Das wird ermöglicht durch die Einführung unausgeglichter, regelloser, ubiquitärer Störungen (durch sog. „Zeronen“), die mindestens im statistischen Mittel weder Energie noch Impuls übertragen. Ref. möchte einwenden: 1. Das Pauliprinzip Mittel weder Energie noch Impuls übertragen. Ref. möchte einwenden: 1. Das Pauliprinzip bleibt unbegründet. 2. Die elektromagnetischen Eigenschaften des quantenmechanischen Stromes (insbesondere die Strahlungslosigkeit der Grundzustände) sind so nicht ableitbar. 3. Daß die Eigenwerte in der zeitunabhängigen Schrödingergleichung Energien (und nicht nur Frequenzen) sind, ist nicht begründet. 4. Die Ultraviolett Katastrophe ist wieder eingeführt. 5. Die Verletzung des Gleichverteilungssatzes für die Zeronen ist ein typisch unklassischer Zug. *G. Süßmann.*

Poincelot, Paul: Sur la vitesse de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1289—1291 (1954).

Laforgue, Alexandre: Représentation de l'erreur par un potentiel et solution itérative de l'équation de Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1033—1035 (1954).

The error potential expresses the difference between the approximate solution of the Schroedinger equation and the exact solution of a related problem by which it is represented. If this error potential is bounded, a bound for the energy is also found, or, by perturbation, an energy correction can be computed. *J. Jacobs.*

Wigner, Eugene P.: Application of the Rayleigh-Schrödinger perturbation theory to the hydrogen atom. Phys. Review, II. Ser. **94**, 77—78 (1954).

Verf. wendet die Störungsrechnung von Rayleigh und Schrödinger auf die Bewegung eines Elektrons in einem Potential $c \cdot r^{-n}$ an. Ergebnis: die erste Näherung zur Energie verschwindet für $0 < n < 3$; die zweite Näherung verschwindet ebenfalls für $n > 1$, und divergiert für $n < 1$; für $n = 1$ ergibt sich zwar eine endliche Ionisierungsenergie, jedoch ist sie um den Faktor 5 zu klein. *F. Penzlin.*

Price, P. J.: Perturbation theory for the one-dimensional wave equation. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 383—385 (1954).

An einem einfachen Beispiel entwickelt der Verf. eine Störungstheorie, die explizit nur die ungestörten Wellenfunktionen enthält. Die Anwendung auf die S-Streuung an einem kugelsymmetrischen Potential führt zu Verallgemeinerungen der von Peierls u. a. [Bethe-Peierls, dies. Zbl. **11**, 383; Barker-Peierls, Phys. Review, II. Ser. **75**, 312 (1949)] für die Streuphase $\delta^0(k^2)$ angegebenen Formeln auf höhere Potenzen in k^2 . *F. Penzlin.*

Ballinger, R. A. and N. H. March: Extended Thomas-Fermi methods. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 378—381 (1954).

Tiwari, S. Y. and B. Bhattacharya: On the linearization of a relativistic Hamiltonian. Amer. J. Phys. **22**, 344 (1954).

Olsen, H., H. Wergeland and H. Øveraas: On the determination of multiple scattering from ionization tracks. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **26**, 36—40 (1954).

Es werden die verschiedenen Methoden diskutiert, wie man aus „krummen“ Teilchen-spuren auf das mittlere Ablenkungsquadrat bei Vielfachstreuung schließen kann. Methode 1 ist die sog. Tangentenmethode, bei welcher der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Tangenten gemessen wird. Diese liefert direkt das gesuchte mittlere Ablenkungswinkelquadrat. Methode 2: hier wird die Bahn in Stücke der Länge l zerlegt und die Ordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Kurvenstücke bestimmt, dann die Winkel des verbindenden Streckenzugs gemessen. Die Methode liefert 11/20 des vorigen Wertes. Methode 3: es werden in gleichen Abständen Kurvenpunkte genommen und wieder durch einen Streckenzug verbunden. Die Auswertung wie bei Methode 2 liefert 2/3 des Wertes von Methode 1. Methode 4: es werden die „besten“ geradlinigen Strecken zur Annäherung der einzelnen Kurvenstücke verwendet. Man bekommt 26/35 des obigen Wertes. Neben diesen, schon bekannten Methoden wird eine weitere angegeben, Methode 5: es werden die Sehnen der einzelnen Kurvenstücke der Länge L genommen und das mittlere Ablenkungsquadrat der Spur von dieser Sehne bestimmt. Der Zusammenhang dieser Größe mit dem mittleren Ablenkungswinkelquadrat wird angegeben. *H. Volz.*

Costa de Beauregard, Olivier: Particule plongée dans un champ donné. Définition des fonctions et valeurs propres au moyen d'intégrales quadruples. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 50—53 (1954).

Verf. ergänzt das Massenglied in der Diracgleichung durch ein rein imaginäres Zusatzglied. Dadurch erhält der Viererstrom eine nichtverschwindende Divergenz, worin das imaginäre Zusatzglied die Rolle einer Feldquelle spielt. Die Divergenz des Viererstroms integriert er über eine Raumzeitrohre mit zwei raumartigen Anfangs- und Endoberflächen. Durch geeignete Normierung eines der drei dabei auftretenden Integrale wird das Quellenglied mit der Emission bzw. Absorption in dem eingeschlossenen Raumzeitbereich verbunden und eine Unbestimmtheit des Vorzeichens eines der beiden Oberflächenintegrale mit dem Unterschied von Teilchen und Antiteilchen in Beziehung gesetzt, sobald der Spin größer als $\hbar/2$ ist. Dann läßt sich in der integrierten Divergenzgleichung eine solche Zuordnung der Integrale vornehmen, die folgendem Satz entspricht: die Differenz der Wahrscheinlichkeit von Teilchen, am Ende und am Anfang zu existieren, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, im dazwischenliegenden Raumzeitbereich emittiert bzw. absorbiert worden zu sein. *W. Kofink.*

Costa de Beauregard, Olivier: Théorie relativiste covariante de la particule liée. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1196—1198 (1954).

L'A., en utilisant des intégrales quadruples sur l'espace-temps, précise les définitions d'orthogonalité et de normalisation introduites dans ses Notes précédentes

v. le rapport précédent et C. r. Acad. Sci., Paris 238, 211—213 (1954)]. Ces définitions qui permettent d'établir une théorie covariante de la particule liée. *G. Petiau.*

Bergmann, O. and N. Baker: On Corben's formulation of the Dirac equation. *Nuovo Cimento, Ser. IX* 11, 203—204 (1954).

Loinger und Bellomo [*Nuovo Cimento, Ser. IX* 9, 885, 1240 (1952)] führten die von Corben (dies. Zbl. 48, 220, 221) vorgeschlagene Gleichung

$$(\gamma_k \partial_k - i \lambda \gamma_5 - \mu) \Psi = 0$$

im Falle eines reellen λ auf die Diracsche Gleichung zurück. Die Verff. zeigen, daß diese Äquivalenz für komplexes λ nicht mehr besteht. Ferner besteht die Äquivalenz im nicht wechselwirkungsfreien Falle selbst bei reellem λ nur für Vektor- und Pseudovektorkopplung. *F. Penzlin.*

Bauer, Friedrich L.: Le rang de l'algèbre de matrices se trouvant dans la méthode de fusion de M. Louis de Broglie. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1477—1478 (1954).

L'A. indique que le rang r de l'algèbre de fusion construit au moyen de N systèmes de matrices de Dirac $\alpha_\mu^{(k)}$ par la relation $\beta_\mu = \sum_{k=1}^N \alpha_\mu^{(k)}$ est donné par

$$\text{la formule } r = \binom{N+7}{7} \binom{N+5}{3} / 10.$$

G. Petiau.

Donnert, Hermann: Geladene Elementarteilchen mit endlicher Ruhmasse und beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld. *Z. Phys.* 137, 649—660 (1954).

L'A. examine les propriétés d'un système d'équations d'ondes spinorielles représentant un corpuscule de masse au repos finie et de spin quelconque satisfaisant à une hypothèse de F. Cap (ce Zbl. 51, 208). Le passage à l'équation du second ordre met en évidence un moment électromagnétique proportionnel au spin. L'étude de la diffusion élastique coulombienne conduit à un facteur correctif à la formule de Rutherford dépendant du spin et de la forme $f(s, \beta, \theta) = 1 - (s-1)3^{-1}s^{-1}\beta^2 \sin^2 \theta$. Pour $s = 1/2$ ce facteur se réduit au facteur de Mott $1 - \beta^2 \sin^2 \theta$. *G. Petiau.*

Gupta, K. K.: Bhabha's equation for a particle of two mass states in Rarita-Schwinger form. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 222, 118—127 (1954).

Die von Bhabha angegebene irreduzible relativistische Wellengleichung für ein Teilchen mit zwei verschiedenen Massenzuständen und positiver Ladung wird in eine Form gebracht ähnlich der von Rarita und Schwinger für die Dirac-Fierz-Pauli-Gleichung für eine Partikel vom Spin 3/2. Die Komponenten der Wellenfunktion werden als Diracsche vierkomponentige Wellenfunktion mit einem zusätzlichen Tensorindex und eine gewöhnliche vierkomponentige Diracsche Wellenfunktion geschrieben. Die einzigen Matrizen, die in die Formulierung eingehen, sind die Diracschen. Es wird eine explizite Darstellung der Bhabhaschen Matrizen durch die Diracschen erhalten. Die Lösungen für den Spin 3/2 sind gerade die durch die Dirac-Fierz-Pauli-Gleichung gegebenen, während die Lösungen für den Spin 1/2 von den Diracschen in nichtverschwindenden zusätzlichen Komponenten abweichen. *Zusammenfassung des Autors.*

Breit, G. and H. A. Bethe: Ingoing waves in final state of scattering problems. *Phys. Review, II, Ser.* 93, 888—890 (1954).

Während die asymptotische Form der Wellenfunktion eines mit festgelegtem Impuls in ein Streuzentrum einlaufenden Teilchens einer Überlagerung einer ebenen Welle und auslaufenden Kugelwelle entspricht, enthält die entsprechende Form für ein mit bestimmtem Impuls aus einem Streuzentrum auslaufendes Teilchen einlaufende Kugelwellen. Für diese Tatsache wird hier eine allgemeine Begründung gegeben. *M. R. Schafroth.*

Polkinghorne, J. C.: An identity for the S matrix for a finite time interval. *Phys. Review, II, Ser.* 93, 228—229 (1954).

Verf. beweist die Gleichung $S(\lambda \tau; m_i) = S(\tau; \lambda m_i)$ für die zum endlichen Zeitintervall τ gehörige S -Matrix (m_i = Massen der betrachteten Felder, λ = bel. reelle Konstante), indem er die Dysonsche Entwicklung und die Eigenschaften der A - und S -Funktionen benutzt. *H. Kummel.*

Putnam, C. R.: Remarks on certain operators of quantum field theory. *J. London math. Soc.* 29, 350—354 (1954).

Es wird die aus der Feldquantentheorie stammende Operatorengleichung

$AA^* - A^*A = I$ (I Identität, A^* Adjungierte von A) in einem Hilbertraum betrachtet. Die heuristischen Schlußweisen werden präzisiert und genaue Voraussetzungen über den Operator A angegeben, unter denen das Spektrum von A^*A aus den nichtnegativen ganzen Zahlen besteht. *J. Moser.*

Good jr., R. H.: Hamiltonian mechanics of fields. *Phys. Review, II. Ser.* **93**, 239—243 (1954).

Im Anschluß an Born (dies. Zbl. **8**, 138) und Weyl (dies. Zbl. **10**, 283) bringt der Verf. die Feldgleichungen in kanonische Form. Die dabei zu fordernde Auflösbarkeitsbedingung ist z. B. für Feldgleichungen erster Ordnung nicht erfüllt. Die kanonischen Transformationen sind auf $q_i' = f_i(q, x)$ (q_i sind die Feldfunktionen) beschränkt. Während die Lagrangeschen Klammern die aus der Mechanik bekannten Eigenschaften aufweisen, sind die Poissonschen Klammern nicht allgemein (wohl aber in einigen besonders interessanten Fällen) invariant. *F. Penzlin.*

Takahashi, Takehito: Invariant delta functions in the sense of distributions. *Progress theor. Phys.* **11**, 1—10 (1954).

Die sogenannten „Greenschen Funktionen“ der Feldtheorie sind bekanntlich keine Funktionen, denn sie enthalten singuläre δ -artige Teile. Der Verf. gibt eine korrekte Herleitung dieser Greenschen Funktionen im Rahmen der Theorie der Distributionen. Dabei geht er von den klassischen Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung aus. Ein Zurückgreifen auf die Fouriertransformation ist damit überflüssig. *F. Penzlin.*

Lehmann, H.: Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **11**, 342—357 (1954).

Die Ausbreitungsfunktionen werden als Vakuum Erwartungswerte gewisser bilinearer Ausdrücke in den (renormierten) Feldoperatoren definiert. Für sie leitet Verf. (ohne Benutzung einer Störungsrechnung) unter einigen plausiblen Annahmen eine Reihe allgemeiner Eigenschaften her. Insbesondere zeigt sich, daß die Fouriertransformierten dieser exakten Ausbreitungsfunktionen für große Impulse nicht stärker abfallen als die entsprechenden freien Funktionen. Grundlegend ist dabei die Erkenntnis, daß sich die exakten Ausbreitungsfunktionen mit Hilfe eines Massenspektrums $\rho(k^2)$ (bzw. zweier solcher Funktionen im Spinorfall) aus den entsprechenden freien Funktionen superponieren lassen. Schließlich gibt Verf. eine Darstellung für die Renormierungskonstanten durch die ρ (am Beispiel eines neutralen Mesonfeldes in pseudo-skalarer Kopplung an ein Spinorfeld). Die Arbeit schließt mit einer störungstheoretischen Berechnung der ρ in g^2 -Näherung (an demselben Beispiel), wobei jedoch im Laufe der Rechnung keine divergenten Terme auftreten. Die Resultate stimmen mit den von Karplus, Kivelson und Martin (dies. Zbl. **50**, 435) nach der Dysonschen Methode gewonnenen überein. *F. Penzlin.*

Bodiou, Georges: Relations entre la seconde quantification. La mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration, et les problèmes du second ordre en calcul des probabilités. *J. Phys. Radium* **15**, 39—44 (1954).

Ausgehend von klassischen Beziehungen zwischen den Wahrscheinlichkeiten für eine Verteilung $(n_a - 1, n_b, n_c, \dots)$ und (n_a, n_b, n_c, \dots) (n_a, n_b, \dots = Zahl der Teilchen im Zustand a, b, \dots) werden entsprechende Beziehungen für die quantentheoretischen Gesetze postuliert. Es wird gezeigt, daß die dann erhaltenen komplexen Zahlen $R(n_a, n_b, \dots)$, deren Absolutquadrat die quantentheoretische Wahrscheinlichkeit bestimmt, einen Hilbertraum aufspannen; in ihm existieren Operatoren η_a und η_a^\dagger , die als Teilchenvernichtungs- und Erzeugungsoperatoren gedeutet werden können und die bekannten Vertauschungsrelationen untereinander erfüllen. *H. Kümmel.*

Cini, M. and S. Fubini: Non perturbation treatment of scattering in quantum field theory. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **11**, 142—152 (1954).

Es wird angenommen, daß die Variationsmethode von Lippman und Schwinger (dies. Zbl. **39**, 424), die eigentlich für die nicht-relativistische Quantenmechanik entwickelt worden ist, auch für eine Feldtheorie ein brauchbares Ergebnis geben sollte. Die Verff. schlagen einen bestimmten Variationsansatz vor, der so konstruiert ist, daß man für die Matrix K , die durch $S = (1 - iK/2) \cdot (1 + iK/2)^{-1}$ definiert

vorden ist, ein einfaches Resultat erhält. Eine formale Lösung für S wird niedergeschrieben, und ein Renormierungsverfahren wird angegeben. *G. Källén.*

Yiftah, Shimon: Sur les idées de base de la théorie quantique des champs. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 776—778 (1954).

Chenon, René: Nouvelle présentation de la théorie covariante des champs. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1382—1384 (1954).

Rideau, Guy: Sur la résolution des équations de la théorie des champs. I. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2057—2059 (1954).

Rideau, Guy: Sur la résolution des équations de la théorie des champs. II. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2227—2230 (1954).

Rideau, Guy: Sur la résolution des équations de la théorie des champs. III. Cas de deux champs couplés. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2288—2290 (1954).

Matthews, P. T. and Abdus Salam: Covariant Fock equations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **221**, 128—134 (1954).

Die Verff. definieren sogenannte „Feynman-Amplitude“ und „Normalprodukte“ in einer Feldtheorie als Matrixelemente von linearen Kombinationen der Operatoren in der Heisenbergdarstellung zwischen dem Vakuum und einem beliebigen Eigenzustand der Totalenergie. Für jeden Eigenzustand des Hamiltonoperators gibt es unendlich viele solche Normalprodukte, und es wird gezeigt, daß diese Größen einem System von gekoppelten Differentialgleichungen gehorchen. Die Verff. geben auch Regeln an, wonach die unendlichen Größen, die in den Normalprodukten vorkommen, weggelassen werden können. Es wird aber nicht gezeigt, daß diese Regeln wirklich als eine konsistente Renormierung von Massen und Kopplungskonstanten interpretiert werden können. Es wird weiter vorgeschlagen — wenn auch nicht in Einzelheiten ausgeführt —, durch Abbrechen des unendlichen Systems von Differentialgleichungen eine Näherungsmethode zur Behandlung von gebundenen Zuständen zu schaffen. Der Sinn oder die Genauigkeit der so gemachten Näherung wird nicht diskutiert. Eine ähnliche Methode ist auch unabhängig von E. Freese [Z. Naturforsch. **8a**, 776—790 (1953)] entwickelt worden. *G. Källén.*

Feldman, G.: Modified propagators in field theory. (With applications to the anomalous magnetic moment of the nucleon.) Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **223**, 112—129 (1954).

Verf. untersucht „modifizierte Ausbreitungsfunktionen“, in die neben den freien Funktionen noch eine Reihe von Selbstenergiebeiträgen zusammengefaßt sind, am Beispiel der pseudoskalaren symmetrischen Mesentheorie in pseudoskalarer Kopplung. Dabei treten neben den Polen der freien Funktionen neue Singularitäten auf: logarithmische Verzweigungen und Pole außerhalb der reellen Achse. Die von Pais und Uhlenbeck (dies. Zbl. **40**, 132) erwähnten Schwierigkeiten mit komplexen Polen werden untersucht: Es handelt sich weder um „ordinary“ noch um „displaced poles“ in der Dysonischen Klassifikation. Auch rühren sie nicht, wie an einem einfachen (etwas künstlichen) Beispiel gezeigt wird, von der Divergenz der Störungsrechnung her. Schließlich wird eine eng mit der Störungsrechnung zusammenhängende Vorschrift für das Rechnen mit diesen modifizierten Ausbreitungsfunktionen gegeben. Anwendung auf das anormale magnetische Moment der Nukleonen gibt keine Verbesserung. *F. Penzlin.*

Morpurgo, G.: Further remarks on Tamm-Dancoff method. Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 103—105 (1954).

Schweber, S. S.: Covariant formulation of the Tamm-Dancoff method. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1089 (1954).

Arnowitz, R. and S. Gasiorowicz: Effect of negative energy components in the two-nucleon system. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1057—1062 (1954).

Die Bethe-Salpeter-Gleichung für das Deuteron läßt sich mit der Methode von Levy und Klein lösen. Dabei werden die Komponenten Φ_{-} negativer und Φ_{++} bzw. Φ_{--} negativ-positiver Energie durch ein Störungsverfahren eliminiert. Die Verff. untersuchen die Gültigkeit dieser Störungsrechnung, indem sie in dem zur nichtadiabatischen Λ_{+} -Näherung gehörigen Integralgleichungssystem die Φ_{+} und Φ_{++} -Komponenten in Strenge eliminieren. Die dann resultierenden Gleichungen für Φ_{+-} und Φ_{--} geben Potentiale, denen man ansieht, daß die Störungsentwicklung im Singulettzustand gerade bei $r \lesssim \mu$ (μ = Compton-Wellenlänge der Mesonen) versagt. *H. Kümmel.*

Rayski, Jerzy: On a regular field theory. II. (Quantized.) *Acta phys. Polon.* **13**, 15—28 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. **50**, 428.) Der Verf. studiert die Quantisierung einer nicht-lokalen Feldtheorie mit einem Formfaktor. Das System wird so quantisiert, daß die Feldoperatoren auf zwei raumartigen Flächen σ_1 und σ_2 die gewöhnlichen „kanonischen“ Vertauschungsrelationen erfüllen, während für das Zwischengebiet keine explizite Vorschrift besteht. Läßt man die zwei Flächen zu plus und minus Unendlich gehen, wird diese Methode mit der Quantisierung mit Hilfe der ein- und auslaufenden Felder identisch. Der Verf. meint, daß die zwei Flächen σ_1 und σ_2 physikalisch dadurch ausgezeichnet sind, daß auf ihnen die Wechselwirkung der Felder mit den Meßgeräten stattfindet. Am Ende der Arbeit werden Konvergenzfragen diskutiert. Hierbei beweist der Verf. im wesentlichen nur die Konvergenz einer klassischen Feldtheorie mit einem Formfaktor.

G. Källén.

Gaus, Heinrich: Energie-Impuls- und Ladungsdichte in der Kristensen-Møller-Theorie. *Z. Naturforsch.* **9a**, 81—90 (1954).

Nach der von Ôno (dies. Zbl. **44**, 439) angegebenen Methode wird für die Kristensen-Møller-Theorie [*Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **27**, Nr. 7, 51 S. (1952)] der Energie-Impuls-Tensor und der Ladungs-Strom-Vektor berechnet. Die sich daraus ergebenden Erhaltungssätze stimmen mit den von Pauli [*Nuovo Cimento*, Ser. IX **10**, 648—667 (1953)] auf anderem Wege gewonnenen Erhaltungssätzen überein, so daß die schließlich noch berechneten integralen Erhaltungsgrößen mit den von Pauli angegebenen identisch sind.

F. Penzlin.

● **Heitler, W.:** The quantum theory of radiation. (International Series of Monographs on Physics.) 3rd ed. Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press 1954. XIII, 430 p. 45 s net.

Vgl. Besprechung der 2. Aufl. in dies. Zbl. **40**, 423.

Newton, Roger G.: Some applications of the mass operator in quantum electrodynamics. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1773—1789 (1954).

Die vorliegende Arbeit enthält eine sehr ausführliche Diskussion des sogenannten „Massenoperators“ in der Quantenelektrodynamik und seiner Anwendungen. Es werden ein paar neue Kunstgriffe bei den Rechnungen eingeführt, die — nach der Meinung des Verf. — einfacher als die früher publizierten Methoden sind, und vorher bekannte Resultate werden damit in neuer Weise abgeleitet. Das physikalische Problem der Arbeit ist die Berechnung der Eigenschaften eines Elektrons, das sowohl mit einem elektromagnetischen Strahlungsfeld wie mit einem äußeren Feld gekoppelt ist. Bei den Rechnungen wird das Strahlungsfeld nur in erster Näherung berücksichtigt, während das äußere Feld in erster und zweiter Näherung behandelt wird.

G. Källén.

Adirovič, Ė. I. und M. I. Podgoreckij: Über die Wechselwirkung von Mikrosystemen mit den Nullpunktsschwingungen des elektromagnetischen Feldes. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 150—152 (1954) [Russisch].

Das Problem der Wechselwirkung einfacher klassischer Systeme mit den Nullpunktsschwingungen des elektromagnetischen Feldes wird an Hand der folgenden Fälle diskutiert: harmonischer und anharmonischer Oszillator, Elektron im konstanten Magnetfeld. Die Rechnungen zeigen, daß die Nullpunktsschwingungen auch in klassischen Systemen zum Auftreten einer von Null verschiedenen kleinsten Energie führen.

E. Gora.

Nordsieck, A.: Reduction of an integral in the theory of Bremsstrahlung. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 785—787 (1954).

Ein in der Theorie der Bremsstrahlung und Paarerzeugung auftretendes Integral wird mit Hilfe komplexer Integrationen auf elegante Weise gelöst. Es ist indessen wohl angebracht, festzustellen, daß dasselbe Integral auf dieselbe Weise bereits von

A. Sommerfeld (Atombau und Spektrallinien, Bd. II, Braunschweig 1939, S. 503 ff., dies. Zbl. 22, 182) ausgewertet worden ist. *M. R. Schafroth.*

Klenikov, N. P.: Die Ausstrahlung von Photonen und Elektronen-Positronen-Paaren im magnetischen Feld. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 26, 19–34 (1954) [Russisch].

Mit Hilfe der relativistischen Quantentheorie werden die Erscheinung des Leuchtelektrons sowie die Ausstrahlung von Paaren durch Photonen und Elektronen und die Einphotonen-Vernichtung von Paaren im magnetischen Feld untersucht. Die erhaltenen Resultate behalten ihre Gültigkeit für sehr starke magnetische Felder, wenn sich die Intensität der Ausstrahlung von Elektronen wesentlich von der nach der klassischen Theorie berechneten Intensität unterscheidet. *Autoreferat.*

Dicke, R. H.: Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Review*, II. Ser. 93, 99–110 (1954).

In den letzten Jahren wurde das Problem der Anregung von gegenseitig abhängigen Zuständen atomarer Strahlungssysteme mit nachfolgender Emission einer spontanen kohärenten Strahlung von besonderer Wichtigkeit. Speziell die Erforschung der magnetischen Kernresonanz wurde dadurch gefördert [siehe E. L. Hahn, *Phys. Review*, II. Ser. 77, 297 (1950); 80, 580 (1950)]. Die gewöhnliche Behandlung dieses Prozesses war eine klassische, basierend auf einem Spinsystem in einem magnetischen Feld. Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf irgendein System von Strahlern mit magnetischem oder elektrischem Dipolübergang und die Untersuchung der bei einer quantenmechanischen Behandlung des Strahlungsvorganges möglicherweise auftretenden Effekte. Der Verf. betrachtet das Gas insgesamt als ein einzelnes quantenmechanisches System und bestimmt Energieniveaus entsprechend gewissen Beziehungen zwischen den verschiedenen Molekülen. Dabei führt die spontane Emission von Strahlung bei einem Übergang zwischen zwei solchen Niveaus zur Emission einer kohärenten Strahlung. Die Diskussion wird zuerst auf ein Gas beschränkt, dessen Dimension klein ist im Vergleich zur Wellenlänge. Bei einem Gas größerer Ausdehnung wird die Wirkung des Photon-Rückstoßimpulses u. a. auch auf die Kohärenz erörtert. Abschließend behandelt der Verf. die Winkelkorrelation zwischen aufeinanderfolgenden Photonen, die von einem anfänglich in thermischem Gleichgewicht befindlichen Gas spontan emittiert werden. *P. Urban.*

Bethe, H. A. and C. L. Maximon: Theory of Bremsstrahlung and pair production, I. Differential cross section. II. Integral cross section for pair production. *Phys. Review*, II. Ser. 93, 768–784, 788–795 (1954).

I. Unter Verwendung der Näherungsmethode von A. Sommerfeld und W. Maue (dies. Zbl. 11, 330) berechnen Verf. die differentiellen Wirkungsquerschnitte für Paarerzeugung und Bremsstrahlung ohne Verwendung der Bornschen Näherung. Eine sorgfältige Abschätzung zeigt, daß auf diese Weise für Energien von über 50 MeV der Fehler im totalen Wirkungsquerschnitt weniger als 2% betragen wird; unterhalb 20 MeV sind größere Abweichungen zu erwarten. Die Resultate sind in Kürze folgende: a) Für Bremsstrahlung ergibt sich das Resultat der Bornschen Näherung multipliziert mit einem Faktor R . Es gilt stets $R \leq 1$, d. h. die Bornsche Näherung überschätzt den Wirkungsquerschnitt. R ist in den meisten Fällen praktisch = 1, außer für den Fall kleiner Impulsübertragung auf den Kern, d. h. großer Stoßparameter. Für ein Coulombfeld mit Abschirmung fallen jedoch gerade diese Stöße aus, so daß in diesem Fall der totale Wirkungsquerschnitt durch die Formel der Bornschen Näherung gegeben ist. Für den Fall verschwindender Abschirmung ist die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts in Aussicht gestellt. b) Für Paarerzeugung sind die Korrekturen zum differentiellen Wirkungsquerschnitt weniger einfach. — II. Der in Teil I gewonnene differentielle Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung wird zur Gewinnung einer Formel für den totalen Wirkungsquerschnitt verwendet. Die Winkelintegration erweist sich als durchführbar auf Grund der Bemerkung, daß die Korrekturen zur Bornschen Näherung nur für eng gebündelte Paare wesentlich sind; für größere Winkel kann daher die Bornsche Näherung verwendet werden, während für kleine Winkel der exakte differentielle Wirkungsquerschnitt eine einfachere Gestalt annimmt. Es ergibt sich, daß der totale Wirkungsquerschnitt gegenüber der Bornschen Näherung verkleinert ist, in quantitativer Übereinstimmung mit dem Experiment für Energien über 50 MeV. (Unterhalb 50 MeV ist die Theorie nicht anwendbar und ergibt dann auch zu große Abweichungen.) Der Einfluß der Abschirmung ist hier, im Gegensatz zum Fall der Bremsstrahlung, additiv zu den Abweichungen von der Bornschen Näherung, d. h. diese sind nur dann wichtig, wenn jene es nicht sind, und umgekehrt. Daraus folgt, daß die Abschirmungskorrekturen aus der Bornschen Näherung entnommen werden dürfen. *M. R. Schafroth.*

Jabłoński, A.: Magnetic rotation of the plane of polarization of broadened resonance lines. *Acta phys. Polon.* 13, 91–94 (1954).

Bolsterli, Mark: Photon splitting in a nuclear electrostatic field. *Phys. Review*, II. Ser. 94, 367–368 (1954).

Halpern, Otto: Magnetic quenching of the positronium decay. Phys. Review, II. Ser. **94**, 904—907 (1954).

Haar, D. ter: On Freundlich's red-shift. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 320—324 (1954).

Born, Max: On the interpretation of Freundlich's red-shift formula. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 193—194 (1954).

Foldy, Leslie L.: Elementary particles and the Lamb-Retherford line shift. Phys. Review, II. Ser. **93**, 880—881 (1954).

Lipps, F. W. and H. A. Tolhoek: Polarization phenomena of electrons and photons. I. General method and application to Compton scattering. Physica **20**, 85—98 (1954).

A new method is developed simplifying the calculation of cross sections for scattering processes of photons and electrons with prescribed (linear or circular) polarization. The method is adapted for the physical situation of a mixture of particles (partial polarization of the incident beam) and may be applied for studying properties of oriented nuclei.
J. Rayski.

Fano, U.: A Stokes-parameter technique for the treatment of polarization in quantum mechanics. Phys. Review, II. Ser. **93**, 121—123 (1954).

In jüngster Zeit haben Erfolge in der Experimentiertechnik mit der Polarisierung von hochenergetischer Strahlung zum Studium der Theorie von Polarisierungseffekten angeregt. Der Verf. liefert einen Beitrag zur Behandlung dieser Effekte mittels der Stokeschen Parameter, die sich auf den Operatorbegriff stützen und daher besonders praktisch für eine quantenmechanische Behandlung erweisen. Einige einfache Anwendungsbeispiele, wie der Comptoneffekt, dienen zur Erläuterung.

P. Urban.

Mittleman, M. H.: Higher-order potential effects in the radiative correction to scattering of slow electrons. Phys. Review, II. Ser. **93**, 453—454 (1954).

Die Strahlungskorrektur zur Streuung niederenergetischer Elektronen durch ein äußeres Feld wurde in erster Bornscher Näherung sowohl bezüglich des Strahlungsfeldes als auch des äußeren Feldes (Coulombpotential) berechnet. Die Näherung in bezug auf das Strahlungsfeld stellt den ersten Term einer Entwicklung nach der Feinstrukturkonstante α dar ($1/137$), während die entsprechende des äußeren Feldes einer Entwicklung nach Potenzen von $Z\alpha\beta$ entspricht. (Z bedeutet die Kernladungszahl, $\beta = v/c$, v die Geschwindigkeit des Elektrons.) Für schwere Kerne und langsame Elektronen ist diese Größe groß im Vergleich zu 1, so daß die Bornschen Näherungen keine guten Ergebnisse liefern. Der Verf. berechnet die Strahlungskorrektur erster Ordnung in α und in allen Ordnungen bezüglich des äußeren Feldes unter Benutzung des Verfahrens von Bloch-Nordsieck (dies. Zbl. **17**, 235), wobei er sich eng an die Arbeit von Pauli und Fierz [Nuovo Cimento, n. Ser. **15**, 167—188 (1938)] anschließt. Es tritt keine Änderung im Bruchteil der Strahlungskorrektur vom Resultat der Bornschen Näherung auf. *P. Urban.*

Lawson, J. D.: On the relation between Čerenkov radiation and Bremsstrahlung. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 748—750 (1954).

Baldin, A.: Die Isotopieinvarianz des π -Mesonfeldes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 949—952 (1954) [Russisch].

Zel'dovič, Ja. B.: Die durch μ -Mesonen im Wasserstoff hervorgerufene Reaktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 493—496 (1954) [Russisch].

Zel'dovič, Ja. B.: Zur Theorie der π -Mesonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 225—228 (1954) [Russisch].

Auluck, F. C. and D. S. Kothari: Fermi's theory of the generation of pions and the partition theory of numbers. Progress theor. Phys. **11**, 120—121 (1954).

Fujii, Saburo, Junji Iwadare, Shoichiro Otsuki, Mitsuo Taketani, Smio Tani and Watato Watari: The meson theory of nuclear forces. II. High energy nucleon-nucleon scattering. Progress theor. Phys. **11**, 11—19 (1954).

Harlow, Francis H. and Boris A. Jacobsohn: Nucleon isobars in intermediate coupling. Phys. Review, II. Ser. **93**, 333—340 (1954).

In der ladungssymmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie werden die An-

regungszustände ruhender ausgedehnter Nukleonen berechnet. Die Rechnungen werden mit der Methode der intermediären Kopplung nach Tomonaga durchgeführt. Der niedrigste Anregungszustand liegt bei 350 MeV, doch ist dieser Wert von der angenommenen Teilchenausdehnung ($\sim \frac{1}{2}$ Comptonwellenlänge) abhängig.
F. Cap.

Lévy, M. M. and R. E. Marshak: The S-wave in pion-nucleon scattering. Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 366—371 (1954).

Die Verf. berechnen die S-Phasenverschiebungen α_1 und α_3 der Pion-Nukleonstreuung, entsprechend den zwei isotopen Spinzuständen $T = 1/2$ und $T = 3/2$, unter Benutzung des Tamm-Dancoffschen Verfahrens und unter Zugrundelegung eines Nukleonmodells mit endlicher Ausdehnung. Sowohl die Größe als die Energieabhängigkeit der α_1 -Phasenverschiebung stimmen mit dem Experiment gut überein. Dabei wurden kürzlich erschienene Experimente über die Pion-Nukleonstreuung in Rochester [Phys. Review, II. Ser. 92, 1327 (1953)] und Columbia [Bull. Amer. phys. Soc. 28, 14 (1953)] zum Vergleich herangezogen, welche das Gebiet von 35 bis 65 MeV untersuchen. Auch das Vorzeichen von α_1 entspricht den experimentell gefundenen Werten, nur sein Betrag weicht beträchtlich ab. Die Verf. vermuten, daß diese Diskrepanz darauf zurückzuführen ist, daß α_1 bei einer strengen Behandlung des Problems unter Berücksichtigung der Renormierung stark geändert wird. Sie legen ihren Berechnungen die PS (PS)-Theorie zugrunde und gehen ferner analog der Arbeit von G. F. Chew [Phys. Review, II. Ser. 89, 591 (1953)] vor, in welcher ebenfalls Phasenverschiebungen betrachtet werden. P. Urban.

Chew, Geoffrey F.: One of Schwinger's variational principles for scattering. Phys. Review, II. Ser. 93, 341—343 (1954).

Der Verf. erörtert eine Näherungslösung des allgemeinen Ein- (oder Zwei-)Körperstreuproblems, welche auf einem von Lippmann und Schwinger (dies. Zbl. 39, 424) angegebenen Variationsverfahren beruht. Er diskutiert einige Beispiele und gibt im Falle von kurzreichweitigen Kräften Gültigkeitskriterien an. Ferner wird auf die Möglichkeit einer Verwendung bei Wechselwirkungen hingewiesen, welche im Konfigurationsraum nicht diagonal sind (z. B. Pion-Nukleon-Wechselwirkung).
P. Urban.

Sartori, L. and V. Wataghin: P-wave pion nucleon scattering by variational method. Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 145—147 (1954).

Tidman, D. A.: The anomalous scattering of π mesons. Proc. phys. Soc., Sect. A 67, 559—561 (1954).

Deser, Stanley: Radiative effects in meson-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. 93, 612—615 (1954).

Die Strahlungskorrekturen niederster Ordnung werden durch eine Integralgleichung für die S-Matrix erfaßt. Diese Gleichung wird diskutiert und näherungsweise gelöst.
F. Cap.

Gatto, R.: Watson's type relations for Δ -particle production. Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 160—162 (1954).

Feynman, R. P. and G. Speisman: Proton-neutron mass difference. Phys. Review, II. Ser. 94, 500 (1954).

Kothari, D. S.: Fermi's thermodynamic theory of the production of pions. Nature 173, 590 (1954).

Die Fermische Theorie der Erzeugung von Pionen bei Zusammenstößen hoch-energetischer Nukleonen (dies. Zbl. 43, 434) berücksichtigt nicht die Lorentzkontraktion des Volumens, in welchem die Pionen erzeugt werden, wodurch deren Anzahl um einen Betrag der gleichen Größenordnung wie die berechnete Anzahl verfälscht werden.
Th. Serl.

Sternheimer, R. M.: Kinematic criterion for meson production in fundamental particle collisions. Phys. Review, II. Ser. 93, 642—643 (1954).

Espagnat, B. d': Meson production in meson-nucleon collisions. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 28, Nr. 11, 48 S. (1954).

Verf. untersucht Meson-Nukleon-Streuprozesse, bei denen ein oder zwei Mesonen erzeugt werden. Man vergleicht mit Kernreaktionen, weil man vermutet, daß die relativen l - und j -Anteile der Eigenfunktion zum Wirkungsquerschnitt bei elastischer Streuung ungefähr in gleicher

Weise beitragen wie bei der Mesonenerzeugung. Dieser Ansatz wird durch feldtheoretische Überlegungen plausibel gemacht. — Es wird der totale Wirkungsquerschnitt und die Winkelverteilung der erzeugten Mesonen angegeben. Dem Datum wird nur größenordnungsmäßige Genauigkeit zugeschrieben. *K.-H. Höcker.*

Ross, Marc: A connection between pion photoproduction and scattering phase shifts. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 454—460 (1954).

Auf halbempirischer Grundlage läßt sich die Erzeugung von π -Mesonen durch Photonen einer Energie von 200 bis 500 MeV durch die Phasenverschiebung bei der Meson-Nukleon-Streuung darstellen. Die Parameter werden im unteren Energiebereich empirisch ermittelt. Es zeigt sich dann, daß bei höheren Energien die Erfahrung nur mit der Annahme sehr kleiner Phasenverschiebungen bei s -Wellen verträglich ist, während $p_{3/2}$ -Wellen eine große Phasenverschiebung erfahren. *K.-H. Höcker.*

Dallaporta, N.: On the nature of the χ -meson. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 82—87 (1954).

Borde, A. H. de: The Auger effect and negative meson capture. *Proc. phys. Soc.*, Sect. A **67**, 57—67 (1954).

Yiftah, Shimon: Sur les problèmes non-résolus en théorie de particules élémentaires. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 1104—1106 (1954).

Terleckij, Ja. P.: Die Struktur der Elementarteilchen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **94**, 209—212 (1954) [Russisch].

Caldirola, P.: Spiegazione classica del momento magnetico anomale dell'elettrone. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 108—110 (1954).

Havas, Peter: On the classical theory of particles interacting with electromagnetic and mesonic fields. I. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 882—888 (1954).

Ableitung der klassischen Bewegungsgleichungen von Teilchen, welche sowohl mit einem elektromagnetischen wie auch mit einem vektoriellen oder skalaren Mesonfeld wechselwirken. *A. Papapetrou.*

Proca, A.: Mécanique du point. *J. Phys. Radium* **15**, 65—72 (1954).

Verf. versucht, die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie durch eine umfassendere zu ersetzen. Dabei glaubt er von folgenden Grundgedanken ausgehen zu dürfen: Zur Beschreibung der Bewegung soll man nicht unmittelbar die Koordinaten des 4-dimensionalen Raumes heranziehen, sondern zunächst gewisse Spinorgrößen ξ einführen und Bewegungsgleichungen für diese Größen aufstellen. Aus den Größen ξ sollen dann die verschiedenen physikalischen Vektoren und Tensoren sich ableiten lassen. Der Fall der kräftefreien Bewegung wie auch die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld sind ausführlich behandelt. *A. Papapetrou.*

Proca, Alexandre: Quantification en mécanique spinorielle. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 774—776 (1954).

Es werden die Regeln für die Quantisierung der früher (vorstehend. Referat) vom Verf. vorgeschlagenen neuen Punktmechanik aufgestellt. *A. Papapetrou.*

Ingraham, R.: Conformal geometry and elementary particles. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 237—240 (1954).

Verf. betrachtet den 5-dim. Raum R_5 der Sphären eines 4-dim. Raumes mit Signatur $(- - - -)$. Eine Sphäre hat die Gleichung $\Sigma(\xi^i - r^i)^2 - c^2(\tau - t)^2 = \pm (\hbar \omega c^{-1})^2$, betrachtet im „ q -Raum“, und $\Sigma(\pi_i - p_i)^2 - c^2(\eta - E)^2 = \pm (mc)^2$, betrachtet im „ p -Raum“. Die Fundamentalinvariante ist der Winkel zweier Sphären. Die Bewegungsgruppe im R_5 (konforme Gruppe im R_4) verbindet die physikalisch gleichwertigen (d. h. in bezug auf einander gleichförmig beschleunigten) Bezugssysteme. Es folgt die Reziprozität zwischen q -Raum und p -Raum. Verf. behauptet, daß die Geodätischen die Bahnen von freien Elementarpartikeln sind und daß die Nullgeodätischen mit $v = c$ die Photonen repräsentieren. *J. Haantjes.*

Jouvet, Bernard: Conséquences théoriques de la théorie électroneutrinienne du photon. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **238**, 327—329 (1954).

In der vom Verf. vorgeschlagenen Elektron-Neutrino-Theorie des Lichtes

[C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1642—1644 (1953)] muß der Begriff der Eichinvarianz verallgemeinert werden, wenn wenigstens die Bewegungsgleichungen (d. h. die Lagrangefunktion) invariant sein sollen. Der Strom ist dann aber nicht eich-invariant. Dadurch gibt es Stromverteilungen, die trotz nicht verschwindender Ladungen keinen Wechselwirkungen unterliegen und daher nach außen neutral erscheinen.

H. Kümmel.

Kaempffer, F. A.: On a two-fluid model of matter. Canadian J. Phys. **32**, 430—434 (1954).

Fer, Francis: Surfaces de raccord des phases dans la théorie de la double solution. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2286—2287 (1954).

Moitz, Lloyd: Nonconservation of rest mass and the Dirac equation. Phys. Review, II. Ser. **93**, 901—902 (1954).

Cap, Ferdinand: A new spinor theory of elementary particles. Phys. Review, II. Ser. **93**, 907 (1954).

Kernphysik:

Turner, J. S.: Investigation of triplet neutron-proton scattering in the low energy region using the Eckart and Bargmann potentials. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 111—116 (1954).

Die Theorie der Streuung von Neutronen an Protonen bei niedrigen Energien wird beherrscht von der Formel für die Phasenänderung δ_0 :

$$k \cotg \delta_0 = -1/a + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 - T k^4 + \dots$$

(k = Wellenzahl des einfallenden Neutrons, a = Fermische Streulänge, r_{eff} = effektive Reichweite, T = Proportionalitätsfaktor). Ein Rückschluß aus den experimentellen Daten auf das zwischen Neutron und Proton wirkende Wechselwirkungspotential würde zu bestimmteren Folgerungen führen, wenn es wenigstens gelänge, das Vorzeichen des Faktors T zu bestimmen. Da dies derzeit nicht möglich erscheint, versucht der Verf. umgekehrt für die Auswertung der Versuche solche Potentiale heranzuziehen, welche den Faktor T exakt zu Null machen. Eindeutige Rückschlüsse auf das fragliche Wechselwirkungspotential gelingen leider auch auf diese Weise nicht.

Th. Seel.

Thaler, R. M., J. Bengtson and G. Breit: Intermediate state coupling and the interpretation of high-energy nucleon-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. **94**, 683—689 (1954).

Die Verf. untersuchen die Streuung von Protonen an Protonen, unter der Annahme einer ${}^3P_2 - {}^3F_2$ -Kopplung durch einen Zwischenzustand des Zweinukleonen-Systems. Dieses Problem wird mittels eines Streumatrixformalismus behandelt, wobei der totale Drehimpuls $j = 2$ und der Bahndrehimpuls $L = j - 1$ gesetzt wurde. Verglichen wird mit den experimentellen Daten bei 240 MeV, die für ${}^1K_0 = 31^\circ$, ${}^1K_2 = 0$ ganz gut wiedergegeben werden können, vorausgesetzt daß $(I_1 + I_2)(E_R - E) \lesssim 0.3$. Es wurde auch gefunden, daß es möglich ist, die Daten der n - p - und p - p -Streuung unter Verwendung von Phasenverschiebungen zu erklären, in Übereinstimmung mit der Hypothese der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte. Die Durchführung der Berechnungen schließt sich an frühere Arbeiten von G. Breit [dies. Zbl. **28**, 283; Phys. Review, II. Ser. **69**, 472 (1946)] an.

P. Urban.

Fincke, K.: Zur Theorie der Nukleon-Nukleon-Streuung bei hohen Energien. Ann. der Physik, VI. F. **14**, 97—120 (1954).

Der allgemeinste nach den üblichen Invarianzforderungen bis zur Größenordnung v/c zulässige Wechselwirkungsansatz zwischen zwei Nukleonen wird zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Nukleon-Nukleon-Streuung bei hohen Energien herangezogen. Neben den Theorien von Case und Pais (dies. Zbl. **39**, 236) (Spin-Spin- und zentrale Wechselwirkungen verschwinden bei hohen Energien gegenüber der Spin-Bahn-Wechselwirkung) und Jastrow (dies. Zbl. **42**, 218) (Bei hohen Energien übernimmt die radiale Singulettwechselwirkung den Hauptteil der Streuung) ergibt sich als Spezialfall eine dritte Theorie (Die Spin-Spin-Wechselwirkung übernimmt bei hohen Energien den Hauptteil der Streuung), die prinzipiell in der Lage ist, den experimentellen Sachverhalt ladungsunabhängig zu verstehen. Keine der Theorien ist jedoch imstande, die Isotropie und Konstanz des Proton-Proton-Wirkungsquerschnitts bei hohen Energien verständlich zu machen.

Th. Seel.

Grigorov, N. L.: Über den Mechanismus des Zusammenstoßens von Nukleonen hoher Energie mit leichten Kernen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 835—838 (1954) [Russisch].

Clark, A. C.: The binding energy of the alpha particle. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 323—330 (1954).

Mit Hilfe des Variationsverfahrens von Morpurgo wird die Bindungsenergie des ^4He neu berechnet. Bei diesem Verfahren wird nicht ein Satz von Koeffizienten durch eine Art Ritzsches Verfahren bestimmt, sondern eine ganze Funktion wird variiert, um die Energie zum Minimum zu machen. Daraus ergibt sich eine Differentialgleichung, die in guter Näherung gelöst werden kann, und mit der daraus entspringenden Wellenfunktion wird die Energie des Grundzustandes bestimmt. In die zu variierte Funktion werden ein S - und zwei D -Zustände aufgenommen, in den Hamiltonoperator neben Zentral- auch Tensorkraft, beide vom Yukawatyp. Der S -Zustand mit nur einem D -Zustand ergibt als Bindungsenergie 20,85 MeV, während die Einbeziehung des zweiten D -Zustandes eine Bindungsenergie von 29,87 MeV ergibt (experimentell 28,2 MeV). Vermutlich werden weitere D -Zustände diesen Wert noch etwas vergrößern. Immerhin ist dieses Ergebnis bisher das beste unter mehreren theoretisch gefundenen. *R. Hagedorn.*

Woeste, K.: Graphische Ermittlung der Eigenwerte des räumlichen Rechteckpotentials mit Spinbahnkopplung. (Zum Schalenmodell der Atomkerne.) Z. Phys. **138**, 105—108 (1954).

Die Differentialgleichung des Leuchtnukleons wird durch ein graphisches Verfahren gelöst, das gestattet, in Abhängigkeit von der Spin-Bahn-Kopplungskonstanten bei gegebener Potentialtiefe unmittelbar den Eigenwert abzulesen oder umgekehrt. Für die Bahndrehimpulsquantenzahlen $l = 0, 1$ und 6 sind die dazu notwendigen Funktionen graphisch dargestellt. *K.-H. Höcker.*

Bloch, Claude: Theory of nuclear level density. Phys. Review, II. Ser. **93**, 1094—1106 (1954).

Es wird eine verbesserte Methode zur Berechnung der Termdichten von Atomkernen im Rahmen des Schalenmodells gegeben. Im Unterschied zu den bisherigen Rechnungen gelingt es dem Verf., den in der Einführung einer kontinuierlichen Termdichte des Einzelnukleons bestehenden Mittelungsprozeß zu vermeiden und die Austauschkräfte mit zu berücksichtigen. Die Ergebnisse stehen (im Gegensatz zu den bisher benutzten Ausdrücken) mit der von Critchfield und Oleska [Phys. Review, II. Ser. **82**, 243 (1951)] durchgeführten Termabzählung in ausgezeichnete Übereinstimmung, trotz der geringen Teilchenzahl ($N \approx 9$) und der relativ niedrigen Anregungsenergie (bis 25 MeV). Verf. interpretiert die errechnete Drehimpulsverteilung mit Hilfe der Vorstellung von starren Rotationen des Kernes. *G. Süßmann.*

Choudhury, D. C.: Intermediate coupling calculations in the unified nuclear model. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **28**, Nr. 4, 15 p. (1954).

Im Rahmen des von A. Bohr und B. R. Mottelson entwickelten Modells (dies. Zbl. **51**, 44) wird hier der Fall einer mittelstarken Kopplung zwischen einem einzelnen j -Nukleon und der Kernoberfläche behandelt. Dabei werden in den Zustandsvektor für die Oberfläche bis zu drei Schwingungsquanten einbezogen, während der Zustand des Einzelnukleons abgesehen von seiner magnetischen Quantenzahl als unveränderlich angesehen wird. In dieser Darstellung mit entkoppelten Eigenfunktionen wird die Matrix der Wechselwirkung berechnet und diagonalisiert. Als Funktion eines Kopplungsparameters findet man die Ergebnisse graphisch dargestellt: Die beiden tiefsten Energieniveaus eines $j = 5/2$ -Nukleons und die tiefsten für $j = 1/2, 3/2, 7/2, 9/2$. Sie sinken mit wachsender Kopplung. Interessanter ist eine andere Darstellung, in der die Energie des Grundzustandes subtrahiert wird und auch der Grenzfall starker Kopplung eingezeichnet ist. Bei einigem guten Willen läßt sich zwischen mittlerer und starker Kopplung bereits interpolieren. Schließlich werden noch magnetisches und Quadrupolmoment diskutiert und zwei Größen, die diesen Momenten in einfacher Weise zugeordnet sind, dargestellt. Die Arbeit hat nur die Absicht, eine Information über die zu erwartenden Eigenschaften der mittleren Kopplung zu geben. Mittlere Kopplung ist in praxi zu erwarten bei 14 oder 34 gefüllten Schalen, so daß die Behandlung mittlerer Kopplung und eines Leuchtnukleons kaum zu Ergebnissen führen kann, die auf reale Kerne anwendbar wären. Demzufolge werden keine Vergleiche mit experimentellem Material angestellt. *R. Hagedorn.*

Lane, A. M. and L. A. Radicati: Studies in intermediate coupling. II. Radiative transitions in light nuclei. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 167—180 (1954).

Teil I: Proc. phys. Soc. A **66**, 977 (1953). Es werden für leichte Kerne in der Umgebung von ^{13}N die Matrixelemente für E_1 -, M_1 - und E_2 -Übergänge angegeben, wie sie aus dem Schalenmodell folgen, wenn man nicht nur Einteilchenzustände, sondern mehrere zum Teil gleichartige Teilchen betrachtet. Die Auswertung erfolgt für LS - und jj -Kopplung nach der Methode der „fractional

parentage". Vergleich mit dem Experiment macht eine intermediäre Kopplung auch hier sehr wahrscheinlich, so daß diese in letzter Zeit viel diskutierte Kopplung nicht nur für die statischen Eigenschaften des Kerns (Spin, magnetische Momente usw.), sondern auch seine Strahlungsübergänge vernünftige Ergebnisse lieferte. Das wird am Beispiel ^{13}N diskutiert, wo mit einem (allerdings etwas unscharfen) Wert des Kopplungsparameters E_1 und M_1 Übergänge (und nach Angabe der Verf. drei andere unabhängige experimentelle Daten) quantitativ dargestellt werden. Da die Kopplungsart von Kern zu Kern verschieden sein wird und die Kernkräfte zu wenig bekannt sind, stellt jeder Kern ein Einzelproblem dar. Übrigens zeigt das Beispiel ^{13}N , daß die Extremfälle (LS bzw. jj) nicht notwendig auch Schranken für numerische Werte darstellen. *R. Hagedorn.*

Tauber, G. E. and Ta-You Wu: Some p - and d -shell nuclei in intermediate coupling. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 295—301 (1954).

Bekanntlich kommt man in leichten und mittelschweren Kernen mit reiner LS - oder jj -Kopplung nicht zu richtigen Ergebnissen für die Energieniveaus, Spins und so weiter. Die Arbeit liefert einen Beitrag zur Untersuchung der gemischten Kopplung. Ausgehend von der reinen LS -Kopplung und den zugehörigen Eigenfunktionen kann man die Energieniveaus für gemischte Kopplung durch Diagonalisierung der Energiematrix finden und als Funktion eines geeignet definierten Kopplungsparameters darstellen. Natürlich erfordert die explizite Rechnung eine genaue Kenntnis der Nukleonenwechselwirkung im Kern, die uns heute noch fehlt. Die Verf. wählen verschiedene Arten von Wechselwirkungen mit verschiedenen Reichweiten und stellen die Ergebnisse umfangreicher numerischer Rechnungen graphisch dar: Für zwei p - bzw. zwei d -Nukleonen werden für die verschiedenen Wechselwirkungen und Spins die Energien als Funktion des Kopplungsparameters aufgetragen. Die Reihenfolge der Niveaus hängt nicht nur von der Kopplung, sondern auch von Art und Reichweite der Wechselwirkung ab. Für Li^6 gelingt es — nahe bei der LS -Kopplung — die beiden ersten angeregten Zustände, den Spin 1 des Grundzustandes und das magnetische Moment mit einem Satz von Parametern wiederzugeben. Leider erfordern andere Kerne nicht allein andere Werte des Kopplungsparameters (was vernünftig wäre), sondern auch von Kern zu Kern oft verschiedene Nukleonenwechselwirkungen oder Reichweiten. Es scheint nötig, auf dem Gebiet der intermediären Kopplung noch erhebliches (numerisches) Material zu gewinnen, bevor die Verhältnisse sich klären. Viel Konkretes läßt sich aus einzelnen Rechnungen dieser Art eben nicht entnehmen, da infolge der Unsicherheit in den Ansätzen für die Nukleonenwechselwirkung zuviel freie Parameter in die Ergebnisse eingehen und diese den experimentellen Werten zu anpassungsfähig machen. *R. Hagedorn.*

Regge, T.: Tensor force and intermediate coupling in p -shell nuclei. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 285—291 (1954).

Verf. untersucht den Einfluß der Tensorkraft auf die Lage der angeregten Terme leichter Kerne am Beispiel $A = 6$ und $A = 14$. Es stellt sich heraus, daß die Korrekturen nicht vernachlässigbar sind, aber die Übereinstimmung mit der Erfahrung nicht verbessern. *G. Süßmann.*

Berger, J. M.: Deuteron photodisintegration at intermediate energies. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1698—1713 (1954).

Sueoka, Seiichi: On the matrix elements of the spin-orbit interaction in the d^3 configuration. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 302—303 (1954).

Volkov, A. B.: A modified shell model of odd-even nuclei. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1664—1670 (1954).

Riezler, W., F. Esper und H. Meurers: Die Abhängigkeit der Reizschwelle des menschlichen Auges von der Dauer der Lichtimpulse und der Wellenlänge des Lichtes. *Z. Phys.* **137**, 238—255 (1954).

Kompaneec, A. S.: Die Gleichungen des self consistent field für einen Kern mit Berücksichtigung der elektrostatischen Kräfte. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 153—158 (1954) [Russisch].

Wenn man die Hartree-Fock-Gleichungen für das self consistent field mit Hilfe der Dichtematrix ausdrückt und dann die Bewegungsgleichung für die Dichtematrix in Fourierdarstellung formuliert, erhält man einen Ausdruck, der neben der klassischen Poissonklammer noch Quantenkorrekturen (an sich beliebig hoher Ordnung) enthält. Ihre Bedeutung hinsichtlich der Behandlung der Atomkerne wird untersucht. — Im zweiten Teil der Arbeit wird unter der Annahme expliziter Wechselwirkungsformen die Bewegungsgleichung für die Dichtematrix formuliert und dabei die Coulombsche Abstoßung der Protonen berücksichtigt. Die entstehenden Gleichungen werden dann diskutiert. Eine Lösung der Gleichungen wird nicht versucht. *R. Hagedorn.*

Kolesnikov, N. N.: Analyse der Kernperiodizitäten mit Hilfe der Kurven der Stabilität. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 233—236 (1954) [Russisch].

Humblot, J.: Potentiels critiques et niveaux virtuels des noyaux atomiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 148—163 (1954).

Die Siegertsche Bedingung, durch die virtuelle Niveaus bestimmt werden, kann eine Doppelwurzel haben. Durch Einführung einer Störung im Potential spaltet diese Doppelwurzel auf. Man berechnet die Wirkungsquerschnitte für die diesen beiden Wurzeln entsprechenden Niveaus. *K.-H. Höcker.*

Radicati, L. A.: Isotopic spin and Coulomb forces. II. Excited states of light nuclei. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 39—43 (1954).

[Teil I: Proc. Phys. Soc., Sect. A **66**, 139—144 (1953)]. Bekanntlich ist der Isotopenspin nur eine „gute Quantenzahl“, solange man annehmen darf, daß die Kernkräfte zwischen N und P , N und N und P und P gleich sind. Die erste offensichtliche Verletzung dieser Annahme kommt von den Coulombkräften. Fraglich ist aber, ob davon abgesehen die Kernkräfte ladungssymmetrisch sind. — Die Annahme der Erhaltung des Isotopenspins hat gewisse Auswahlregeln in Kernreaktionen zur Folge, die aber im Experiment nicht immer eingehalten werden. (Übergang $E1$ von 7.12 MeV → Grundzustand bei O_{16} .) Die Wirkung der bekannten Coulombkraft wird eine gewisse Mischung von Zuständen verschiedenen Isotopenspins verursachen. Sollte damit die Verletzung der Isotopenspin-Auswahlregeln erklärbar sein, so kann man an der Vorstellung der Ladungssymmetrie der Kernkräfte festhalten. — Eine quantitative Untersuchung dieser Frage (bei leichten Kernen, wo die Erhaltung des Isotopenspins relativ gut gilt) ist also nicht nur von Interesse für diese oder jene spezielle Reaktion, sondern auch für unsere Kenntnis der Kernkräfte. In der vorliegenden Arbeit wird (mit gruppentheoretischen Methoden) die Reinheit niedrigliegender Niveaus bez. Isotopenspin in erster störungstheoretischer Näherung untersucht unter besonderer Beachtung der Zustände mit ungerader Parität in Kernen gerader Teilchenzahl. Die Coulomb-Störung reicht aus, um z. B. die oben erwähnte Verletzung der Auswahlregel zu erklären. *R. Hagedorn.*

Purcell, E. M.: Nuclear magnetism. Amer. J. Phys. **22**, 1—8 (1954).

Maurin, L.: Sind elektrische Oktupollinien im Röntgenspektrum beobachtbar? Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 69—72 (1954).

Ayant, Yves: L'élargissement quadrupolaire des raies de résonance magnétique nucléaire dans les liquides. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1876—1878 (1954).

Lurçat, François: Équations macroscopiques de la résonance quadrupolaire. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1386—1388 (1954).

Eine makroskopische Theorie der Kernquadrupol-Resonanzen auf quantenmechanischer Grundlage wird in Analogie zu einer Theorie von Bloch für die magnetische Kernresonanz entwickelt. Hierzu wird die Zeitabhängigkeit der Komponenten des Tensors der Quadrupolmomente untersucht. *W. Humbach.*

Schwartz, C.: The ground states of odd-odd-nuclei. Phys. Review, II. Ser. **94**, 95—99 (1954).

Die Grundzustände von ungerade-ungerade-Kernen werden in Abhängigkeit vom Spin folgendermaßen berechnet: Neutronen und Protonen werden als durchaus verschieden angesehen und jede Gruppe für sich eingeteilt in eine abgeschlossene Schale (Unterschale) und „Leuchtnukleonen“. Letztere haben untereinander eine nicht näher spezifizierte Wechselwirkung so, daß zunächst nur die Leuchtprotonen untereinander und die Leuchtnutronen untereinander wechselwirken. Es resultiert dann eine Neutronengruppe und eine Protonengruppe, jede mit einem festen Gesamtspin und jede mit einer Wellenfunktion. Als Summe von Produkten solcher Gruppenwellenfunktionen wird die Wellenfunktion nullter Ordnung des Kerns dargestellt und im Bild dieser Wellenfunktion die Störungsenergie erster Ordnung der Wechselwirkung zwischen beiden Gruppen $V_{np} = \sum_{i,k} V_{ik}$ berechnet. Dabei läuft etwa i über alle Leuchtprotonen und k

über die Neutronen; V_{np} enthält keine Neutron-Neutron oder Protonprotonterme mehr. Zwischen beiden Gruppen wird dann eine reine j - j -Kopplung angenommen und für V_{ik} eine Mischung aus Wigner- und Bartlett Kräften (mit δ -Potential). Die Matrixelemente werden nach der Methode von Racah ausgerechnet und die Lage der Grundzustände zu verschiedenem Gesamtspin als Funktion eines Parameters dargestellt, der die Stärke des Anteils der Bartlett Kräfte mißt. Die Spins vieler Kerne können mit dieser Methode dargestellt werden, ohne daß der erwähnte Parameter wesentlich schwankt. Die Nordheimschen Regeln haben in dieser Theorie nur beschränkte Gültigkeit.

R. Hagedorn.

Hitchcock, A.: Spins of odd-odd nuclei in the j - j -coupling model. I, II. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 379—384, 385—393 (1954).

I. Die Nordheimschen Regeln für den Spin von ungerade-ungerade-Kernen sind empirische Ursprünge. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man die leichten Kerne ($A \lesssim 60$) in drei Klassen teilen kann, so daß für zwei solcher Klassen die Regeln theoretisch begründet werden können (allerdings unter teilweise etwas harten Annahmen). Tatsächlich fallen in diese ersten beiden Klassen (bis auf eine wesentliche Ausnahme: ^{36}Cl) nur Kerne, die den Nordheimschen Regeln genügen. Immerhin bleiben noch etliche, die den Regeln genügen, für die aber vorläufig eine theoretische Einsicht kaum besteht. Aus den Rechnungen folgen dann einige detaillierte Angaben zu Nordheims Regeln. — II. Für eine Reihe von ungerade-ungerade-Kernen werden die Spins des Grundzustandes und die Reihenfolge der ersten angeregten Zustände berechnet, aber lediglich die Ergebnisse angegeben. Der Rechnung liegt jj -Kopplung zugrunde. Als Wechselwirkung der beiden äußeren Nukleonen wird ein Gaußsches, Yukawa- und δ -förmiges Potential mit verschiedenen Austauschmischungen benutzt. Gaußpotential mit Serbermischung gibt die beste Übereinstimmung mit dem Experiment. Irgendwelche festen Regeln wie die Nordheimschen ergeben sich nicht. (Allerdings bezieht sich Teil II auf solche Kerne, die nicht in Teil I bezeichneten Gruppen angehören, für die die Nordheimschen Regeln beweisbar waren.)

R. Hagedorn.

Marty, C., R. Nataf et J. Prentki: Sur le spin de l'état fondamental et des premiers niveaux excités de certains noyaux impair-impairs. J. Phys. Radium 15, 134—141 (1954).

Im Rahmen des j - j -Kopplungsmodells werden Kerne mit einem Neutron und einem Proton (bzw. entsprechenden „Löchern“) außerhalb einer abgeschlossenen Schale oder Unterschale betrachtet. Als Grundfunktionen werden Oszillatoreigenfunktionen benutzt und die Matrixelemente der Wechselwirkung in LS -Darstellung ausgerechnet und dann in die j - j -Darstellung transformiert. Als Wechselwirkungsoperator wird angesetzt

$$V = -(c_1 + c_2 P_\pi + c_3 P_\sigma + c_4 P_\pi P_\sigma) V_{12}(r); \quad c_1:c_2:c_3:c_4 = 1:4:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}.$$

Für $V_{12}(r)$ werden die Formen behandelt: δ -Funktion, Yukawapotential und konstantes Potential. Die Termreihenfolge hängt von der Wahl des Potentials ab, jedoch stimmen für δ - und Yukawapotential die Grundterme überein. Speziell ergibt sich für ^{40}K der Grundzustand mit $j = 4$.

R. Hagedorn.

Lepore, Joseph V. and Richard N. Stuart: Nuclear events at high energies. Phys. Review, II. Ser. 94, 1724—1727 (1954).

Sasakawa, Tatuya: The formal theory of error estimation of rearrangement collisions. Progress theor. Phys. 11, 121—123 (1954).

Price, P. C.: On simplifying the reduction by least squares of angular distribution experiments in nuclear physics. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 237—245 (1954).

Jauho, Pekka: The number of artificial nuclear reactions as a random variable. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 165, 12 S. (1954).

Die Wahrscheinlichkeit, daß gerade n einfallende Partikel zur Auslösung von m Kernreaktionen führen, ist $P(n^{(m)}) = \sigma \frac{N!}{m!} \sum_{v=1}^m (-1)^{m-v} [1 - (N+1-v) \cdot \sigma]^{n^{(m-1-v)}} \cdot (v-1)!(m-v)!$. Die mittlere Zahl für die Auslösung von m Kernreaktionen ist

$$u = \sigma^{-1} \{ \log [N/(N-m)] + O(1/N) + O[1/(N-m)] \},$$

σ totaler Wirkungsquerschnitt, N Zahl der Kerne im Target. K.-H. Höcker.

Francis, N. C. and K. M. Watson: The theory of the deuteron stripping reactions. Phys. Review, II. Ser. 93, 313—317 (1954).

Man geht von einem Mehrkörperproblem aus. Dafür wird formal eine strenge Lösung angegeben. Mit Annahmen, die etwas weniger einengend sind als die Butlers, kann das Mehrkörperproblem auf das sich in einem Potentialwall bewegende Deuteron reduziert werden. Die Beziehungen zu früheren Verfahren werden deutlich gemacht. *K.-H. Höcker.*

Simon, A. and T. A. Welton: Polarization from isolated resonances. Phys. Review, II. Ser. **94**, 943—944 (1954).

Polarisation kann auftreten, wenn eine der drei Bedingungen erfüllt ist: 1. Es verläuft die Reaktion unter Mitwirkung von wenigstens zwei Verbundkernen, die sich in Drehmoment und/oder Parität unterscheiden. 2. Bei elastischer Streuung kann Interferenz zwischen den durch ein Resonanzniveau und den am Potential erzeugten Streuwellen erfolgen. 3. Es kann auch Polarisation bei Vorhandensein nur eines Verbundkerns auftreten. In diesem Fall muß der Verbundkern auf zwei Weisen aufbaubar sein oder zerfallen, die sich durch Drehimpulsquantenzahl oder Spin unterscheiden. Auf der Grundlage der Eisenbudschen Formel werden einige Züge der so zustande kommenden Polarisation diskutiert. *K.-H. Höcker.*

Jones, G. A. and D. H. Wilkinson: Isotopic spin selection rules. V. Radiations from ^{10}B . Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 703—711 (1954).

Scott, J. M. C.: The surface of a nucleus. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 441—465 (1954).

Es gibt mehrere Methoden, die „Kernradien“ zu bestimmen und dementsprechend auch für ein und denselben Kern mehrere Werte des Radius. Hier wird der Radius durch die Dichteverteilung definiert und aus einer statistischen Analyse der Neutronenstreuweiten erschlossen. Daß das sinnvoll ist, folgt aus der Tatsache, daß man dem Kernrand ein Übergangsgebiet zuordnen muß, in dem das Kernpotential (etwa) exponentiell verschwindet, und daß die Breite dieses Gebiets gleichzeitig von der Dichteverteilung und der Reichweite der Kernkräfte abhängt. Es zeigt sich, daß diese Breite für ein Yukawapotential größer sein müßte, als sie experimentell ist, und für exponentielles oder Gaußsches Potential kleiner. So ist es am einfachsten, sie als wesentlich durch die Dichteabnahme bestimmt anzusehen und die endliche Reichweite der Kernkräfte nur als Korrektur. Danach übrigens sollte das Yukawapotential nicht der Wirklichkeit entsprechen. Die statistische Analyse der Streulängen (die etwas angreifbar scheint, da eine statistische Verteilung der Phasen der Wellenfunktion im Kerninnern angenommen wird) verlangt eindeutig eine Ausschmierung des Kernpotentials von gleicher Größenordnung, wie der Dichteabnahme der Kernmaterie entspricht, läßt aber infolge der Eigenschaften der Statistik (Cauchy-Verteilung) keine genauere Aussage über den eigentlichen Radius zu, der indessen kleiner zu sein scheint, als bisher angenommen. Schließlich wird für Protonen der Gamowwall unter Benutzung des ausgeschmierten Kernpotentials untersucht und unter Berücksichtigung des Tunneleffekts seine effektive Höhe in Abhängigkeit von der Energie berechnet, die für Energien, die fast zu seiner Überwindung ausreichen würden, niedriger herauskommt als (nach dem Rechteckpotential) bisher üblicherweise angenommen. Folgerungen für Protonenemission liegen auf der Hand. *R. Hagedorn.*

Satchler, G. R.: Some remarks on radiative capture and stripping reactions. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 471—474 (1954).

Cocconi, Giuseppe: Nucleon-nucleon collisions at relativistic energies. Phys. Review, II. Ser. **93**, 1107—1108 (1954).

Tobocman, W.: Theory of the (d, p) reaction. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1655—1663 (1954).

Abraham, G.: Absolute magnitudes of (d, p) scattering cross sections. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 273—275 (1954).

Clementi, E.: Sezione d'urto per i processi (d, p) e (p, d) . Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 412—415 (1954).

Rose, M. E.: Mixed gamma-mixed gamma angular correlation. Phys. Review, II. Ser. **93**, 477 (1954).

Horowitz, J. et A. M. L. Messiah: Les corrélations angulaires (dp, γ) et la théorie du „stripping“. J. Phys. Radium **15**, 142—144 (1954).

Benoist, Pierrette: Sur les corrélations angulaires entre un rayonnement nucléaire et le rayonnement Λ en coïncidence. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1498—1499 (1954).

Gerjuoy, E. and David S. Saxon: Application of variational methods to intermediate and high-energy scattering. Phys. Review, II. Ser. **94**, 478—491 (1954).

Es wird die Anwendung des Schwingersehen Variationsprinzips auf die Streuung an einem Yukawa-Potential behandelt. Für einen Energiebereich von 20 bis 150 MeV

wird ein detaillierter Vergleich der auf Grund der Bornschen Näherung, des Variationsverfahrens und der exakten Methoden gefundenen Resultate durchgeführt. Die Nützlichkeit des Variationsprinzips wird diskutiert, und Betrachtungen über die Verhältnisse bei hohen Energien werden angestellt. Dabei wird auch die zweite Bornsche Näherung untersucht. Auch die Beziehung zwischen den Variationsverfahren für die totale Streuamplitude und für die Phasenverschiebungen werden behandelt.

P. Urban.

Dardel, G. F. von: The interaction of neutrons with matter studied with a pulsed neutron source. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 75, 104 p. (1954).

Scott, J. M. C.: Neutron scattering and the weak-interaction model of the nucleus. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 751—757 (1954).

Frank, R. M. and J. L. Gammel: Inelastic scattering of protons and neutrons by deuterons. Phys. Review, II. Ser. 93, 463—470 (1954).

Unter der Annahme, daß die Reichweite der Kernkräfte sehr klein ist gegenüber dem Radius des Deuterons und der Wellenlänge der einfallenden Teilchen, werden die Wirkungsquerschnitte für elastische und nichtelastische Zusammenstöße zwischen Protonen und Deuteronen bzw. Neutronen und Deuteronen auf Grund der Bornschen Näherungsmethode berechnet. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten ergibt eine überraschende Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Werten.

Th. Seel.

Matsumoto, Masahiko and Wataro Watari: Nucleon scattering by a potential. Progress theor. Phys. 11, 63—79 (1954).

Die Verff. behandeln die Streuung eines Nukleons an einem zentralen Potential, welches aus einer Folge von Rechteckspotentialen besteht. Eine ausgedehnte Untersuchung über die Beziehung zwischen der Phasenverschiebung der Partialwellen und der Potentialform für einfallende Energien unter 300 MeV wird durchgeführt. Dabei werden die *S*-, *P*-, *D*-, *F*- und *G*-Wellen in Betracht gezogen und die Resultate graphisch zusammengestellt. Es ergibt sich, daß die *S*-Welle durch den Wechsel des inneren Teiles des Potentials beeinflusst wird, während *P* und höhere Wellen hauptsächlich durch den äußeren Teil des Potentials gestreut werden. Tensorkräfte werden in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt, dagegen spätere Untersuchungen darüber angekündigt.

P. Urban.

Fermi, E.: Polarization of high energy protons scattered by nuclei. Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 407—411 (1954).

Chase, D. M. and F. Rohrlich: Elastic scattering of protons by nuclei. Phys. Review, II. Ser. 94, 81—86 (1954).

Die Verff. behandeln die elastische Streuung von Protonen der Energie 18,3 MeV an Al, Cu und Ag unter Zugrundelegung des sogenannten optischen Kernmodells. In diesem Modell wird die Wechselwirkung der einfallenden Partikel mit den einzelnen Bestandteilen des streuenden Kernes durch ein Effektivpotential beschrieben, welches die Zurückführung des Problems auf ein äquivalentes Einkörperproblem gestattet. Dieses Effektivpotential ist im allgemeinen komplex, wodurch eine ziemlich enge Analogie mit der Streuung elektromagnetischer Wellen an einem Medium von komplexem Brechungsindex besteht. Die theoretischen Ergebnisse werden mit Experimenten von P. C. Gugelot [Phys. Review, II. Ser. 87, 525 (1952)] und I. E. Dayton (private Mitteilungen) verglichen, wobei alle verfügbaren Parameter in größeren Bereichen variiert wurden. Trotzdem konnte keine befriedigende Übereinstimmung erzielt werden. Im Anschluß daran wurden verschiedene Modifikationen diskutiert und gezeigt, daß das „Randbedingungsmodell“ nach H. Feshbach und V. F. Weisskopf (dies. Zbl. 34, 281) eine gute Näherung für das optische Modell liefert, innerhalb der Grenzen seiner Gültigkeit.

P. Urban.

Chamberlain, Owen and Martin O. Stern: Elastic scattering of 190-MeV deuterons by protons. Phys. Review, II. Ser. 94, 666—676 (1954).

Die Verff. bestimmen den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von 190 MeV-Deuteronen an Protonen experimentell, wobei sie einen Winkelbereich von 15°—170° im Schwerpunktssystem untersuchen. Die gefundenen Werte werden mit den theoretisch ermittelten verglichen, welche durch Anwendung einer Methode von Chew [Phys. Review, II. Ser. 74, 809 (1948)] ermittelt wurden. Bei Zugrundelegung einer Tensorwechselwirkung erzielen die

Verff. eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, während rein zentrale Kräfte zu Abweichungen Anlaß geben. *P. Urban.*

Freese, E. und K. Hain: Elastische Elektronenstreuung an ausgedehnten Atomkernen bei mittleren Energien. *Z. Naturforsch.* **9a**, 456—462 (1954).

Die Verff. behandeln die elastische Streuung von Elektronen mittlerer Energie an ausgedehnten Atomkernen und berechnen die Abweichung gegenüber der Streuung am punktförmigen Kern. Dabei wird der Hg-Kern mit homogen- und oberflächen-verteilter Ladung zugrunde gelegt. (Mit scharfem Kernrand!) Als Radius für die Ladungsverteilung im Kern wurde die übliche Beziehung $R = A^{1/3} \cdot 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ benutzt. Die Abweichung kann bei Elektronen der Energie 2.2 MeV schon bis 10% betragen. *P. Urban.*

Yennie, D. R., D. G. Ravenhall and E. Baranger: The sign of the phase shift in the elastic scattering of electrons. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 1128—1129 (1954).

Corinaldesi, E.: Relativistic scattering of electrons and the Born approximation. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **11**, 200—202 (1954).

Vachaspati: Elastic scattering of electrons by the Coulomb field of nuclei using Born approximations. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 502—513 (1954).

In dieser Arbeit aus der Schule Bohrs berechnet der Verf. in zweiter Bornscher Näherung den Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von Elektronen am Kern, unter Zugrundelegung eines Modells, für welches sich besonders einfache Matrixelemente ergeben. Das Potential seines Modelles setzt sich aus einem anziehenden Coulombpotential und einem abstoßenden Yukawapotential zusammen, wobei letzteres die Reichweite $1/B$ und die relative Stärke C besitzt. Die Ladungsverteilung hat die Form

$$\rho = -Ze \{ (C-1) \delta^3(r) - (CB^2/4\pi |\tau|) e^{-B|\tau|} \}.$$

Da, wie man weiß, die Streuung gegenüber der feineren Form des Kernmodells ziemlich unempfindlich ist, kann man diese Berechnungen dazu benutzen, um die Wirkungsquerschnitte der Streuung an verschiedenen Modellen zu ermitteln. Das angenommene Potential enthält zwei willkürliche Parameter B und C , die dem Experiment angepaßt werden können. Durch geeignete Wahl von B und C kann jedes andere einparametrische Modell hergestellt werden. (Die anderen Modelle enthalten den Kernradius R als Parameter!) So ergibt sich das Modell mit kugelförmiger Ladungsverteilung (uniform model) beispielsweise, indem man $(BR)^2 = 14,8$ und $C = 1,75$ setzt. Das schalenförmige Modell erhält man durch die Werte $(BR)^2 = 7,4$ und $C = 1,75$. Das vorliegende Modell ist also das allgemeinste. Außerdem gestattet es, auch die zweite Bornsche Näherung zu bestimmen. Der Verf. vergleicht seine Ergebnisse mit denen von Acheson (dies. Zbl. **43**, 218) für 20 bis 35 MeV-Elektronen und Ordnungszahlen bis zu $Z = 50$. Er findet gute Übereinstimmung mit seinen Rechnungen. *P. Urban.*

Konopinski, E. J.: A possible relation between the pseudoscalar β coupling and the nuclear spin-orbit coupling. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 492—493 (1954).

Nataf, Roger: Variation des fonctions d'onde de Dirac de l'électron à l'intérieur du noyau quand on tient compte de l'extension de la charge nucléaire. Expressions algébriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1012—1014 (1954).

Banerjee, M. K. and A. K. Saha: Shape factors for β -decay. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A **224**, 472—487 (1954).

Les AA. calculent les facteurs de forme pour les transitions β d'ordre d'interdiction L en utilisant une méthode de J. A. Spiers et R. J. Blin-Stoyle (ce Zbl. **47**, 451) introduisant les trois paramètres: ξ covariance spatiale, η parité spatiale, ζ parité d'espace-temps. Une introduction mathématique rappelle les propriétés fondamentales de l'algèbre de Wigner-Racah et les règles de factorisation des matrices de Dirac. *G. Petiau.*

Good jr., R. H.: Effect of atomic electron screening on the shape of forbidden beta spectra. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 931—933 (1954).

Laberrigue-Frolow, Jeanne et Roger Nataf: Sur la forme des spectres β interdits du premier ordre. *J. Phys. Radium* **15**, 438—444 (1954).

King, R. W. and D. C. Peaslee: First-forbidden matrix elements in β decay. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1284—1292 (1954).

Les AA. discutent les valeurs de $\log ft$ correspondant aux éléments de matrices

du premier ordre d'interdiction avec l'hypothèse d'une interaction nucléaire de la forme $S - T + \lambda_p P$. Dans les transitions dites défavorisées pour lesquelles dans le modèle en couches il y a mélange des configurations, on montre que les valeurs de $\log ft$ se groupent autour de 6.5, 7.5 et 8.5 selon que $M = 0, 1$ ou 2 . *G. Petiau.*

Fowler, G. N.: Electron-neutrino angular correlation functions in the theory of beta decay. Proc. phys. Soc., Sect. A **67**, 117-124 (1954).

L'A. calcule les fonctions de corrélation angulaire pour les transitions interdites du premier et du second ordres en considérant les combinaisons linéaires des cinq types d'interactions qui ne sont pas exclues par les résultats expérimentaux relatifs aux spectres des transitions permises. L'effet du champ coulombien est négligé. Les formules obtenues sont classées suivant les règles de sélection satisfaites par les éléments de matrices et évaluées dans un cas particulier pour lequel les valeurs des paramètres conduisent à un effet coulombien négligeable. *G. Petiau.*

Kofoed-Hansen, O.: Theoretical angular correlations in allowed beta transitions. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **28**, Nr. 9, 19 S. (1954).

L'A. détermine les distributions de probabilités relatives à la répartition angulaire dans la radioactivité β , exprimées au moyen des paires de variables (E, r) , (E, φ) et (r, φ) . (E énergie de la particule β , r énergie de recul du noyau, φ angle entre les directions du recul et de l'électron émis). L'A. discute également l'importance des corrections correspondant au cas où l'énergie de recul n'est pas négligée dans l'équation de conservation de l'énergie. *G. Petiau.*

Stech, Berthold: Die elektrische Strahlung isomerer Kerne mit ungerader Neutronenzahl. Z. Naturforsch. **9a**, 1-4 (1954).

Kerne mit ungerader Neutronenzahl können ihre Anregungsenergie auch beim strengen Einteilchenmodell unter Aussendung elektrischer Multipolstrahlung verlieren. Die Ausstrahlung wird durch einen relativistischen Term, der vom magnetischen Moment des Neutrons herrührt, ermöglicht. Seine Berechnung, für die zuerst B. Stech, dies. Zbl. **46**, 442, eine größenordnungsmäßige Abschätzung gegeben hatte, wird in vorliegender Arbeit auf Grund exakter Formeln für das entsprechende Matrixelement durchgeführt. *Th. Seel.*

Vigon, M. A. und K. Wirtz: Zur Theorie der Sondenstörungen im Neutronenfeld. Z. Naturforsch. **9a**, 286-291 (1954).

Die Beeinflussung der Neutronendichte sowie der Sondenanzeige selbst durch die in ein Medium eingebrachte Sonde wird mit Hilfe der elementaren Diffusionstheorie berechnet, und zwar für Kugelsonden sowie für unendlich ausgedehnte und endliche Kreisscheibensonden. *H. Volz.*

Volkov, Howard C.: The effect of inelastic collisions on the slowing-down length of neutron in a hydrogenous mixture. J. appl. Phys. **25**, 83-84 (1954).

Die Bremslänge von Neutronen in einem wasserstoffhaltigen Medium wird nach einer von Marshak [Reviews modern Phys. **19**, 185 (1947)] entwickelten Methode behandelt unter der Annahme, daß 1. die Massen der nichtwasserstoffartigen Kerne unendlich sind, 2. bei der unelastischen Streuung nur diskrete Energieniveaus der gestoßenen Kerne wirksam werden. Die Resultate werden auf eine Eisen-Wasser-Mischung angewendet, wobei eine Anfangsenergie der Neutronen von 2,25 MeV angenommen wird. Für verschiedene Energiewerte unterhalb wird die Bremslänge mit und ohne unelastische Streuung in Tabellenform angegeben. *H. Volz.*

Grosjean, C. C.: Solution of a non-isotropic random flight problem in the case of a non-isotropic point source. Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 11-40 (1954).

Es wird Dichte- und Richtungsverteilung der Neutronen in einem Medium berechnet, welches einen kleinen, ebenen Absorber enthält. Dieser wird als eine (negative) nichtisotrope, punktförmige Neutronenquelle behandelt, wobei auch die Streuprozesse in dem betrachteten Medium einen nichtisotropen \cos -Anteil haben dürfen. Zwischen den definierten elementaren Streuwahrscheinlichkeitsfunktionen werden exakte Rekursionsformeln aufgestellt. Diese werden nach Kugelfunktionen entwickelt. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Besselfunktionen

und die Legendreschen Polynome ist es möglich, die Integralbeziehungen in einfachere lineare Gleichungen zu verwandeln. Die Schlußresultate ergeben sich in Form von Integralen, die numerisch ausgewertet werden können. Durch Einführung einfacherer Funktionen unter den Integralzeichen lassen sich gute Annäherungen erhalten. Insbesondere wird die für die Diffusion maßgebende effektive freie Weglänge, hier Transportweglänge genannt, mit derjenigen für die einfache Diffusionstheorie, in welcher Absorption nicht mit berücksichtigt ist, verglichen. Die Unterschiede werden nur merklich, falls die Streuweglänge nicht klein ist gegen die Absorptionsweglänge, und zwar wird die Transportweglänge in der vorliegenden genaueren Theorie etwas verkleinert.

H. Volz.

Frisch, O. R. and D. J. Littler: Pile modulation and statistical fluctuations in piles. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 126—140 (1954).

Eine absorbierende Probe, deren Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang gemessen werden soll, wird rasch zwischen dem Zentrum und dem Rand des Piles hin- und hergeschoben und die Änderung des Vermehrungsfaktors gemessen. Durch Vergleich mit einer entsprechenden Borprobe wird der Wirkungsquerschnitt der betreffenden Substanz ermittelt. Zur Bestimmung wird im wesentlichen die erste Harmonische der beobachteten Schwankung verwertet. Es werden Experimente beschrieben, bei denen diese erste Harmonische auf elektromechanischem Wege aus dem Meßverlauf herausgeholt wird. Von den statistischen Schwankungen des Meßwertes werden automatisch auch nur die Beiträge dieser Harmonischen wirksam. Es wird die Frage aufgeworfen, ob es eine Frequenz gibt, bei der diese Schwankungen möglichst gering sind. Dazu wird das Fourierspektrum der Schwankungen theoretisch untersucht. Bei der Statistik des Kaskadenprozesses wird von verzögerten Neutronen abgesehen. Die Experimente erwiesen es als notwendig, auch das Widerstandsrauschen der elektrischen Anordnung in die Formel einzubauen. Die Prüfung der Schwankungsformel erfolgt an dem nicht-modulierten Pile. Es zeigte sich, daß die Schwankungen bei vorgegebener Frequenz einer Gaußfunktion folgen, deren Breite der Modulationsperiode proportional ist. Durch verschiedene Stellungen der Meßkammer konnte der Effekt des Widerstandsrauschens eliminiert werden. Das Ergebnis läßt rückwärts den Schluß zu, daß die Zahl der pro Spaltung emittierten Neutronen bei $U(235)$ einer Poissonformel folgt. Das Verhältnis des eigentlichen Meßwertes zum Untergrund erweist sich als unabhängig von der Periode. Der tatsächlich ermittelte mittlere Fehler liegt etwa 30% höher als der aus der Schwankungsformel berechnete, was den Schluß zuläßt, daß diese den wesentlichen Beitrag zu den Schwankungen der Meßwerte liefert.

H. Volz.

Robinson, Lawrence Taylor: Concept of stability for nuclear reactors. J. appl. Phys. 25, 516—518 (1954).

Es wird auf das Problem der Stabilität von Kern-Reaktoren hingewiesen (vgl. folgend. Referat). Die entsprechenden Gleichungen werden (allerdings ohne Berücksichtigung der meistens ausschlaggebenden verzögerten Neutronen) in eine für die Darstellung in der Phasenebene geeignete Form gebracht. Verschiedene Arten der Stabilität werden unterschieden. Literaturhinweise werden angegeben, eine Lösung wird nicht versucht.

H. Gaus.

Ergen, William Krasny: Kinetics of the circulating-fuel nuclear reactor. J. appl. Phys. 25, 702—711 (1954).

Beim Betrieb eines Reaktors bewirkt eine Zunahme der Neutronendichte bzw. der Reaktorleistung eine Änderung der Temperatur und damit eine Änderung der Reaktivität, die wiederum auf die Neutronendichte einwirkt. Da die Temperaturänderung infolge der Wärmekapazität des Reaktors mit einer zeitlichen Verzögerung auftritt, sind zeitliche Schwingungen der Neutronendichte möglich. Es wird hier die (praktisch sehr wichtige) Frage der Stabilität eines Reaktors in bezug auf solche Schwingungen geprüft, d. h. es wird untersucht, ob diese Schwingungen notwendigerweise gedämpft sind oder ob ein zeitliches Anwachsen der Amplitude möglich ist. Das Problem führt auf nichtlineare Differentialgleichungen mit Verzögerungstermen. Ein mathematisch strenger Beweis für die Stabilität konnte bisher nicht erbracht werden; es werden aber Betrachtungen mitgeteilt, die mit ziemlicher Sicherheit auf eine Stabilität schließen lassen. Es wird hier besonders der Reaktor mit umlaufendem Brennstoff (besonders ökonomische Kühlmöglichkeit) untersucht. Mit Maschinen gerechnete Lösungen werden mitgeteilt.

H. Gaus.

Dorman, L. L.: Zur Theorie der meteorologischen Effekte der kosmischen Strahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 433—436 (1954) [Russisch].

Garibjan, G. M. und I. I. Goldman: Die Spektren der π - und μ -Mesonen in der kosmischen Strahlung. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 257—263 (1954) [Russisch].

Treiman, S. B.: Cosmic radiation in the trapped orbits of a solar magnetic dipole field. Phys. Review, II. Ser. 93, 544—551 (1954).

Das „Knie“ im Breiteneffekt in großer Höhe der kosmischen Strahlung kann durch ein Abschneiden derselben durch ein solares Dipolmagnetfeld von etwa $6,5 \cdot 10^{13}$ Gauss/cm³ erklärt werden. Dieses würde auch einen tageszeitlichen Effekt bedingen. Dessen Stärke wird hier berechnet durch Bestimmung der Intensität der kosmischen Strahlung in der Region der begrenzten Bahnen (trapped orbits). In diese können Teilchen von außen durch Streuung am Erdfeld gelangen. Die Intensität berechnet sich aus dem Vergleich der hereingestreuten Teilchen mit den durch Streuung und Absorption daraus verschwindenden Teilchen. Frühere Rechnungen von Kane, Shanley und Wheeler [Reviews modern Phys. **21**, 51 (1949)] werden dahingehend modifiziert, daß diese Intensität (deren obere Grenze abgeschätzt werden kann) etwas kleiner als dort angegeben gefunden wird, was eine Erhöhung des Tageszeiteffektes auf etwa 7–8% bedeutet, in hohen Breiten ($\lambda = 60^\circ$ + sogar 120°), so daß er dort noch nachweisbar sein müßte. Die mittlere Zeit, welche ein Teilchen auf einem solchen „trapped orbit“ verbringt, verringert sich gegenüber den alten Rechnungen auf einige 100 Jahre. Die obere Grenze für ein solares Dipolfeld dürfte daher nach diesen Ergebnissen etwas unterhalb des angegebenen Wertes liegen.

G. Burkhardt.

Haber-Schaim, U. and G. Yekutieli: Energetic nuclear collisions in the upper atmosphere. I. The nucleon pion cascade. Nuovo Cimento, Ser. IX **11**, 172–187 (1954).

Die Nukleon-Pion-Kaskade in der oberen Atmosphäre wird für $E > 10^{11}$ eV durch Erweiterung der Fermischen Theorie der π -Mesonenerzeugung berechnet. Die Kaskadengleichungen werden durch eine Entwicklung nach Potenzen der durchsetzten Luftschicht gelöst. Der Beitrag durch primäre α -Teilchen ist berücksichtigt. Die Ergebnisse werden für die Berechnung des Verhältnisses von geladenen zu neutralen Kernpartikeln ausgewertet. Die Mitwirkung schwerer Mesonen ist vernachlässigt.

K.-H. Höcker.

Čavčanič, V. V.: Über die Anwendungen der Methode von Markov auf das Problem der mehrfachen Verluste. Žurn. eksper. teor. Fiz. **26**, 179–184 (1954) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß die Methode von Markov (die der Methode der charakteristischen Funktionen äquivalent ist, die Möglichkeit gibt, das Problem der Ermittlung der Verteilungsfunktion der Energieverluste eines mit den Atomen eines Stoffes mehrfach zusammenstoßenden geladenen Teilchens auf zwei sukzessive Quadraturen zu reduzieren. Die physikalische Anschaulichkeit der Markovschen Methode ermöglicht die Behauptung, daß die genannte Methode bestimmte Vorzüge gegenüber der bekannten Methode der Bildung von kinetischen Gleichungen besitzt.

Autoreferat.

Čavčanič, V. V.: Die Methode von Markov und die Probleme der Fluktuationen der Energieverluste bei mehrfachen Zusammenstößen. Žurn. eksper. teor. Fiz. **26**, 185–188 (1954) [Russisch].

Die Methode von Markov wird auf das Problem der Fluktuation der Energieverluste für den Fall des von einer geringen Anzahl von Zusammenstößen begleiteten Durchgangs eines Teilchens durch Materie angewandt. Eine Methode für die Ermittlung der Verteilungsfunktion der Verluste für den Fall großer Verluste für einzelne Akte wird entwickelt.

Autoreferat.

Drummond, W. E. and C. S. Gardner: Point source kernel for diffusion with small-angle scattering. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1491–1496 (1954).

Verff. betrachten ein homogenes unendliches Medium mit einer Punktquelle für Partikel, die dort mit einer Winkelverteilung $\sim e^{-\mu\theta}$ emittiert werden. Unter der Voraussetzung elastischer Stöße und einem differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sim \theta^{-2}$ (Vorwärtsstreuung) wird der Teilchenfluß pro cm² an einer beliebigen Stelle des Mediums berechnet. Die gemachten Annahmen entsprechen den Verhältnissen bei der Streuung von energiereichen Neutronen ($E > 100$ MeV) in schweren Elementen.

W. Brauer.

Rohrlich, F. and B. C. Carlson: Positron-electron differences in energy loss and multiple scattering. Phys. Review, II. Ser. **93**, 38–44 (1954).

Die Verff. behandeln den Unterschied in den Streuquerschnitten für Elektronen und Positronen bei Streuung an einem Kern-Coulombfeld, bzw. an einem anderen Elektron. Diese Differenzen sind durch verschiedene Experimentatoren bestätigt worden. Die vorliegende Arbeit befaßt sich nun mit der Auswirkung der oben erwähnten Unterschiede auf den Durchgang von Positronen und Elektronen durch

Materie. Auch in jüngster Zeit wurden Versuche in dieser Richtung gemacht [Phys. Review, II. Ser. 88, 408 (1952)], so daß den theoretischen Betrachtungen doch eine Bedeutung zukommt. Als Energiebereich wird 50 keV bis einige MeV genommen.

P. Urban.

Erskine, G. A.: Calculation of the energy per ion pair for α -particles in helium. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 224, 362—373 (1954).

Roussopoulos, Paul N.: Sur la diffusion élastique d'une particule par un système complexe. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 213—215 (1954).

Hamermesh, Morton and James Monahan: Nonsingle scattering of electrons at oblique incidence. Phys. Review, II. Ser. 93, 963—965 (1954).

Bau der Materie:

Brinkman, H. C.: Approximate solutions of the Thomas-Fermi equation for atoms and molecules. Physica 20, 44—48 (1954).

A new approximate solution is developed with a view to application to diatomic molecules, the free atom and N_2 being chosen as examples. The basic observation is that, for intermediate values of x , $\sqrt{x\Phi}$ is a slowly varying function ($\Phi = rV/Z$, V = electric potential); for atoms of spherical symmetry one has therefore $\Phi'' = \sqrt{x\Phi} \cdot \Phi/x$ with $\sqrt{x\Phi}$ constant approx.

J. Jacobs.

Clendenin, W. W.: Gyromagnetic ratio in the hyperfine structure of doublet states. Phys. Review, II. Ser. 94, 1590—1592 (1954).

Durch die Spin-Bahnkopplung werden dem $p_{1/2}$ -Zustande Teile des $p_{3/2}$ -Zustandes eines Einelektronensystems beigemischt. In der Arbeit wird der Einfluß dieser Durchmischung auf die magnetische Hyperfeinstruktur mit relativistischen Wellenfunktionen, im übrigen nach Standardmethoden der Störungsrechnung, berechnet. Es ergibt sich eine Verkleinerung des scheinbaren Kern- g -Faktors und eine Vergrößerung des $p_{1/2}$ — $p_{3/2}$ -Abstandes.

W. Humbach.

Redmond, P. J.: An explicit formula for the calculation of fractional parentage coefficients. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 222, 84—93 (1954).

Die fraglichen Koeffizienten werden auf einem anderen Wege berechnet als bei Racah [Phys. Review, II. Ser. 63, 367 (1943)], der sie einführte; insbesondere entfällt dabei der Gebrauch gruppentheoretischer Hilfsmittel weitgehend. Ein expliziter Ausdruck zur Berechnung der Koeffizienten für eine Menge von Teilchen in äquivalenten Zuständen wird angegeben und auf einige Beispiele angewendet.

E. Kreyszig.

Abbott, J. A. and H. C. Bolton: The influence of configurational interaction on the theoretical values of the polarizability of helium. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 221, 135—141 (1954).

A method of determining the perturbed wave function is developed for He. While less accurate than previous ones, the technique can in principle be extended to other electronic systems. The field-dependent part of the perturbed ground-state wave function is determined using some configurational functions of the appropriate symmetry with variable parameters. Addition of further configurations leads to fairly rapid convergence to the experimental polarizability value.

J. Jacobs.

Green, Louis C., Margaret N. Lewis, Marjorie M. Mulder, Cynthia W. Wyeth and John W. Woll jr.: Correlation energies and angular components of the wave functions of the ground states of H⁻, He I and Li II. Phys. Review, II. Ser. 93, 273—279 (1954).

A 3-parameter variational wave function for He I and Li II is suggested which involves an exponential factor, symmetrized in the nuclear distances, and a factor linear in the interelectron distance. The wave function is expanded in P_n 's. (θ the angle between the 2 radius vectors) where the coefficients are functions of the

nuclear distances of the 2 electrons. A discussion follows of the methods of estimating the configuration interaction energy, and its radial, angular and mixed parts.

J. Jacobs.

Green, Louis C., Marjorie M. Mulder, Margaret N. Lewis and John W. Woll jr.: A discussion of analytic and Hartree-Fock wave functions for $1s^2$ configurations from H^- to Cv . *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 757—761 (1954).

Munsch, G. et P. Pluvinaige: Fonctions d'onde approchées à un paramètre pour les états $2s$ de $He I$. *J. Phys. Radium* **15**, 122—123 (1954).

Andreev, A. I.: Zur Frage des Energieniveaus von heliumähnlichen Atomen. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **9**, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 65—69 (1954) [Russisch].

Moiseiwitsch, B. L.: On the electron affinities of atomic fluorine, oxygen and lithium. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 25—32 (1954).

Tillieu, Jaques et Jean Guy: Sur le calcul de la polarisabilité des orbitales atomiques $2p$. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 2498—2500 (1954).

Catalan, M. A., F. Röhrlich and A. G. Shenstone: Relations between the low atomic configurations in the long periods. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **221**, 421—437 (1954).

Meshkov, Sudney and C. W. Ufford: A complete Bacher and Goudsmit method. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 75—76 (1954).

(Henry, W. G.: The selfconsistent field for Au. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 789—794 1954).

Lenz, Friedrich: Zur Streuung mittelschneller Elektronen in kleinste Winkel. *Z. Naturforsch.* **9a**, 185—204 (1954).

Die vorliegende Arbeit stellt eine ausführliche Untersuchung der quantitativen Streuverhältnisse dar, welche speziell das Gebiet der kleinsten Winkel und die Bedürfnisse der Übermikroskopie berücksichtigt. Dabei werden unter „kleinsten“ Streuwinkeln solche zwischen 10^{-1} und 10^{-4} gemeint, die in der Übermikroskopie besonders interessieren, und unter „mittelschnellen“ Elektronen solche mit einer Beschleunigungsspannung von 50 bis 100 kV. Der Verf. zeigt, daß bei der elastischen Streuung die Berechnung des Streufaktors aus der Thomas-Fermischen Dichteverteilung gerade für kleine Streuwinkel zu recht beachtlichen Fehlern führt, und gibt einen Hinweis zur Vermeidung derselben. Ferner gibt er eine Streuformel für den unelastischen Fall an, welche gegenüber der bisherigen den Vorzug hat, eine geschlossene Integration des totalen Streuquerschnittes zu gestatten. Außerdem werden die gewonnenen Streuformeln für die Einfachstreuung zur Berechnung der Winkelverteilung im Falle der Mehrfachstreuung verwendet. Die entwickelten Formeln für die Einzelstreuung werden zur Berechnung der Gesamtquerschnitte, Aufhellungsdicken und vor allem der Mehrfachstreuung nach dem Verfahren von Bothe und Molière benützt und für Kohlenstoff, Chrom und Gold numerisch ausgewertet. Hierauf vergleicht der Verf. die theoretisch ermittelten Streuverteilungen mit Experimenten der Schule von Biberman [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **69**, 519 (1949)] einerseits und von Leisegang [Z. Phys. **132**, 153 (1952)] andererseits. Hierbei gelingt ihm die Erklärung der Diskrepanzen zwischen den Ergebnissen von Biberman und der älteren Theorie, welche das Thomas-Fermi-Modell als Grundlage nahm. Die Übereinstimmung der in vorliegender Arbeit entwickelten Theorie mit den experimentellen Resultaten ist wesentlich besser. Die Kenntnis der Streuverteilung in kleinste Winkel ist wichtig für die elektronenoptische Abbildung, da jede Berechnung der Intensitätsverteilung eines Bildpunktes im Endbild die Kenntnis der Streuverteilung des entsprechenden Objektpunktes zur Voraussetzung hat.

P. Urban.

Ishiguro, Eiichi, Sayoko Yuasa, Michiko Sakamoto and Tosaku Kimura: Tables useful for the calculation of the molecular integrals. V. *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **4**, 176—191 (1954).

Preuss, H.: Zweizentren-Wechselwirkungsintegrale. IV. *Z. Naturforsch.* **9a**, 376—389 (1954).

[Part III: Kopineck, *Z. Naturforsch.* **7a**, 785 (1952).] A number of basic integrals, required for the continuation of Kopineck's programme, are evaluated, allowance being made for different nuclear charges in the eigenfunctions. *J. Jacobs.*

Pritchard, H. O. and F. H. Sumner: A property of „repeating“ secular determinants. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **45**, 466—470 (1954).

In the molecular orbital method of dealing with second-order hyperconjugation in normal paraffins a certain determinant arises. During the course of solving such determinants it was found that the sum of the positive roots is a linear function of the number of rows in the determinant (to an accuracy better than 1 in 10^5); the conditions under which this holds are discussed. *J. Jacobs.*

Bingel, W.: Zur Definition der Bindungsordnung in der Quantenchemie. *Z. Naturforsch.* **9a**, 436—439 (1954).

The Pauling-Brockway-Beach definition of bond order ignores the overlap integral between valence structures. If, however, this integral is included in the normalisation condition and hence in the bond order definition, this new definition becomes identical with that of Penney. *J. Jacobs.*

McWeeny, R.: The valence bond theory of molecular structure. I. Orbital theories and the valence-bond method. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **223**, 63—79 (1954).

Orbital theories involving many anti-symmetrized one-electron wave functions are discussed in general, and the charge distribution in a molecule is shown to define a bond order in any such theory. The valence bond method is criticised and reformulated to become non-empirical. This revised theory is developed and detailed calculations are made using strictly orthogonal orbitals for H_2 ; apparently formally covalent valence bond structures lead to repulsion between bonded atoms. However, this anomaly is resolved and some general valuable properties of the new theory are derived. *J. Jacobs.*

Gallagher, K. J., A. R. Ubbelohde and Ida Woodward: The hydrogen bond in crystals. IX. The isotope effect in acetylenedicarboxylic acid dihydrate. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **222**, 195—206 (1954).

Longuet-Higgins, H. C. and M. de V. Roberts: The electronic structure of the borides MB_6 . *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **224**, 336—347 (1954).

Araki, Gentaro and Huzihiro Araki: Interaction between electrons in one-dimensional free-electron model with application to absorption spectra of cyanine dyes. *Progress theor. Phys.* **11**, 20—24 (1954).

Duculot, Camille: Dénombrement des modes vibrationnels résultant des harmoniques ou des combinaisons entre vibrations dégénérées, avec la considération particulière des vibrations triplement dégénérées. *J. Phys. Radium* **15**, 644—646 (1954).

Datta Majumdar, S.: Energy levels of triatomic molecules. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 351—364 (1954).

In the case of the asymmetrical top a reduction to a one-variable problem is achieved; this is possible as, from certain combinations of the angular momentum operators, the Eulerian angle θ can be removed by putting $\theta = \pi/2$. From the ordinary differential equation, to which the problem of a rigid top is similarly reduced, the centrifugal and Coriolis interaction terms in triatomic molecules are computed by a perturbation method; for values of J exceeding 9 no secular equation needed to be solved. *J. Jacobs.*

Dalgarno A. and G. Poots: Approximate molecular orbitals. I. The $1s\sigma_g$ and $2p\sigma_u$ states of H_2 . *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 343—350 (1954).

Approximate wave functions are found by a variational method, starting with a linear combination of a function of correct behaviour at $R = \infty$ and one correct at $R = 0$. A comparison is made of quantities (oscillator strength, quadrupole moments) computed with these approximate wave functions with the exact ones recently published by Bates. *J. Chem. Phys.* **19**, 1122 (1951); Bates and Poots [*Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 1124—1128 (1953)]; Bates and Darling [*Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 784—792 (1953)]; Bates and Ledsham, *this Zbl.* **51**, 225. The magnitudes of potential and kinetic energies are usually underestimated by these functions; the dependence of these energies on nuclear separation is discussed. *J. Jacobs.*

Moisewitsch, B. L. and A. L. Stewart: Approximate molecular orbitals. II. The $2p\pi_u$ and $3d\pi_g$ states of H_2 . *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 457—463 (1954).

Paper I of this series (preceeding review) found approximate wave functions by the Rayleigh-Ritz variational principle for the $1s\sigma_g$ and $2p\sigma_u$ states of H_2^+ ; the present paper develops similarly those for the $2p\pi_u$ and $3d\pi_g$ states. The variation of total kinetic and potential energy with nuclear separation is also discussed. *J. Jacobs.*

Howell, K. M.: The van der Waals energy of two helium atoms. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 705—710 (1954).

Bates, D. R. and H. S. W. Massey: Slow inelastic collisions between atomic systems. *Philos. Mag., VII. Ser.* **45**, 111—122 (1954).

Bates, D. R. and B. L. Moiseiwitsch: Inelastic heavy particle collisions involving the crossing of potential energy curves. I. Charge transfer from H atoms to Be^{2-} , Si^{2+} and Mg^{2+} ions. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 805—812 (1954).

Bates, D. R. and G. W. Griffing: Inelastic collisions between heavy particles. II. Contributions of double-transitions to the cross sections associated with the excitation of hydrogen atoms in fast encounters with other hydrogen atoms. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 663—668 (1954).

Kilpatrick, John E., William E. Keller, Edward F. Hammel and Nicholas Metropolis: Second virial coefficients of He^3 and He^4 . *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 1103—1110 (1954).

Gross, E. P.: Solution of the Boltzmann equation for Maxwellian molecules. *Phys. Review, II. Ser.* **93**, 347—348 (1954).

Dutta, M.: Critical study of Falkenhagen und Kelbg's method for derivation of statistics for particles of finite size. *Ann. der Physik, VI. F.* **14**, 188—192 (1954).

Verf. kritisiert die von H. Falkenhagen und G. Kelbg vorgeschlagene Zellenmethode, die Verteilungsfunktion für eine Mischung von Teilchen verschiedener Größe in einem Potentialfeld zu finden. Er wendet sich unter anderen gegen die Formulierung der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit und ferner gegen den Gebrauch des Partikelvolumens. Verf. übersieht jedoch, daß das zugrunde gelegte spezielle Modell eine Abbildung auf Zahlenfolgen gestattet, wodurch die erwähnten Punkte der Kritik hinfällig werden. Ref. weisen zur Ergänzung auf die Arbeiten von R. Schlögl [*Z. Phys. Chem.* **202**, 379 (1953)] und H. Falkenhagen und G. Kelbg [*Ann. der Physik, VI. F.* **14**, 391—396 (1954)] hin. Letztere Mitteilung ist eine Erwiderung auf vorliegende Kritik. *H. Falkenhagen-G. Kelbg.*

Rosen, Philipp: Use of restricted variational principles for the solution of differential equations. *J. appl. Phys.* **25**, 336—338 (1954).

Für gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung wird ein Variationsverfahren vorgeschlagen. Mit einem ähnlichen Verfahren läßt sich die Boltzmannsche Transportgleichung behandeln. Nur ein sehr einfaches Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung erläutert die Methode. *F. Penzlin.*

Bhatnagar, P. L., E. P. Gross and M. Krook: A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Review, II. Ser.* **94**, 511—525 (1954).

Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Gasen sind verschiedene Methoden vorgeschlagen worden, die entweder von den makroskopischen aerodynamischen Gleichungen ausgehen oder aber die mikroskopische Betrachtungsweise der Boltzmannngleichung verwenden. Während die makroskopische Beschreibung auf gewisse Bereiche der Gasdynamik beschränkt ist, kann die Boltzmannsche Methode ganz allgemein Verwendung finden, wenn es gelingt, die Teilchenwechselwirkung zu formulieren. Für die Grenzfälle großen bzw. kleinen Druckes haben Chapman und Enskog bzw. Jaffé sukzessive Verfahren zur Berechnung des Boltzmannschen Stoßtermes angegeben. Die Verff. versuchen dagegen eine zusammenfassende Darstellung für den gesamten Druckbereich zu gewinnen. Allerdings wird hierbei nicht eine exakte Lösung des Boltzmannschen Integralausdruckes angestrebt, sondern der Boltzmannnterm wird vielmehr einfach durch ein plausibel erscheinendes Glied ersetzt, welches an Hand einer Modellvorstellung gewonnen ist. Dieses Stoßglied hat die Eigenschaft, daß Teilchenzahl, Impuls und Energie durch die Stoßvorgänge nicht verändert werden. Mit Hilfe der so vereinfachten Boltzmannngleichung werden die Vorgänge kleiner Amplitude in neutralen bzw. ionisierten Gasen betrachtet, und zwar zunächst in isothermer Näherung und später in allgemeiner Form. Dabei verwendet die Untersuchung im Nachgang zu Landau eine kombinierte Form von Fourier- und Laplacetransformation. Für neutrale Gase ergeben sich bei hohen Drucken die bekannten Gesetze der Schallausbreitung. Bei ionisierten Gasen findet man bei niedrigem Druck die bekannten Gesetze der

Plasmaschwingungen, während mit zunehmendem Druck der Einfluß der individuellen Wechselwirkung eine neue Art der geordneten Bewegung bedingt. Sie liefert in isothermer Näherung die von Thomson an Hand der makroskopischen Gleichung gewonnene Beziehung. Die Vorgänge, bei denen die Wellenlänge größer bzw. kleiner als die Debye-Länge oder die mittlere freie Weglänge ist, werden getrennt behandelt und zeigen wesentlich verschiedenes Verhalten.

G. Ecker.

Allis, W. P. and D. J. Rose: The transition from free to ambipolar diffusion. Phys. Review, II. Ser. 93, 84—93 (1954).

Die Arbeit beschäftigt sich mit einer Erweiterung der Diffusionstheorie der Säule auf den Fall, daß die Glieder, welche die Wirkung der transversalen rücktreibenden Kraft enthalten, verschiedene Werte haben, erfaßt also die Sachlage in einem Plasma, wie es z. B. in der alten gewöhnlichen Theorie nach Schottky vorkommt, bis hinauf zu den Plasmen, welche man zerfallende Plasmen nennt. Es handelt sich also hier um eine Plasmatheorie sehr allgemeiner Art, die es nun erlaubt, die Sachlage ganz allgemein zu übersehen. Die Rechnungen werden — Ausgangspunkt sind die allgemeinen Gleichungen mit der Poissonschen Gl. an Stelle der sonst üblichen für Quasineutralität — bis zu jeweils gewissen Näherungen getrieben, und zwar in Form von Reihen bzw. in einer für die maschinelle Lösung geeigneten Form. Dabei erweist sich die Einführung dimensionsloser Variabler als vorteilhaft.

R. Seeliger.

Davidson, P. M.: A note on the formula for the mobility of electrons with mean free path varying with velocity. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 159—161 (1954).

Ware, A. A.: Collisional effects and the conduction current in an ionized gas. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 547—549 (1954).

Bayet, Michel, Jean-Loup Delcroix et Jean-François Denisse: Sur la résolution de l'équation de Boltzmann dans le cas d'un gaz de Lorentz; application aux gaz faiblement ionisés. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2146—2148 (1954).

Bayet, Michel: Propriétés électromagnétiques des plasmas soumis à un champ magnétique. J. Phys. Radium 15, 258—263 (1954).

Bez, W. und K.-H. Höcker: Die Bewegung von Ladungsenergien in nicht-homogenen Feldern. Z. Naturforsch. 9a, 64—66 (1954).

Entgegen dem Fall eines konstanten elektrischen Feldes, wo man mit dem Begriff der Beweglichkeit die Verhältnisse erfassen kann, wird hier die Frage untersucht, wie sich die Bewegung von Ladungsträgern in nicht-homogenen Feldern vollzieht. Hierzu wird zunächst auf Grund einer Energiebilanz und unter Heranziehung des Impulssatzes eine Differentialgleichung aufgestellt, welche die Änderung der kinetischen Durchschnittsenergie beschreibt. Als Grenzfall ergeben sich hieraus die üblichen Beweglichkeits- bzw. die gewöhnliche Fallformel, wenn man sich auf thermische Geschwindigkeit bezieht. Eine zweite Energiebilanz für die thermischen Trägerenergie beschreibt. Beide Gleichungen stellen nun ein simultanes Differentialgleichungspaar dar, in das neben Umwegfaktor, mittlerer freier Weglänge und der thermischen Energie des Neutralgases im wesentlichen die mittlere Fortschrittsgeschwindigkeit und thermische Geschwindigkeit der Träger, sowie das Potential eingehen. Daher ermöglichen diese Gleichungen bei Kenntnis des örtlichen Potentialverlaufes die Bestimmung der Fortschrittsgeschwindigkeit und der thermischen Energie der Ladungsträger.

R. Seeliger.

Bez, W. und K.-H. Höcker: Theorie des Anodenfalls. Z. Naturforsch. 9a, 72—81 (1954).

Es wird eine allgemeine Theorie des Anodenfalles eines normalen Lichtbogens entwickelt und für den Fall eines in Luft freibrennenden Kohlebogens durchgerechnet. Hierzu wird der Kathodenfallbereich in folgende Gebiete aufgeteilt: Ausgehend von der quasineutralen Säule in Richtung Anode, lagert sich zunächst ein Beschleunigungsgebiet vor, welches zur Aufnahme der zur Ionisation erforderlichen Mindestenergie dient; hier wird dementsprechend die Ionisation vernachlässigt. Diesem Beschleunigungsgebiet schließt sich das eigentliche Ionisationsgebiet an. Darüber hinaus wird noch der sich an die Säule direkt anlagernde erste Teil des Beschleunigungsgebietes als das sogenannte Übergangsgebiet bezeichnet. Man kann es dadurch charakterisieren, daß in ihm die positive Raumladung erheblich absinkt, bzw. daß die positiven Ionen, welche aus dem Ionisationsgebiet mit einer Fallbewegung abwandeln. Damit liegt die besondere Schwierigkeit in der Beschreibung dieses zuletzt erwähnten Bereiches. Hierzu wird das simultane Differentialgleichungspaar, wie es von Bez und Höcker in einer früheren Arbeit (vorsteh. Referat) aufgestellt wurde, numerisch integriert. Als Ergebnis aller Berechnungen werden der örtliche Verlauf von Raumladung, Potential, sowie thermischer Energie und Umwegfaktor der Ionen angegeben, die Ausdehnung der einzelnen Bereiche festgelegt und die Fehlerquellen diskutiert.

R. Seeliger.

Ecker, G.: Theory of the positive column. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 485—491 (1954).

Wie sich experimentell gezeigt hat, ist der (longitudinale) Säulengradient nicht unabhängig von der Stromdichte, sondern er steigt mit abnehmendem Strom erst langsamer, dann schneller an. Es liegt dies daran, daß sich nicht mehr ein Plasma mit praktisch gleichen Konzentrationen der Elektronen und der positiven Ionen ausbilden kann. Man muß deshalb von der Annahme der Quasineutralität absehen und das System der Grundgleichungen vollständig zu integrieren versuchen, d. h. mit Hinzunahme der Poissonschen Gleichung, wobei die Schottkysche Theorie als Grenzfall erscheint. Verf. führt die Integration in erster Näherung durch und kommt zum Schluß auf eine Darstellung des Gradienten in Abhängigkeit von der Stromdichte, die die erwähnten experimentellen Befunde recht gut wiedergibt.

R. Seeliger.

Bauer, A.: Zur Theorie des Kathodenfalls in Lichtbögen. Z. Phys. 138, 35—55 (1954).

Während beim rein thermischen Bogen und beim reinen Feldbogen ein Elektronenanteil von etwa $s = 0,8$ des gesamten kathodischen Stromes sehr wahrscheinlich ist, sind bei den dazwischenliegenden Bogenformen ($J = 10^4$ bis $J = 10^6$ Amp/cm²) genügend große s -Werte nicht zu verstehen. Verf. untersucht die Aufteilung des Kathodenstromes in diesem Gebiet genauer unter Berücksichtigung der Schottkyschen \sqrt{E} -Korrektur und macht es wahrscheinlich, daß auch hier eine Elektronenemission mit $s \geq 0,8$ anzunehmen ist. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, insbesondere auch den Übergang vom Brennfleckbogen zum brennflecklosen Bogen verständlich zu machen. Bei jedem Bogentyp steht an der Spitze der „ökonomische“ Prozeß der Thermo- und Feldemission, dem der kleine Kathodenfall zu verdanken ist. *R. Seeliger.*

Colli, L., U. Facchini, E. Gatti and A. Persano: Dynamics of corona discharge between cylindrical electrodes. J. appl. Phys. 25, 429—435 (1954).

In zwei Arbeiten hatten die Verf. den Vervielfachungsfaktor in der Coronaentladung (Geiger-Rohr) studiert und bringen nun eine theoretische Erklärung für die damals beobachteten Effekte. Vor allem handelt es sich darum, die Konstanz des Vervielfachungsfaktors und das Auftreten von Schwingungen des Stromes verständlich zu machen. Beides gelingt durch die Untersuchung der dynamischen Charakteristik der Coronaentladung. Zum Schluß werden noch experimentelle Ergebnisse kurz wiedergegeben, welche die Theorie gut zu bestätigen scheinen.

R. Seeliger.

Harries, W. L. and A. von Engel: The role of light quanta in the electric breakdown of gases. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 222, 490—508 (1954).

Die Vermehrung der Elektronenzahlen durch direkte ionisierende Stöße scheint in Neon über einen weiten Bereich des Druckes und der Wellenlänge nicht zu genügen, um den Entladungsdurchbruch erklären zu können. Ein großer Teil der Ionisationen ist hier (benutzt werden zylindrische Glasröhren mit ebenen Enden, an denen die Außenelektroden angebracht sind) bedingt durch eine Anregung durch Quanten über das Resonanzniveau bzw. die metastabilen Niveaus. Für Drucke zwischen 2 und 200 Torr und für Wellenlängen zwischen 10 und 10⁷ m werden die Verhältnisse genauer untersucht, und es wird ein theoretisches Bild der Sachlage gegeben. Im einzelnen führt dies zu einem Zusammenhang zwischen der Durchbruchfeldstärke und der Wellenlänge, dem Gasdruck, den Gefäßdimensionen und der Art des Gases sowie der Gefäßwände, der sich gut bestätigt.

R. Seeliger.

Graham, Walter J. and Arthur J. Ruhlig: Calculated values of the parameters of noble gas discharges. Phys. Review, II. Ser. 94, 25—29 (1954).

Gercenštejn, M. E.: Die Selbsterregung von Eigenschwingungen in der Gasentladung bei großen Drucken. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 57—63 (1954) [Russisch].

Die Wechselwirkung der Schall- und der Elektronenwellen im Gasentladungsplasma wird untersucht. Es wird die Möglichkeit der Selbsterregung eines bestimmten Frequenzintervalls gezeigt.

Autoreferat.

Takeo, Makoto and Shang-Yi Ch'en: Theory of fine structure pressure broadening of spectral lines. Phys. Review, II. Ser. 93, 420—424 (1954).

Die Druckverteilung der Dublett Komponenten in den Hauptserienlinien der Alkalien durch Edelgase wird berechnet. Die statische, abstoßende Wirkung der

Nachbaratome wird durch ein Störpotential, nämlich einen sphärischen, unendlich hohen Potentialwall um das strahlende Atom, beschrieben. Quantitative Berechnungen werden nicht durchgeführt, die Genauigkeit der Methode ist nicht zu übersehen.
G. Burkhardt.

Quantie, Chow: Opalescence and concentration fluctuations in binary liquid mixtures near the critical mixing point. I. Experimental. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 224, 90—103 (1954).

Ramakrishnan, Alladi and P. M. Mathews: A stochastic problem relating to counters. Philos. Mag., VII. Ser. 44, 1122—1128 (1953).

Die Verteilungsfunktion $\pi(n, t)$ für die Zahl der durch ein Zählrohr registrierten Ereignisse n im Zeitintervall t wird abgeleitet. Dabei wird in Erweiterung älterer Rechnungen angenommen, daß auf jedes Ansprechen des Zählrohrs verschiedene Totzeiten a oder b folgen, je nachdem, ob der Impuls registriert wurde oder nicht.
K.-H. Höcker.

Ramakrishnan, Alladi: On the molecular distribution functions of a one-dimensional fluid. I. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 401—409 (1954).

Die bekannten Ergebnisse von Salzburg, Zwanzig und Kirkwood [J. Chem. Phys. 21, 1098 (1953)] werden als Folgerungen aus den Überlegungen vom Verf. und Mathews (s. vorsteh. Referat) hergeleitet.
K.-H. Höcker.

Eisenschitz, R. and G. H. A. Cole: Theory of the effect of an electric field on liquid viscosity. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 394—400 (1954).

Mit Hilfe der Molekulartheorie wird der Feldeffekt auf die Viskosität von Dipolflüssigkeiten untersucht. Unter der Annahme von Zentralkräften zwischen den Molekülen, zu welchen sich noch Kräfte der Dipole überlagern, ermitteln die Verff. die Verteilungsfunktion für zwei Moleküle. Indem die Theorie der Transportprozesse von Kirkwood und Eisenschitz angewendet wird, kann der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Viskosität berechnet werden. Die erhaltenen Ergebnisse scheinen im Vergleich zum experimentellen Befund nicht ungünstig zu sein.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

Gregorig, Romano: Hautkondensation an feingewellten Oberflächen bei Berücksichtigung der Oberflächenspannungen. Z. angew. Math. Phys. 5, 36—49 (1954).

Verschaffelt, J. E.: La thermomécanique de l'électrolyse. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 219—225 (1954).

Schafroth, M. R.: A sound-wave description of fermion assemblies. Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 53—72 (1954).

Verf. beschreibt ein System von Fermi-Teilchen ohne Wechselwirkung durch ein quantisiertes Feld und definiert bilineare Ausdrücke in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die in Anwendung auf die tiefsten Zustände des Systems Vertauschungsrelationen vom Bosetyp erfüllen. Die Methode ist eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Verfahrens von Tomonaga [Progress theor. Phys. 5, 544 (1950)] auf drei Dimensionen. Dabei treten erhebliche neue Schwierigkeiten auf. Die Schallwellen beschreiben nicht die gesamte Bewegung des Systems, sondern nur ihren kollektiven Anteil. Anwendung auf die Berechnung der Freien Energie, der Dichteschwankungen und auf ein Fermigas im Magnetfeld.
G. Höhler.

Dash, J. G.: Superfluidity and dissipative processes in liquid He II. Phys. Review, II. Ser. 94, 825—828 (1954).

Dash, J. G.: Superfluid dynamics of liquid He II. Phys. Review, II. Ser. 94, 1091—1096 (1954).

Ziman, J. M.: The propagation of heat in liquid helium. Philos. Mag., VII. Ser. 45, 100—102 (1954).

Atkins, K. R.: Some comments on helium films. Canadian J. Phys. 32, 347—355 (1954).

Lokken, J. E.: Contribution from phonon-phonon interactions to the T^3 term of the specific heat of helium II. *Canadian J. Phys.* **32**, 359—360 (1954).

Launay, Jules de: The isotope effect in superconductivity. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 661—665 (1954).

Der Isotopieeffekt der Supraleitung bedeutet eine Abhängigkeit des Sprungpunktes T_c vom Atomgewicht M der verschiedenen Isotopen eines supraleitenden Elements. Nach der Fröhlichschen Theorie sollte $\sqrt{M} T_c = \text{const}$ sein. Es wird versucht einen Zusammenhang herzustellen zwischen empirisch festgestellten Abweichungen von diesem Gesetz und Abweichungen des Spektrums der Gitterschwingungen von einem einfachen Potenzgesetz. Diese Abweichungen sind empirisch bestimmbar aus Abweichungen der spezifischen Wärme vom Debyeschen Wert.

W. Brenig.

Armellini, Giuseppe: Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema astronomico dei due corpi di masse decrescenti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **15**, 345—351 (1954).

Angeregt durch die auf dem I. A. U.-Kongreß in Rom diskutierten kosmogonischen Ideen der russischen Schule (Ambartsumian, Fessenkoff) stellt der Verf. noch einmal seine früheren Ergebnisse über die Zwei-Körperbewegung bei abnehmender Masse zusammen, ausgehend von der Grundgleichung $\ddot{r} = -fM(t)r/r^3$, $\dot{M} < 0$ [r Radiusvektor, f Gravitationskonstante, $M(t)$ variable Masse] und zeigt, daß die oskulierende Exzentrizität der Bahn über alle Grenzen wächst, wenn für $t \rightarrow \infty$ sowohl $M(t) \rightarrow 0$ als auch $tM(t) \rightarrow 0$ geht. Speziell für den Exponentialansatz $\dot{M} = -\varepsilon M$, $\varepsilon > 0$, wo diese Bedingung erfüllt ist, ergeben sich bei Anwendung auf Doppelsternsysteme kosmogonische Konsequenzen.

H. Buerius.

Masotti, Arnaldo: Su alcune questioni di media nei moti centrali. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **15**, 381—386 (1954).

Die bei der Keplerbewegung üblichen Begriffe der mittleren und wahren Anomalie werden auf geschlossene Zentralbewegungen übertragen. Mittelbildungen nach diesen beiden Anomalien für beliebige ortsabhängige Größen stehen in einfacher Beziehung zueinander und werden speziell angegeben für die Zentralbeschleunigung, die kinetische Energie, das Virial nebst formalen Verallgemeinerungen.

H. Buerius.

Rubin, Vera Cooper: Fluctuations in the space distribution of the galaxies. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 541—549 (1954).

Fesenkoff, V. G.: Über die Dichte der Fasern von gas- und staublörmigen Nebeln. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **96**, 941—943 (1954) [Russisch].

Smidt, O. Ju.: Über die Herkunft der Asteroiden. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **96**, 449—451 (1954) [Russisch].

Cimino, Massimo: Sulla distribuzione di equilibrio della materia gassosa negli ammassi globulari. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **16**, 215—221 (1954).

Es wird untersucht, welche Gleichgewichtsverteilung interstellares Gas im Gravitationsfeld eines Kugelsternhaufens einnimmt. Der Radius r_1 , bis zu dem sich das Gas vom Haufenzentrum entfernen kann, ist eine Funktion der Gesamtmasse des Haufens und der Zentraltemperatur. Unter Voraussetzung der durchschnittlich beobachteten Gesamtmassen von Kugelsternhaufen ergibt sich, daß bei einer Zentraltemperatur von weniger als 150° absolut alles Gas den Haufen verlassen kann; dabei ist angenommen, daß das Gas aus molekularem Wasserstoff besteht. Für extragalaktische Nebel erhält man etwa 10^6 Grad abs. als notwendige Zentraltemperatur, bei der das Gas das System verlassen kann. Daraus folgt ein Hinweis, warum interstellares Gas in extragalaktischen Nebeln so häufig beobachtet wird, in Kugelsternhaufen hingegen regelmäßig fehlt.

F. Schmeidler.